



## Tentamen MMS260 Kontinuummekanik

Tid: 6 oktober 2023 kl 08:30-12:30

Lärare: Henrik Ström (mobil: 070-40 25 119, kontor: 031-772 13 60)

Tillåtna hjälpmedel: Till tentamen får man medföra ett (dubbelsidigt) papper med egna anteckningar. Dessa anteckningar kan vara handskrivna eller datorskrivna, vilket som önskas. I övrigt är följande hjälpmedel tillåtna: penna, radergummi, linjal och ordbok (ej elektroniska ordböcker), samt miniräknare med tömt minne och matematisk handböcker (t ex Physics Handbook och/eller BETA). Räknare som används som hjälpmedel vid tentamen får inte ha trådlös anslutningsmöjlighet till internet. I formelsamlingar får endast indexeringar göras. Om det förekommer tryckfel i de tillåtna hjälpmedlen får handskrivna rättelser finnas. Mobiltelefoner och elektronisk utrustning, som inte är godkända hjälpmedel, skall vara avstängda och får inte medföras till skrivplatsen.

Lärare besöker salen: ca kl 09:30 och kl 11:30

**OBS!** Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

Rättning: Resultatet anslås senast den 27:e oktober 2023 i Canvas. Det kan också ses i Studentportalen och Ladok (eventuellt med viss fördröjning). Instruktioner för tentamensgranskning publiceras tillsammans med tentamensresultatet.

Betygsgränser: Poängantalet för korrekt besvarad/löst uppgift anges inom parentes (p). Betygsgränser för tentamen är:

Betyg U < 20p ;  $20p \leq$  Betyg 3 < 30p ;  $30p \leq$  Betyg 4 < 40p ; Betyg 5  $\geq$  40p.

**LYCKA TILL!**

1. Grundläggande begrepp (5p)

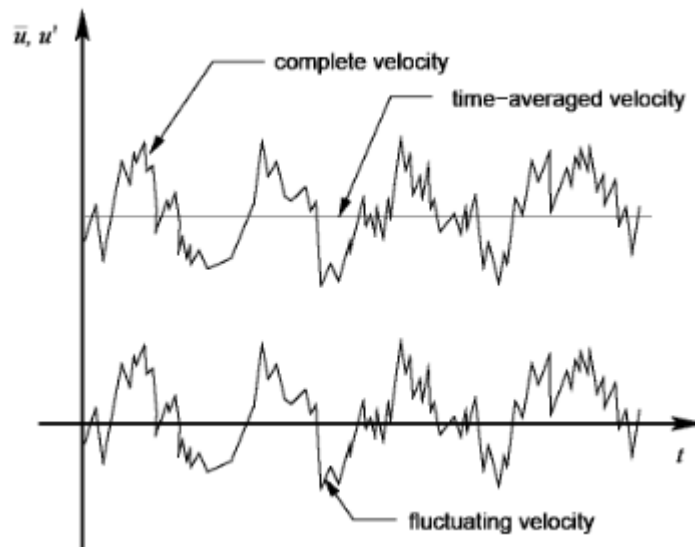
Identifiera (namnge) de grundläggande begrepp - ur listan i rutan på nästa sida - som beskrivs nedan i (a)-(g):

- a) Vektor som karakteriserar värmefflöde per enhetsarea och enhetstid och ofta beräknas via Fouriers lag
- b) Vektor som karakteriserar makroskopisk medelhastighet hos materialpartiklarna i en punkt
- c) Spänningstensor som karakteriserar nuvarande kraft per enhet odeformerad area
- d) Tensor som tar ett materiallinjeelement på referenskonfigurationen och mappar det till den nuvarande konfigurationen
- e) Materialegenskap som karakteriserar materialstyvhet som kvoten mellan skjuvspänning och skjuvtöjning

