



Tentamen MMS260 Kontinuummekanik

Tid: 24 augusti 2023 kl 14:00-18:00

Lärare: Henrik Ström (mobil: 070-40 25 119, kontor: 031-772 13 60)

Tillåtna hjälpmedel: Till tentamen får man medföra ett (dubbelssidigt) paper med egna anteckningar. Dessa anteckningar kan vara handskrivna eller datorskrivna, vilket som önskas. I övrigt är följande hjälpmedel tillåtna: penna, radergummi, linjal och ordbok (ej elektroniska ordböcker), samt miniräknare med tömt minne och matematisk handböcker (t ex Physics Handbook och/eller BETA). Räknare som används som hjälpmedel vid tentamen får inte ha trådlös anslutningsmöjlighet till internet. I formelsamlingar får endast indexeringar göras. Om det förekommer tryckfel i de tillåtna i hjälpmedlen får handskrivna rättelser finnas. Mobiltelefoner och elektronisk utrustning, som inte är godkända hjälpmedel, skall vara avstängda och får inte medföras till skrivplatsen.

Lärare besöker salen: ca kl 15:00 och kl 17:00

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

Rättning: Resultatet anslås senast den 14:e september 2023 i Canvas. Det kan också ses i Studentportalen och Ladok (eventuellt med viss fördröjning). Instruktioner för tentamensgranskning publiceras tillsammans med tentamensresultatet.

Betygsgränser: Poängantalet för korrekt besvarad/löst uppgift anges inom parentes (p). Betygsgränser för tentamen är:

Betyg U < 20p ; 20p ≤ Betyg 3 < 30p ; 30p ≤ Betyg 4 < 40p ; Betyg 5 ≥ 40p.

LYCKA TILL!

1. Grundläggande begrepp (5p)

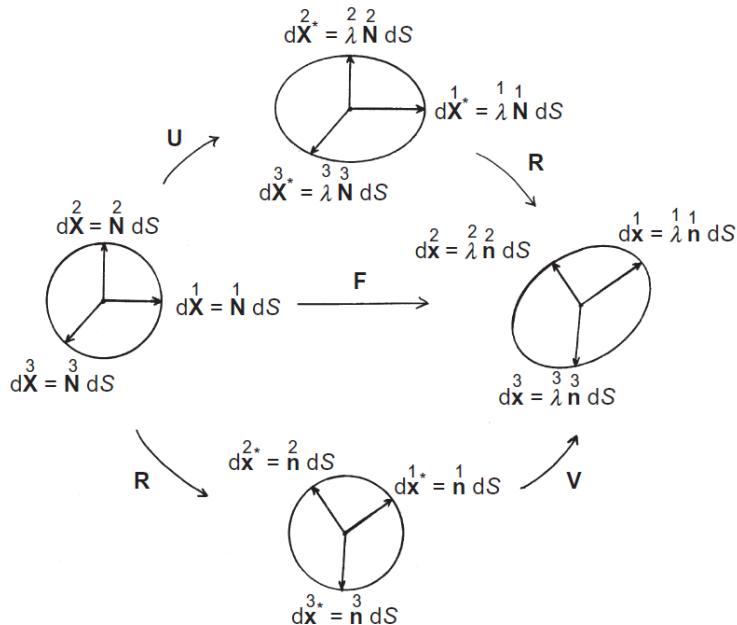
Identifiera (namnge) de grundläggande begrepp - ur listan i rutan på nästa sida - som beskrivs nedan i (a)-(g):

- a) Andra ordningens tensor som samlar alla de partiella derivatorna av hastighetskomponenterna med avseende på koordinatriktingarna
- b) Materialegenskap som karaktäriserar förhållandet mellan applicerad spänning vid ren sträckning eller kompression till den uppkomna töjningen för ett linjärt elastiskt material
- c) Spänningstensor som karaktäriserar nuvarande kraft per enhet deformerad area
- d) Den symmetriska delen av förflyttningsgradienttensorn
- e) Funktion som mappar en materialpartikels position i referenskonfigurationen till den position i den nuvarande konfigurationen där den för tillfället befinner sig