deformationsgradienttensorn,  $\mathbf{F}$   
 förflyttningsgradienttensorn,  $\mathbf{H}$   
 vänstra Cauchy-Green deformationstensorn,  $\mathbf{B}$   
 högra Cauchy-Green deformationstensorn,  $\mathbf{C}$   
 styvhetstensorn,  $\mathbb{C}$   
 hastighetsgradienttensorn,  $\mathbf{L}$   
 symmetriska delen av hastighetsgradienttensorn,  $\mathbf{D}$   
 antisymmetriska delen av hastighetsgradienttensorn,  $\mathbf{W}$   
 materiederivatan,  $D/Dt$   
 Eulerska töjningstensorn,  $\mathbf{e}$   
 Lagrangeska töjningstensorn,  $\mathbf{E}$   
 infinitesimala töjningstensorn,  $\boldsymbol{\epsilon}$   
 Cauchys spänningstensor,  $\boldsymbol{\sigma}$   
 första Piola-Kirchoff spänningstensorn,  $\mathbf{P}$   
 andra Piola-Kirchoff spänningstensorn,  $\mathbf{S}$   
 hastighetsvektorn,  $\mathbf{v}$   
 förflyttningsvektorn,  $\mathbf{u}$   
 värmeffluxvektorn,  $\mathbf{q}$   
 spänningsvektorn,  $\mathbf{t}$   
 Cauchys högra töjningstensor,  $\mathbf{U}$   
 Cauchys vänstra töjningstensor,  $\mathbf{V}$   
 rotationstensorn,  $\mathbf{R}$   
 deformationsmappningen,  $\boldsymbol{\chi}$   
 temperaturen,  $T$   
 trycket,  $p$   
 skjuvspänningstensorn,  $\boldsymbol{\tau}$   
 dissipationsfunktionen,  $\Phi$   
 viskositeten,  $\mu$   
 densiteten,  $\rho$   
 Youngs modul,  $E$   
 Poissonration,  $\nu$   
 skjuvmodulen,  $G$   
 värmekonduktiviteten,  $k$   
 specifika värmekapaciteten (vid konstant tryck),  $c_p$   
 bulkmodulen,  $\kappa$

2. Teori (12p)

- a) Visa hur den integrala formen av den linjära rörelsemängdsbalansen för den nuvarande konfigurationen ( $\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} dv + \int_{\partial \kappa} \mathbf{t} da$ ) kan omformuleras till den lokala formen ( $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ ).
- b) En materialmodell för en Newtonsk fluid som strömmar inkompressibelt kan till exempel härledas via enklast möjliga analogi med en elastisk solid. Bidraget  $\kappa \text{tr } \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I}$  till  $\boldsymbol{\sigma}$  ersätts då med  $-p\mathbf{I}$ . Vad är  $\kappa$  och vad är  $p$  i dessa uttryck? Vad är problematiskt med produkten  $\kappa \text{tr } \boldsymbol{\epsilon}$  för ett inkompressibelt medium?
- c) I figuren nedan visas en hastighetssignal i en punkt i ett turbulent flöde uppdelad i tre olika delar ( $u$ ,  $\bar{u}$  och  $u'$ ). Ange vilken del som hör till vart och ett av de tre namnen som förekommer i figuren. I de så kallade RANS-ekvationerna ingår en term  $-\rho \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle$ . Vad representerar den?



- d) I den elastiska domänen av en töjnings-spänningskurva från ett dragprov finns en unik relation mellan varje värde på töjningen och motsvarande spänning i materialet. Hur ser den tredimensionella relationen mellan  $\boldsymbol{\sigma}$  och  $\boldsymbol{\epsilon}$  ut i denna domän? I mer komplexa fall kan en given

töjning motsvaras av flera historiska spänningsvärden inuti materialet. Skissa en sådan töjnings-spänningskurva och förklara hur den kan uppkomma!

- e) Fenomenet *kaos* upptäcktes av Edward Lorenz när han gjorde datorbaserade väderberäkningar på 1960-talets början. Lorenz testade att starta en beräkning med data från mitten av en tidigare körning som indata. I början gick det bra, men efter en stund började kurvorna skilja sig, först lite, men så småningom fanns ingen likhet mellan den nya och den gamla körningen. Efter mycket felsökning insåg Lorenz att det inte var fel på beräkningarna, utan på de data han hade skrivit in manuellt, där han bara angett tre decimaler. Noggrannare än så kunde mätningarna ändå inte göras. Han förväntade sig att små ändringar i indata skulle ge små ändringar i resultatet – men upptäckte alltså att så inte var fallet. Förklara detta fenomen och ange speciellt vilken/vilka termer i Navier-Stokes ekvationer som är orsaken!
- f) Arbetet per tidsenhet som utförs på ett volymelement för att ändra dess volym och form ( $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$ ) kan skrivas som summan av arbetet per tidsenhet för att åstadkomma volymändring ( $-p(\nabla \cdot \mathbf{v})$ ) och arbetet per tidsenhet för att åstadkomma formförändring ( $\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$ ). Utgör dessa två bidrag reversibla eller irreversibla förändringar av den specifika inre energin? Den andra av de två termerna har ett särskilt namn. Vad kallas den och vad syftar detta namn på?

3. Spännings- och töjningstillstånd (4p)

Spänningarna i en elastisk kropp har i en punkt beräknats till

$$\sigma_x = -90 \text{ MPa}, \sigma_y = -140 \text{ MPa}, \sigma_z = -90 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 40 \text{ MPa}, \tau_{yz} = 40 \text{ MPa}, \tau_{xz} = -10 \text{ MPa}$$

där  $(x, y, z)$  är ett Cartesiskt högersystem.

Bestäm normal- och skjuvspänning på ytan, genom punkten, med normalen  $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [1, 0, -1]^T$ . Bestäm även det största trycket i punkten.

Ledning: Huvudspänningarna i punkten är  $-60 \text{ MPa}$ ,  $-80 \text{ MPa}$  och  $-180 \text{ MPa}$ .

#### 4. Elasticitetsproblem (5p)

Ett linjärt elastiskt material utsätts för en störning i form av en oändlig följd av sinusformade planvågor:

$$u_1 = \varepsilon \sin \frac{2\pi}{\ell} (x_1 - c_L t),$$

$$u_2 = 0,$$

$$u_3 = 0.$$

Denna rörelse kan tolkas som att varje materialpartikel genomgår en enkel harmonisk oscillation av (liten) amplitud  $\varepsilon$  kring sitt naturliga tillstånd. Rörelsen är parallell mot  $\mathbf{e}_1$ -riktningen, och alla partiklar på ett plan normalt mot  $\mathbf{e}_1$  är i samma fas av rörelsen vid varje givet ögonblick.

Fashastigheten (hastigheten med vilken den sinusformade störningen av våglängd  $\ell$  rör sig i  $\mathbf{e}_1$ -riktningen) betecknas  $c_L$ . Visa hur  $c_L$  beror av mediets materialegenskaper!

5. Strömningsproblem (7p)

Betrakta fullt utvecklade, inkompressibla, laminära och stationära strömningar mellan två parallella, oändliga och stillastående plattor. Fluiden är Newtonsk, med densitet  $1000 \text{ kg/m}^3$  och viskositet  $0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ . Avståndet mellan plattorna är  $2 \text{ mm}$ . Gravitationens inverkan på strömningen kan försummas.

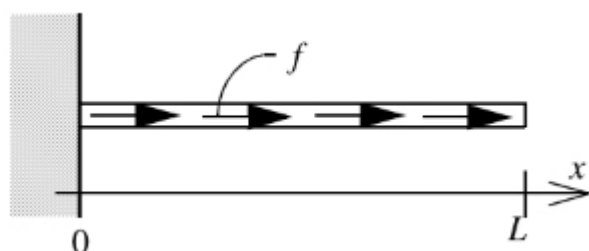
Om väggskjuvspänningen (den tangentiella kraften per ytenhet som den strömmande fluiden utverkar på väggarnas insida) är  $1 \text{ Pa}$ , vad är då hastigheten mitt mellan plattorna?

Utgå från Navier-Stokes ekvationer när du löser uppgiften.

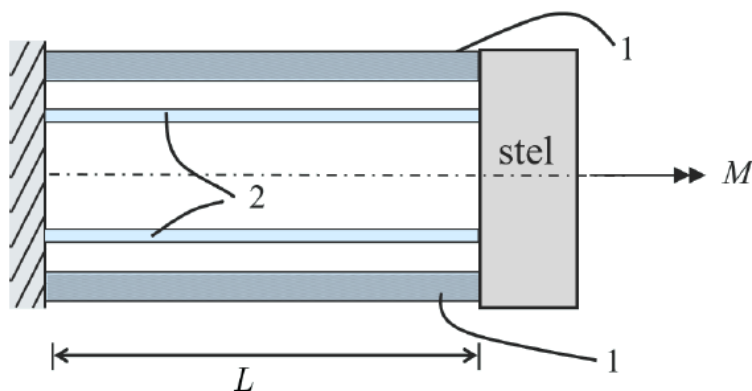


6. Approximativa lösningar: solider (10p)

- a) En stång tillverkad av ett linjärt elastiskt material (elasticitetsmodul  $E$ ) har längd  $L$  och är fixerad i sin vänstra ände. Stången belastas med en friktionslast med konstant intensitet (kraft/längd)  $f$  utmed hela sin längd. Bestäm stångens tvärsnittsarea  $A(x)$  så att spänningen  $\sigma(x)$  varierar linjärt mellan  $\sigma(0) = fL/A_0$  vid inspänningen och  $\sigma(L) = 0$  vid den fria änden.  $A_0$  är tvärsnittsarean vid  $x = 0$ . (5p)



- b) Bestäm hur mycket den stela skivan i bilden nedan roterar om den utsätts för det vridande momentet  $M$ . Antag att två cirkulära axlar med vridstyvhet  $GK_{v,1}$  och  $GK_{v,2}$  båda är fästa i stela väggen till vänster och stela skivan till höger. Antag att dessa axlars längd är  $L$ . (5p)