deformationsgradienttensorn, F
förflyttninggradienttensorn, H
vänstra Cauchy-Green deformationstensorn, B
högra Cauchy-Green deformationstensorn, C
styrhetstensorn, C
hastighetsgradienttensorn, L
symmetriska delen av hastighetsgradienttensorn, D
antisymmetriska delen av hastighetsgradienttensorn, W
materiederivatan, D/Dt
Eulerska töjningstensorn, e
Lagrangeska töjningstensorn, E
infinitesimala töjningstensorn, ϵ
Cauchys spänningstensor, σ
första Piola-Kirchoff spänningstensorn, P
andra Piola-Kirchoff spänningstensorn, S
hastighetsvektorn, v
förflyttningsvektorn, u
värmefluxvektorn, q
spänningstensorn, t
Cauchys högra töjningstensor, U
Cauchys vänstra töjningstensor, V
rotationstensorn, R
deformationsmappningen, χ
temperaturen, T
trycket, p
skjuvspänningstensorn, τ
dissipationsfunktionen, Φ
viskositeten, μ
densiteten, ρ
Youngs modul, E
Poissonration, ν
skjuvmodulen, G
värmekonduktiviteten, k
specifika värmekapaciteten (vid konstant tryck), c_p
bulkmodulen, κ

2. Teori (12p)

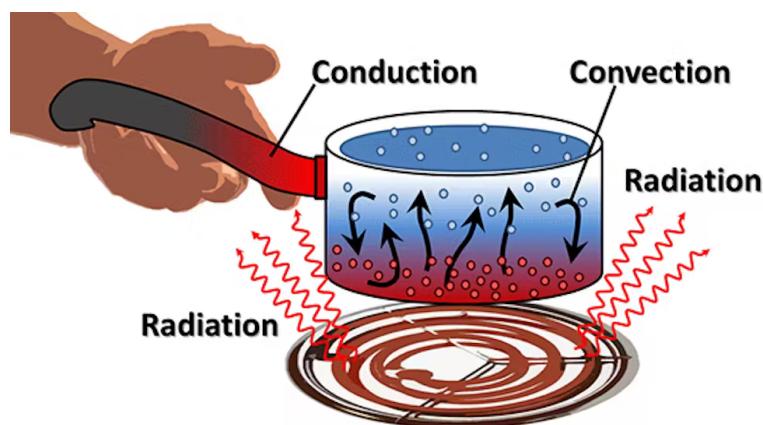
- a) En kub med sidan a deformeras så som beskrivs av ϵ i ett koordinatsystem där ϵ är en diagonal tensor (d v s ϵ_{11} , ϵ_{22} och ϵ_{33} utgör de huvudsakliga töjningarna). Efter deformationen har kuben blivit en kvasi-kub. Visa att $\frac{\Delta V}{V_0} = \text{tr } \epsilon$, där ΔV är volymförändringen i deformationen och V_0 kubens ursprungliga volym. Antag att deformationerna är små.
- b) Principen om polär uppdelning (*polar decomposition*) illustreras i nedanstående figur. Hur förhåller sig de huvudsakliga töjningarna i den övre vägen ($\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$) och den nedre ($\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$) till varandra? Hur förhåller sig riktningarna för de huvudsakliga töjningarna till varandra? Vad blir \mathbf{U} respektive \mathbf{V} i ett fall med ren rotation?



- c) Turbulens har ett antal karakteristiska egenskaper, varav en brukar sammanfattas med orden *oregelbundenhet, kaos och/eller oförutsägbarhet*. Detta till trots är Navier-Stokes ekvationer deterministiska. Förklara detta till synes motsägelsefulla faktum! Det finns en nedre gräns för

hur små de minsta turbulentna virvlarna kan bli i ett givet flöde. Vart tar den turbulentna rörelseenergin från de minsta virvlarna vägen när de försätts?