7. Approximativa lösningar: fluider (7p)

- a) Ett duschmunstycke är monterat på en slang i en duschkabin i ett hyreshus där vattnet levereras vid ett bestämt tryck. En ingenjör vill spara på vatten på så sätt att när duschkranen är på max ska vattenflödet ut genom duschmunstycket vara lägre än idag. Hur kan ingenjören gå tillväga? Motivera ditt svar. (2p)
- b) Om man antar att Bernoullis ekvation är giltig kan man härleda att hastigheten  $v$  med vilken en vattenstråle lämnar ett skarpt hål i sidan/botten av en tank fylld till ett djup  $h$  är identisk med den hastighet som en vattendroppe skulle få vid fritt fall från höjden  $h$ . Gör denna härledning! (3p)
- c) En ingenjör ska lösa ett strömningsproblem numeriskt med hjälp av computational fluid dynamics (CFD). Hen inser att den rumsupplösning som krävs för att kunna beskriva även de minsta turbulenta virvlarna i flödet är så pass krävande att simuleringarna kommer att bli mycket tunga. Går det att via dimensionslösa tal skala om problemet så att simuleringen blir mindre krävande? Varför/varför inte? (2p)

## Formelsamling

---

### Matematik

$s$  är skalär,  $\mathbf{v}$  är vektor,  $\mathbf{A}$  är andra ordningens tensor

*Jacobis formel*

$$\frac{d}{d\tau} \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \operatorname{tr} \left[ \frac{d\mathbf{A}}{d\tau} \mathbf{A}^{-1} \right]$$

*Symmetriska och antisymmetriska tensorer*

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^S + \mathbf{A}^A = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

$\mathbf{A}^S$  symmetrisk:  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ ,  $A_{ij} = A_{ji}$

$\mathbf{A}^A$  anti-symmetrisk:  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ ,  $A_{ij} = -A_{ji}$ ,  $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$

*Deviatorisk (avvikande) tensor*

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{I}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A}' = 0$$

*Identitetstensor*

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}$$

*Divergensteoremet*

$$\int_{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \int_{\partial\kappa} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$$

---

## Kinematik

### Definitioner

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}_0(M), \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_t(M), \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_t(M)}{\partial t}, \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}(M, t)}{\partial t}$$

$$\phi = \check{\phi}(M, t) = \hat{\phi}(\mathbf{X}, t) = \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)$$

### Materiederivatans och hastighetsgradienten

$$\frac{D\phi}{Dt} = \begin{cases} \left. \frac{\partial \check{\phi}(M, t)}{\partial t} \right|_{M = \text{fix}} \\ \left. \frac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X} = \text{fix}} \\ \frac{\partial \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \tilde{\phi} \cdot \mathbf{v} \end{cases}$$
$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

$$\text{tr } \mathbf{L} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$$

### Förflyttning och deformation

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$$

### Mappning mellan referenskonfigurationen och nuvarande konfigurationen

$$J = \det \mathbf{F} = |\mathbf{F}|$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

$$da \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}^\# dA \cdot \hat{\mathbf{N}} = J \mathbf{F}^{-T} \cdot dA \hat{\mathbf{N}}$$

$$dv = JdV$$

*Töjning*

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})$$

## Spänningar

*Spänningsvektorer*

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}})}{\Delta a}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{nn} + \mathbf{t}_{ns} = (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{t} \times \hat{\mathbf{n}})$$

$$\mathbf{t}_{nn} = (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}, t_{nn} = \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}} = t_i n_i = \sigma_{ij} n_i n_j$$

$$\mathbf{t}_{ns} = \mathbf{t} - \mathbf{t}_{nn}, |\mathbf{t}_{ns}| = t_{ns} = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - t_{nn}^2}$$

$$(t_{ns})_{\max} = \frac{1}{2}(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

*Cauchys lemma*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\hat{\mathbf{n}}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \hat{\mathbf{n}})$$

*Cauchys spenningsformel*

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

*Cauchys spenningstensor*

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$I_1 = \text{tr} [\boldsymbol{\sigma}] = \sigma_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr} [\boldsymbol{\sigma}])^2 - \text{tr} ([\boldsymbol{\sigma}]^2)] = \frac{1}{2} (\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji})$$

$$I_3 = |\boldsymbol{\sigma}|$$

*Piola-Kirchoffs spenningstensorer*

$$\mathbf{T} dA = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} dA = \mathbf{t} da = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T$$

$$d\mathcal{F} = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}\mathbf{F}^T$$

---

**Mekaniklagar**

*Massa*

$$m = \int_{\mathcal{B}} dm = \int_{\kappa_0} \rho_0 dV = \int_{\kappa} \rho dv$$

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

$$\rho_0 = \rho J$$

*Massbalans - integral form för referenskonfigurationen*

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \rho_0 dV = 0$$

*Massbalans - integral form för nuvarande konfigurationen*

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho dv = 0$$

*Massbalans - lokal form för referenskonfigurationen*

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$$

*Massbalans - lokal form för nuvarande konfigurationen*

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

*Reynolds transportteorem*

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho F dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\kappa} \rho F dv + \int_{\partial \kappa} \rho F \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

*Rörelsemängd*

$$\mathcal{P} = \int_{\mathcal{B}} d\mathcal{P} = \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} dv$$

$$\mathcal{H}^o = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_o \times d\mathcal{P} = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dv$$

$$\frac{D\mathcal{P}}{Dt} = \mathbf{F}$$

$$\frac{D\mathcal{H}^o}{Dt} = \mathbf{M}^o$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \, da$$

$$\mathbf{M}^o = \mathbf{M}_B^o + \mathbf{M}_S^o = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, da$$

*Rörelsemängdsbalanser - integral form för referenskonfigurationen*

$$\int_{\kappa_0} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = \int_{\kappa_0} \rho_0 \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dA$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dV = \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, dA$$

*Rörelsemängdsbalanser - integral form för nuvarande konfigurationen*

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \, da$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dv = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, da$$

*Rörelsemängdsbalanser - lokal form för referenskonfigurationen*

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^T$$

*Rörelsemängdsbalanser - lokal form för nuvarande konfigurationen*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$$

*Energi*

$$\frac{D}{Dt} (K + U) = W + Q_h$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv, \quad U = \int_{\kappa} e \, dv$$

$$W = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da, \quad Q_h = - \int_{\partial\kappa} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q} da + \int_{\kappa} \rho r_h dv$$



*Energibalans - integral form för nuvarande konfigurationen*

$$\int_{\kappa} \left( \rho \frac{De}{Dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r_h \right) dv = 0$$

*Energibalans - lokal form för nuvarande konfigurationen*

$$\rho \frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r_h$$

### Konstitutiva samband

*Generalisering av Hookes lag till 3D*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\{\sigma\} = [\mathbb{C}] \{\epsilon\}, \{\epsilon\} = [S] \{\sigma\}, \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S} = \mathbb{C}^{-1}$$

*Isotrop elastisk solid*

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} = \kappa \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, 2\mu + \lambda = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\kappa = \lambda + 2\mu/3$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}}$$

*Newtonsk fluid, inkompressibel strömning*

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T]$$

$$\tau \propto \frac{d\theta}{dt} = \frac{dv_x}{dy}, \quad \tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

*Oviskös eller stillastående fluid, alternativt rotationsfri strömning*

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$$

*Fouriers lag*

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla T \text{ (anisotropt medium)}$$

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \text{ (isotropt medium)}$$

---

## Linjäriserade elasticitetsproblem

*Linjäriserade beskrivningen*

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\mathbf{e} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{X}, \quad \rho_0 \approx \rho$$

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{P} \approx \mathbf{S}$$

*Töjning-förflyttning*

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Rörelselagar

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho_0 f_x = \rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho_0 f_y = \rho_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho_0 f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho_0 f_r = \rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\theta r} - \sigma_{r\theta}}{r} + \rho_0 f_\theta = \rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho_0 + f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

Kompatibilitet

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\epsilon})^T = \mathbf{0}$$

Lamé-Naviers ekvationer

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

Michells ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1 + \nu} \nabla [\nabla (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})] = -\frac{\nu \rho_0}{1 - \nu} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{I} - \rho_0 [\nabla \mathbf{f} + (\nabla \mathbf{f})^T]$$

Beltramis ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \nabla [\nabla (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})] = \mathbf{0}$$

*Plantöjningsproblem - jämvikt*

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

*Planspänningsproblem - jämvikt*

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

## Strömningsproblem

*Inkompressibel strömning, Newtonsk fluid*

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{f} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y = \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\
& \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z = \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\
& \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_r \\
& \quad = \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\
& \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f_\theta \\
& \quad = \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\
& \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z \\
& \quad = \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

*Hydrostatik*

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

---

## Värmetransportproblem

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho r_h$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \Phi + \rho r_h$$

*1D-problem*

$$\begin{aligned}
& \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2} + gz \right)_{\text{out}} (\rho Q)_{\text{out}} - \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2} + gz \right)_{\text{in}} (\rho Q)_{\text{in}} \\
& \quad = W_{\text{shaft}} + H_{\text{net}}
\end{aligned}$$

*Dissipation, Newtonsk fluid*

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \Phi$$

$$\begin{aligned} \Phi = & 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \mu \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

*Boussinesq approximation*

$$\rho = \rho_0 - \beta \rho_0 (T - T_0)$$

*Termisk expansion*

$$\epsilon^{\text{term}} = \alpha \Delta T$$

$$\epsilon = \epsilon^{\text{mek}} + \epsilon^{\text{term}} = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