- d) Spänningar i ett material kan orsakas av *externa* (utifrån kommande eller på avstånd verkande) krafter eller *interna* krafter. Klassiska exempel på externa krafter är gravitationskraften och tryckkrafter på externa materialytor. Visa för den lokala formen av rörelsemängdsbalansen för den nuvarande konfigurationen var dessa två exemplen på externa krafter kommer in om man ska lösa ett givet problem.
- e) Om man vill lösa rörelselagarna för en Newtonsk fluid som strömmar inkompresibelt måste man känna till värdet på två fluidegenskaper – vilka? Svara med deras namn (inte enbart grekiska variabelbeteckningar). En av dessa egenskaper karakteriseras intern friktion i fluiden. Denna egenskap har *olika* temperaturberoende hos gaser och vätskor: den ökar med ökande temperatur hos gaser och minskar med ökande temperatur hos vätskor. Varför?
- f) Bilden nedan illustrerar de tre värmeförtransemekanismerna konduktion/värmeledning (conduction), konvektion (convection) och strålning (radiation) i en situation där en person håller en kastrull med kokande vatten i handen. Vad är skillnaden mellan konduktion och konvektion vad gäller partiklarnas rörelse? Vilken av dessa två transportmekanismer är normalt sett mest effektiv (transporterar mest värme per tidsenhet)?



3. Spänning- och töjningstillstånd (4p)

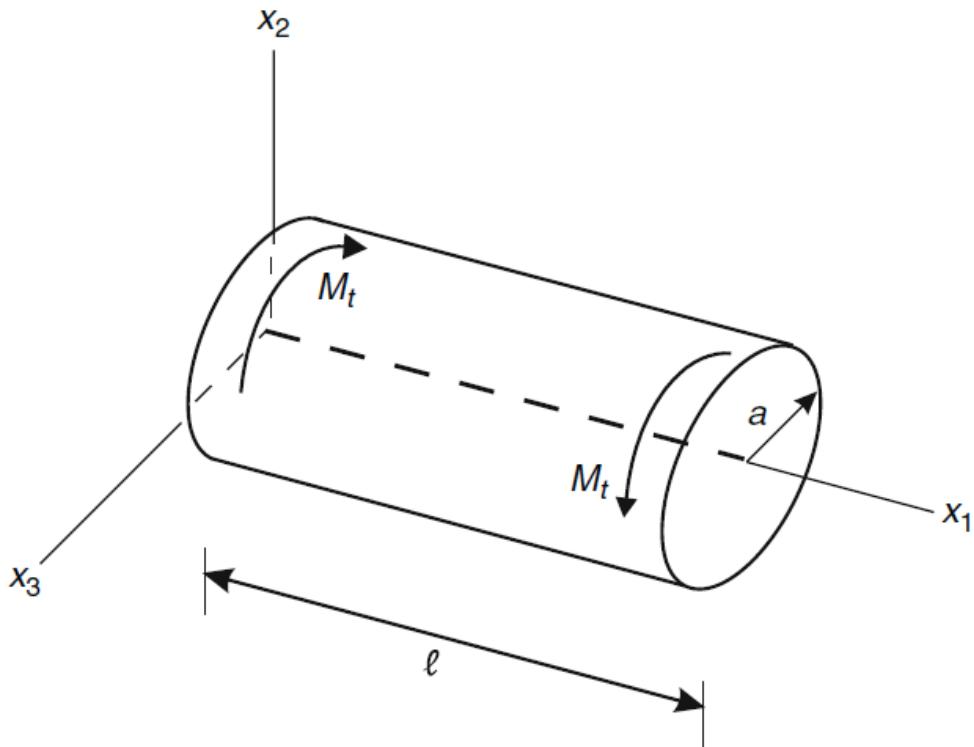
Spänningstensorn σ i ett (x_1, x_2, x_3) -system har följande utseende i en punkt P i den deformerade kroppen:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Bestäm spänningsvektorn $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}})$ i P på ett plan som passerar genom punkten parallellt med planet $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$.

4. Elasticitetsproblem (5p)

En cylindrisk stång av cirkulärt tvärsnitt belastas av lika stora och motrikta vridmoment M_t vid dess ändar (se figur). Materialt kan beskrivas som en linjär elastisk isotrop solid. Mantelytan är spänningsfri och inga volymkrafter är aktiva. Cylindern sträcker sig från $x_1 = 0$ till $x_1 = \ell$.



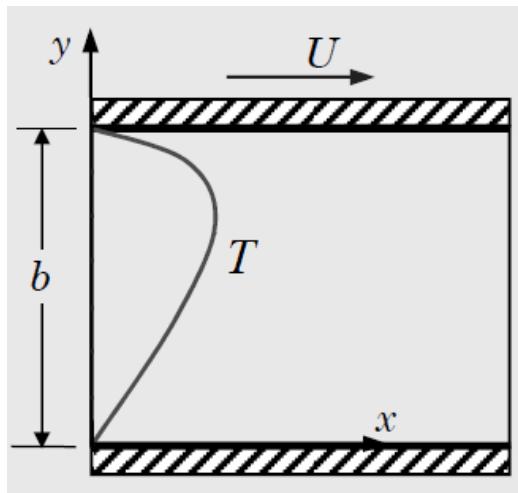
På grund av rotationssymmetrin i problembeskrivningen är det rimligt att anta att förflyttningsfältet kan beskrivas som $u_1 = 0$, $u_2 = -\alpha x_3$, $u_3 = \alpha x_2$. I dessa uttryck tillåter vi att rotationsvinkelns $\alpha = \alpha(x_1, t)$.

Ta fram den differentialekvation som α måste uppfylla för att den beskrivna rörelsen ska vara möjlig.

5. Strömningsproblem (7p)

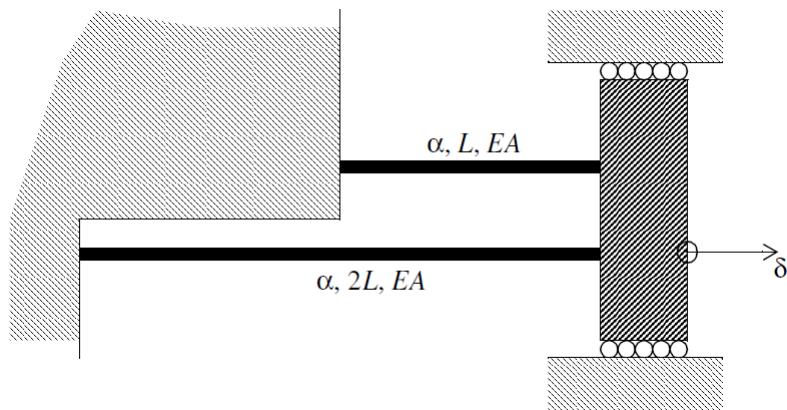
Betrakta fullt utvecklad, inkompressibel och stationär strömning mellan två parallella oändliga plattnor. Strömningen drivs av att den övre plattan rör sig med hastighet U och tryckgradienten är identisk med noll. Den övre plattan hålls vid temperatur T_1 medan den nedre plattan hålls vid en annan temperatur T_0 . Det finns ingen värmekälla i fluiden men ändå en viss påverkan på temperaturfältet av dissipation från strömningen. Temperaturprofilen är fullt utvecklad. Temperaturvariationen är så pass liten att hastighetsfältet kan antas vara identiskt med det som erhålls vid isoterma betingelser.

Utgå från Navier-Stokes ekvationer och ta fram ett uttryck för hastighetsfältet. Använd sedan detta för att ta fram ett uttryck för temperaturprofilen från en energibalans.

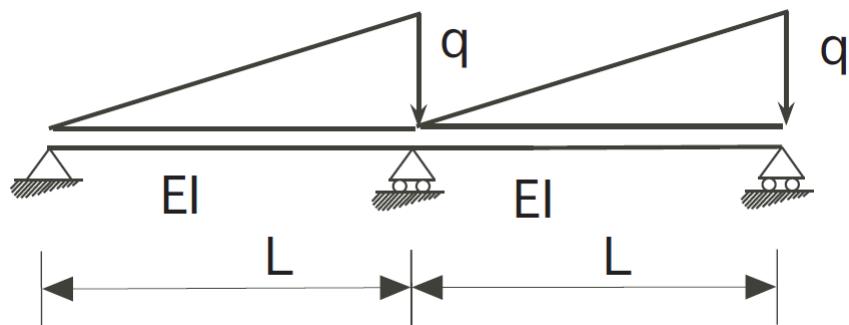


6. Approximativa lösningar: solider (10p)

- a) En ventil är lagrad så att den endast kan röra sig horisontellt. Den är infäst med två stänger som har längderna L respektive $2L$. Båda stängerna har tvärsnittsyta A och är tillverkade av ett linjärt elastiskt material med elasticitetsmodul E och termisk längdutvidgningskoefficient α . Beräkna ventilens förskjutning δ , då båda stängerna ges en temperaturhöjning ΔT . Deformationer i grunden och hos ventilen kan försummas. (5p)