## Approximativa lösningar: solider

*Stång*

$$N = P, \bar{\epsilon} = \delta/L, \sigma = E\bar{\epsilon}, N = \sigma A$$

$$\begin{bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}$$

*Stångens differentialekvation*

$$\epsilon = \frac{du}{dx}, \sigma = E \frac{du}{dx}, N = EA \frac{du}{dx}$$

$$-\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) = K_x A$$

*Axel*

$$\tau = G\gamma = \frac{M_v}{K_v} r, \gamma = \frac{r}{L} (\varphi(L) - \varphi(0)) = \frac{r}{L} (\varphi_2^e - \varphi_1^e)$$

$$\begin{bmatrix} M_1^e \\ M_2^e \end{bmatrix} = \frac{GK_v}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^e \\ \varphi_2^e \end{bmatrix}$$

$$K_v = 2\pi r^3 h \text{ (tunnväggigt tvärsnitt)}$$

$$K_v = \pi(b^4 - a^4)/2 \text{ (tjockväggigt tvärsnitt)}$$

*Axels differentialekvation*

$$\frac{d}{dx} \left( GK_v \frac{d\varphi}{dx} \right) + q_v = 0$$

*Balk*

$$\frac{dN}{dx} + K_x A = 0, \quad \frac{dT}{dx} + q = 0, \quad \frac{dM}{dx} = T, \quad \frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0$$

$$\alpha = \frac{dw}{dx}, \quad \epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{d^2 w}{dx^2} z, \quad \sigma_x = E\epsilon_x = -E \frac{d^2 w}{dx^2} z, \quad M = -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

*Balkens differentialekvation (Elastiska linjens ekvation)*

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = q(x)$$

## Approximativa lösningar: fluider

*Bernoullis ekvation*

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{constant (utan förluster)}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_f \text{ (med förluster)}$$

## Turbulens

*Kolmogorovs skalor*

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}, u_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4}$$

*Reynoldsdekomponering*

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}', p = \bar{p} + p'$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} dt = \langle \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} \rangle = \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}} = 0$$

*Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) ekvationer*

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0$$

$$\nabla \cdot (-\bar{p} \mathbf{I} + 2\mu\bar{\mathbf{D}} - \rho\langle \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' \rangle) = \rho \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt}$$



# Tentamen MMS260 Kontinuummekanik

6 oktober 2023

## LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Grundläggande begrepp (5p)

a) värmeffluxvektorn,  $\mathbf{q}$

b) hastighetsvektorn,  $\mathbf{v}$

c) första Piola-Kirchoff spänningstensorn,  $\mathbf{P}$

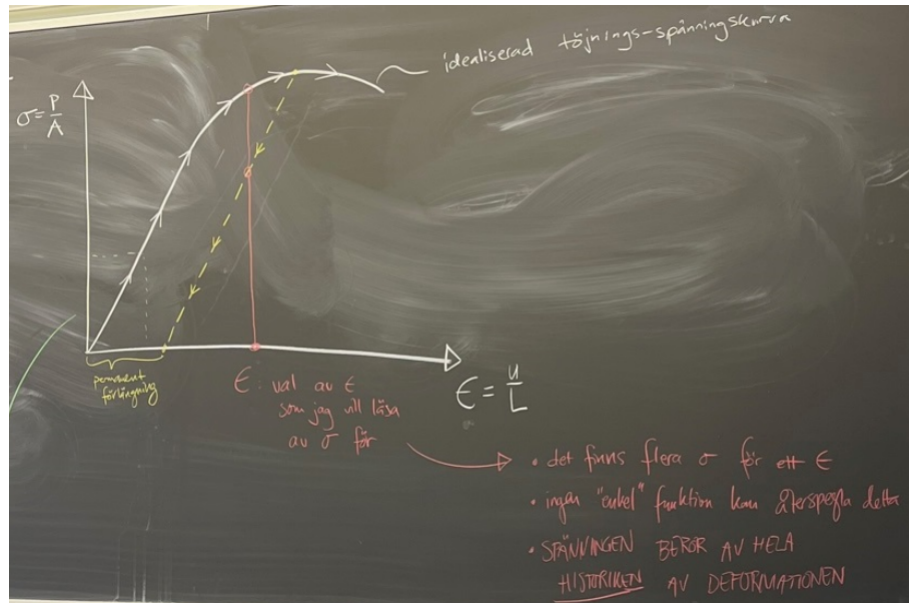
d) deformationsgradienttensorn,  $\mathbf{F}$