- b) En balk med böjstyrhet EI och längd $2L$ är lagrad enligt figur nedan. Balken belastas med de triangulärt fördelade lasterna med lastintensitet varierande från noll till q (N/m) i de båda balkspannen enligt figuren. Bestäm stödreaktionerna i samtliga stöd. (5p)



7. Approximativa lösningar: fluider (7p)

- a) En fluid strömmar genom ett rör. Strömningen drivs av tryckskillnaden mellan rörets bägge ändar. En ingenjör vill sänka flödet genom röret, men kan tyvärr inte direkt påverka tryckskillnaden som driver flödet. Finns det något hen kan göra med själva röret? Motivera ditt svar. (2p)
- b) Tre likadana glas står bredvid varandra på ett bord. Ett är fyllt med endast vatten ($\rho = 1,000 \text{ kg/m}^3$), det andra är till hälften fyllt med vatten och till resterande del med kvicksilver ($\rho = 13,500 \text{ kg/m}^3$), och det sista är till hälften fyllt med vatten och till resterande del med matolja ($\rho = 900 \text{ kg/m}^3$). I vilket glas är det högst tryck på botten och i vilket är det lägst? Är trycket mitt i glaset detsamma i alla glas? Motivera ditt svar. (2p)
- c) För en fallskärm med en diameter $D = 16.8 \text{ m}$ uppmäts en formmotståndskraft orsakad av den omströmmande luften på $F = 4226 \text{ N}$ i ett vindtunnelexperiment där lufthastigheten var $V = 5.36 \text{ m/s}$. I vindtunneln används luft av rumstemperatur och atmosfärtryck, så att $\rho = 1.20 \text{ kg/m}^3$ och $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$. Givet att $F = C_D \rho V^2 D^2$, där C_D är den dimensionslösa formmotståndskoefficienten, bestäm vid vilken hastighet man lämpligen testar en mindre modellfallsfärm med diamentern $d = 1.7 \text{ m}$ för att få relevanta resultat. Vilken formmotståndskraft (i Newton) förväntar du dig att man då kommer att uppmäta? (3p)

Formelsamling

Matematik

s är skalär, \mathbf{v} är vektor, \mathbf{A} är andra ordningens tensor

Jacobis formel

$$\frac{d}{d\tau} \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \operatorname{tr} \left[\frac{d\mathbf{A}}{d\tau} \mathbf{A}^{-1} \right]$$

Symmetriska och antisymmetriska tensorer

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^S + \mathbf{A}^A = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

\mathbf{A}^S symmetrisk: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, $A_{ij} = A_{ji}$

\mathbf{A}^A anti-symmetrisk: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, $A_{ij} = -A_{ji}$, $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$

Deviatorisk (avvikande) tensor

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{I}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A}' = 0$$

Identitetstensor

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}$$

Divergensteoremet

$$\int_{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \int_{\partial\kappa} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$$

Kinematik

Definitioner

$$\mathbf{X} = \chi_0(M), \mathbf{x} = \chi_t(M), \mathbf{x} = \chi_t(\mathbf{X})$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \chi_t(M)}{\partial t}, \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}(M, t)}{\partial t}$$

$$\phi = \check{\phi}(M, t) = \hat{\phi}(\mathbf{X}, t) = \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)$$

Materiederivatan och hastighetsgradienten

$$\frac{D\phi}{Dt} = \begin{cases} \frac{\partial \check{\phi}(M, t)}{\partial t} |_{M = \text{fix}} \\ \frac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} |_{\mathbf{x} = \text{fix}} \\ \frac{\partial \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \tilde{\phi} \cdot \mathbf{v} \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

$$\text{tr } \mathbf{L} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$$

Förflyttning och deformation

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \chi_t(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$$

Mappning mellan referenskonfigurationen och nuvarande konfigurationen

$$J = \det \mathbf{F} = |\mathbf{F}|$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

$$da \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}^\# \, dA \cdot \hat{\mathbf{N}} = J \, \mathbf{F}^{-\text{T}} \cdot dA \, \hat{\mathbf{N}}$$

$$dv=JdV$$

$$T\ddot{o}jning$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}=\mathbf{V}\cdot\mathbf{R}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^{\text{T}} \cdot \mathbf{F}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\text{T}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})$$

Spänningar

Spänningsvektorer

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}})}{\Delta a}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{nn} + \mathbf{t}_{ns} = (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{t} \times \hat{\mathbf{n}})$$

$$\mathbf{t}_{nn} = (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}, \, t_{nn} = \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}} = t_i n_i = \sigma_{ij} n_i n_j$$

$$\mathbf{t}_{ns} = \mathbf{t} - \mathbf{t}_{nn}, \, |\mathbf{t}_{ns}| = t_{ns} = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - t_{nn}^2}$$

$$(t_{ns})_{\max} = \frac{1}{2} (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

Cauchys lemma

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\hat{\mathbf{n}}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \hat{\mathbf{n}})$$

Cauchys spänningssformel

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

Cauchys spänningstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$I_1 = \text{tr } [\sigma] = \sigma_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr } [\sigma])^2 - \text{tr } ([\sigma]^2)] = \frac{1}{2} (\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji})$$

$$I_3 = |\sigma|$$

Piola-Kirchoffs spänningstensorer

$$\mathbf{T} dA = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} dA = \mathbf{t} da = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T$$

$$d\mathcal{F} = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \mathbf{F}^T$$

Mekaniklagar

Massa

$$m = \int_{\mathcal{B}} dm = \int_{\kappa_0} \rho_0 dV = \int_{\kappa} \rho dv$$

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

$$\rho_0 = \rho J$$

Massbalans - integral form för referenskonfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \rho_0 dV = 0$$

Massbalans - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho dv = 0$$

Massbalans - lokal form för referenskonfigurationen

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$$

Massbalans - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho F \, dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\kappa} \rho F \, dv + \int_{\partial\kappa} \rho F \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$$

Rörelsemängd

$$\mathcal{P} = \int_{\mathcal{B}} d\mathcal{P} = \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} \, dv$$

$$\mathcal{H}^o = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_o \times d\mathcal{P} = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} \, dv$$

$$\frac{D\mathcal{P}}{Dt} = \mathbf{F}$$

$$\frac{D\mathcal{H}^o}{Dt} = \mathbf{M}^o$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \, da$$

$$\mathbf{M}^o = \mathbf{M}_B^o + \mathbf{M}_S^o = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, da$$

Rörelsemängdsbalanser - integral form för referenskonfigurationen

$$\int_{\kappa_0} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = \int_{\kappa_0} \rho_0 \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dA$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dV = \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, dA$$

Rörelsemängdsbalanser - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \, da$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dv = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, da$$

Rörelsemängdsbalanser - lokal form för referenskonfigurationen

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^T$$

Rörelsemängdsbalanser - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$$

Energi

$$\frac{D}{Dt} (K + U) = W + Q_h$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv, \quad U = \int_{\kappa} e \, dv$$

$$W = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da, \quad Q_h = - \int_{\partial\kappa} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q} da + \int_{\kappa} \rho r_h dv$$

Energibalans - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\int_{\kappa} \left(\rho \frac{De}{Dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r_h \right) dv = 0$$

Energibalans - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\rho \frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r_h$$

Konstitutiva samband

Generalisering av Hookes lag till 3D

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\{\sigma\} = [\mathbb{C}] \{\epsilon\}, \{\epsilon\} = [S] \{\sigma\}, \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S} = \mathbb{C}^{-1}$$

Isotrop elastisk solid

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} = \kappa \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, 2\mu + \lambda = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\kappa = \lambda + 2\mu/3$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}}$$