e) skjuvmodulen,  $G$

## 2. Teori (12p)

- a) För termen med materiederivatans:  $dv = JdV$ ,  $\int_{\kappa} \rightarrow \int_{\kappa_0}$ ,  $\rho_0 = \rho J$ ,  $\kappa_0$  varierar ej i tid  $\rightarrow$  flytta in  $D/Dt$  i integralen,  $\rho_0$  varierar ej i tid  $\rightarrow$  flytta ut ur  $D/Dt$ , gå tillbaka till  $\kappa$ . För termen med spänningsvektorn: Cauchys spänningsformel + divergensteoremet. Samla alla termer i en  $\int_{\kappa}$  som är  $= 0$ . Val av  $\kappa$  godtyckligt, alltså är integranden noll  $\rightarrow$  lokala formen.
- b)  $\kappa$  är bulkmodulen (materialegenskap),  $p$  är trycket (tillståndsvariabel). För ett inkompressibelt medium gäller att  $\kappa \rightarrow \infty$  (det blir oändligt svårt att komprimera mediet) och  $\text{tr } \boldsymbol{\epsilon} \rightarrow 0$  (volymförändringen av mediet blir oändligt liten), så att produkten  $\kappa \text{tr } \boldsymbol{\epsilon}$  är illa definierad. För ett inkompressibelt medium induceras alltid ett tryckfält  $p$  som garanterar att hastighetsfältet är (och förblir) divergensfritt.
- c)  $u$  = complete velocity,  $\bar{u}$  = time-averaged velocity,  $u'$  = fluctuating velocity. Termen  $-\rho \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle$  är en ny "spänningstensor" (egentligen härstammandes från de icke-linjära konvektiva termerna i N-S) vid namn Reynoldsspänningarna och beskriver effekten av turbulens på medelfälten (dvs effekten av de ej upplösta fluktuationerna på de upplösta medelfälten).

- d)  $\sigma = \mathbb{C} : \epsilon$ . Den vita linjen som sedan fortsätter i den streckade gula linjen visar ett exempel på det som efterfrågas. Materialet belastas bortanför den elastiska domänen och en permanent deformation uppstår. Spänningen i materialet är då olika vid samma töjning beroende på om det är under ökande eller minskande belastning.



- e) Den stora känsligheten till små variationer i initiallösning beror på att rörelselagen är icke-linjär. De termer i N-S som är ansvariga är  $\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})$ .
- f)  $-p(\nabla \cdot \mathbf{v})$  är ett reversibelt bidrag,  $\tau : \nabla \mathbf{v}$  är irreversibelt.  $\tau : \nabla \mathbf{v} = \Phi$ , dissipationsfunktionen – syftar på att den beskriver hur mekanisk energi dissiperas till värme.

### 3. Spännings- och töjningstillstånd (4p)

Med givna data:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -90 & 40 & -10 \\ 40 & -140 & 40 \\ -10 & 40 & -90 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Cauchy's spänningsformel ger  $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , här är  $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{(2)}} [1, 0, -1]^T$  så att spänningsvektorn på ytan med den givna normalen är:

$$[t] = \frac{1}{\sqrt{(2)}} \begin{bmatrix} -90 & 40 & -10 \\ 40 & -140 & 40 \\ -10 & 40 & -90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(2)}} \begin{bmatrix} -80 \\ 0 \\ 80 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Normalspänningen (projektion av spänningsvektorn på normalen):  $\sigma = \hat{\mathbf{n}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} = -80 \text{ MPa}$

Skjuvspänningen:  $\tau = \sqrt{|t|^2 - \sigma^2} = 0 \text{ Mpa}$

Största trycket = minsta (största negativa) huvudspänningen  $\rightarrow 180 \text{ MPa}$

#### 4. Elasticitetsproblem (5p)

Vi hittar ett samband mellan  $c_L$  och materialegenskaperna genom att ta fram en giltig rörelselag. Med givet förflyttningsfält blir komponenterna i töjningstensorn:

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \varepsilon \left( \frac{2\pi}{\ell} \right) \cos \frac{2\pi}{\ell} (x_1 - c_L t), \\ \epsilon_{22} &= \epsilon_{23} = \epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{33} = 0.\end{aligned}$$

Denna töjningstensor ger tre nollskilda komponenter i spänningstensorn:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon \left( \frac{2\pi}{\ell} \right) \cos \frac{2\pi}{\ell} (x_1 - c_L t), \\ \sigma_{22} &= \sigma_{33} = \lambda\epsilon_{11} = \lambda\varepsilon \left( \frac{2\pi}{\ell} \right) \cos \frac{2\pi}{\ell} (x_1 - c_L t).\end{aligned}$$

Rörelselagen (inga volymkrafter) är:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

vilket här ger:

$$-\rho_0 \varepsilon \left( \frac{2\pi}{\ell} \right)^2 c_L^2 \sin \frac{2\pi}{\ell} (x_1 - c_L t) = -(\lambda + 2\mu) \varepsilon \left( \frac{2\pi}{\ell} \right)^2 \sin \frac{2\pi}{\ell} (x_1 - c_L t)$$

så att:

$$c_L = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \right)^2$$

5. Strömningsproblem (7p)

N-S i  $x$ -riktningen:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

Antag: laminärt, inkompressibelt, Newtonsk fluid, stationärt, försumbar gravitation, fullt utvecklade strömning. I så fall:

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

Integrera två gånger + tillämpa randvillkor:  $v_x(y = +h) = 0$ ,  $v_x(y = -h) = 0$  för att bestämma integrationskonstanterna:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - h^2)$$

Hastigheten mitt mellan plattorna:

$$v_x(y = 0) = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx}$$

Bestäm  $\frac{dp}{dx}$  genom kunskap om väggskjuvspänningen:

$$\tau_w = -\mu \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=h} = -\frac{dp}{dx} h$$

dvs

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\tau_w}{h} = -1000 \text{ Pa/m}$$

så att:

$$v_x(y = 0) = 0.5 \text{ m/s}$$

(Kontroll ger  $Re_{2h} = 1000$  så antagande om laminär strömning stämmer)

6. Approximativa lösningar: solider (10p)

a) Givet är att:

$$\sigma(x) = \frac{fL}{A_0} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Stångens differentialekvation:

$$-\frac{d}{dx} \left[ EA \frac{du}{dx} \right] = f$$

Med  $\sigma = E\epsilon = E\frac{du}{dx}$  kan vi också skriva:

$$-\frac{d}{dx} [\sigma A] = f$$

Insättning:

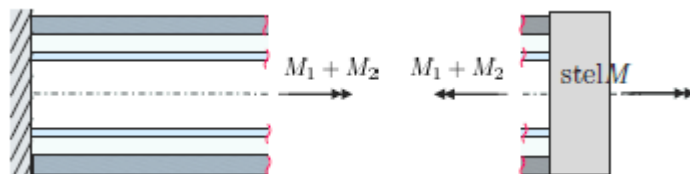
$$\frac{dA}{dx} + A \left( \frac{1}{x-L} \right) = \frac{A_0}{x-L}$$

Lösningen har formen:

$$A(x) = \frac{A_0x + C}{x-L}$$

där  $C$  bestäms ur randvillkoret  $A(0) = A_0 \rightarrow C = -A_0L$ . Således är svaret  $A(x) = A_0$  (konstant).

b) Frilägg + jmv:



$$-M_1 - M_2 + M = 0$$

De konstitutiva ekvationerna för axeldelarna ger:

$$M_1 = \frac{GK_{v,1}}{L}\varphi_1(L), M_2 = \frac{GK_{v,2}}{L}\varphi_2(L)$$

Rotationen måste dock vara lika för båda axeldelarna:

$$\varphi_1(L) = \varphi_2(L)$$

varför vi har:

$$M_1 = \frac{K_{v,1}}{K_{v,2}}M_2$$

som insatt i jmv ger:

$$M_1 = \frac{MK_{v,1}}{K_{v,1} + K_{v,2}}, M_2 = \frac{MK_{v,2}}{K_{v,1} + K_{v,2}}$$

Skivans rotation erhålles då som:

$$\varphi_1(L) = \frac{ML}{G(K_{v,1} + K_{v,2})}$$



7. Approximativa lösningar: fluider (7p)

- a) Bernoullis ekvation med förluster: kan inte påverka tryckskillnaden eller höjdskillnaden. Om uppströms hastighet (reservoar)  $\approx 0$  så ges hastighet (och därmed flöde ut ur duschmunstycket) av förlusterna  $\rightarrow$  öka förlusterna genom t ex intern strypning.
- b) Bernoullis ekvation utan förluster. Vattenytan:  $p \approx p_{atm}$ ,  $v \approx 0$ ,  $z = h$ . Utloppshålet:  $p \approx p_{atm}$ ,  $v$  sökt,  $z = 0$ . Lösning:  $v = \sqrt{2gh}$ . Vid fritt fall:  $x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}gt^2$ ,  $v(t) = v_0 + gt$ . Om  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$  så är droppen vid  $x = h = \frac{1}{2}gt^2$  vid  $t = \sqrt{2h/g}$ . Hastigheten är då  $v = g\sqrt{2h/g} = \sqrt{2gh}$ , V.S.V.
- c) Ekvationerna kan skrivas på dimensionslös form. För varje givet värde på de relevanta dimensionslösa talen finns bara en lösning. Denna lösning kan skalas till olika dimensionbärande motsvarigheter, men dess komplexitet och nivå av detaljrikedom är fix. Det går alltså inte att skala om problemet så att simuleringen blir mindre krävande. Det är den fysik som ekvationerna beskriver som sätter ribban för vilken upplösning som krävs.