Newtonsk fluid, inkompressibel strömning

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]$$

$$\tau \propto \frac{d\theta}{dt} = \frac{dv_x}{dy}, \quad \tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

Oviskös eller stillastående fluid, alternativt rotationsfri strömning

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I}$$

Fouriers lag

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla T \text{ (anisotrop medium)}$$

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \text{ (isotrop medium)}$$

Linjäriserade elasticitetsproblem

Linjäriserade beskrivningen

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\mathbf{e} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{X}, \quad \rho_0 \approx \rho$$

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{P} \approx \mathbf{S}$$

Töjning-förflyttning

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Rörelselagar

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho_0 f_x = \rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho_0 f_y = \rho_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho_0 f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho_0 f_r = \rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\theta r} - \sigma_{r\theta}}{r} + \rho_0 f_\theta = \rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho_0 + f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

Kompatibilitet

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\epsilon})^T = \mathbf{0}$$

Lamé-Naviers ekvationer

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

Michells ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \nabla [\nabla (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})] = -\frac{\nu \rho_0}{1-\nu} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{I} - \rho_0 [\nabla \mathbf{f} + (\nabla \mathbf{f})^T]$$

Beltramis ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \nabla [\nabla (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})] = \mathbf{0}$$

Plantöjningsproblem - jämvikt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

Planspänningssproblem - jämvikt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

Strömningsproblem

Inkompressibel strömning, Newtonsk fluid

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{f} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y = \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\
& \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\
& \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_r \\
& = \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
& \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f_\theta \\
& = \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\
& \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z \\
& = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

Hydrostatik

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

Värmtransportproblem

$$\begin{aligned}
\rho c_p \frac{DT}{Dt} &= \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho r_h \\
\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \Phi + \rho r_h
\end{aligned}$$

1D-problem

$$\begin{aligned}
& \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2} + gz \right)_{\text{out}} (\rho Q)_{\text{out}} - \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2} + gz \right)_{\text{in}} (\rho Q)_{\text{in}} \\
& = W_{\text{shaft}} + H_{\text{net}}
\end{aligned}$$

Dissipation, Newtonsk fluid

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \Phi$$

$$\begin{aligned}\Phi &= 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &\quad + \mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

Boussinesq approximation

$$\rho = \rho_0 - \beta \rho_0 (T - T_0)$$

Termisk expansion

$$\epsilon^{\text{term}} = \alpha \Delta T$$

$$\epsilon = \epsilon^{\text{mek}} + \epsilon^{\text{term}} = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

Approximativa lösningar: solider

Stång

$$N = P, \bar{\epsilon} = \delta/L, \sigma = E\bar{\epsilon}, N = \sigma A$$

$$\begin{bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}$$

Stångens differentialekvation

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{du}{dx}, \sigma = E \frac{du}{dx}, N = EA \frac{du}{dx} \\ -\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) &= K_x A\end{aligned}$$

Axel

$$\tau = G\gamma = \frac{M_v}{K_v} r, \gamma = \frac{r}{L} (\varphi(L) - \varphi(0)) = \frac{r}{L} (\varphi_2^e - \varphi_1^e)$$

$$\begin{bmatrix} M_1^e \\ M_2^e \end{bmatrix} = \frac{GK_v}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^e \\ \varphi_2^e \end{bmatrix}$$

$K_v = 2\pi r^3 h$ (tunnväggigt tvärsnitt)

$K_v = \pi(b^4 - a^4)/2$ (tjockväggigt tvärslott)

Axelns differentialekvation

$$\frac{d}{dx} \left(GK_v \frac{d\varphi}{dx} \right) + q_v = 0$$

Balk

$$\frac{dN}{dx} + K_x A = 0, \frac{dT}{dx} + q = 0, \frac{dM}{dx} = T, \frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0$$

$$\alpha = \frac{dw}{dx}, \epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{d^2 w}{dx^2} z, \sigma_x = E \epsilon_x = -E \frac{d^2 w}{dx^2} z, M = -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

Balkens differentialekvation (Elastiska linjens ekvation)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = q(x)$$

Approximativa lösningar: flöider

Bernoullis ekvation

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{constant (utan förluster)}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_f \text{ (med förluster)}$$

Turbulens

Kolmogorovs skalar

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}, \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}, u_\eta = (\nu \varepsilon)^{1/4}$$

Reynoldsdekomponering

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}', p = \bar{p} + p'$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} dt = \langle \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} \rangle = \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}} = 0$$

Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) ekvationer

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0$$

$$\nabla \cdot (-\bar{p} \mathbf{I} + 2\mu \bar{\mathbf{D}} - \rho \langle \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' \rangle) = \rho \frac{D \bar{\mathbf{v}}}{Dt}$$

1. a) \perp d) \in
 b) E e) χ
 c) \odot

$$2. \text{ a) } \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{a(1+\epsilon_{11}) \cdot a(1+\epsilon_{22}) \cdot a(1+\epsilon_{33}) - a^3}{a^3} =$$

$$= \frac{(1+\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} + \epsilon_{11}\epsilon_{22} + \epsilon_{11}\epsilon_{33} + \epsilon_{22}\epsilon_{33})a^3 - a^3}{a^3} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{antag små deformationer} \\ \epsilon_{11} \gg \epsilon_{11}\epsilon_{22} \gg \epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33} \end{array} \right\} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \text{tr } \underline{\epsilon}$$

- b) De huvudsakliga fäjningarna är desamma oavsett vinkel
 Riktningarna skiljer sig genom rotationen R
 Ren rotation = ansknad av deformation $\rightarrow \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{I}}$

- c) Elevationerna är deterministiska, men i praktiken gör de idé-linjära termerna att lösningen blir otroligt känslig för små variationer i initial- och randvärden (Jfr "the butterfly effect") \rightarrow hur turbulensen manifesterar sig i detalj; ett enskilt fall är därför i praktisk mening oförutsebart
 När de minsta turbulentta rörelserna försvinner (bromsas upp av sticka kraftar) dissiperas energin till värme

d) $\nabla \cdot \underline{\sigma} + g \underline{\hat{b}} = \rho \frac{D\underline{v}}{Dt}$
 \uparrow
 gravitativ kraften kommer in här i volymkrafterna

tryckkrafter på externa materialytter levererar in som randvärden (frestörna värden på $\underline{\sigma}$ på randen)

- e) ρ - densitet
 μ - viskositet \leftarrow viskositeten är intern friktion i fluiden

rörelsemängdstransport i gaser medieras av molekyl/kollisioner \rightarrow högre T = fler kollisioner per tidsenhet
 $\rightarrow \mu$ ökar med T
 \rightarrow μ växlar med T
 \rightarrow i vätskor medieras av attraktiva interaktioner när molekylene passerar varandra \rightarrow högre T = molekylene är sig snabbare och interagen är mindre $\rightarrow \mu$ minskar med T

- f) Skillnaden mellan konvektion och konduktion är förekomsten av makroskopisk rörelse i kontinuit (konvektion = finns medelhastighet som är $\neq 0$
 konduktion = orsakas av slumpvis rörelse utan medelhastning)
- Konvektion är mycket mer effektiv transportmekanism än enbart konduktion

3.

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Sökt: $\underline{\tau}(\hat{n})$ som är på ett plan som passerar genom P parallellt med $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$

$$\text{Vi har att } \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{14}} (2\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + \hat{e}_3)$$

$$\text{samt } \underline{\tau}(\hat{n}) = \underline{\sigma} \cdot \hat{n} \quad (\text{Cauchys spänningssformel})$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{Bmatrix} 12 \\ 8 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\text{dvs } \underline{\tau}(\hat{n}) = \frac{1}{\sqrt{14}} (12\hat{e}_1 + 8\hat{e}_2 - \hat{e}_3) \text{ MPa}$$

4.

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = -\alpha x_3 \\ u_3 = \alpha x_2 \end{cases}$$

Vi söker PDEs som $\alpha(x_i, t)$ måste uppfylla
 - dessa kommer att erhållas ur de aktuella rörelselagarna!

(utan vektorkrafter aldrig har vi att

$$\nabla \cdot \underline{\sigma} + \cancel{\underline{\sigma} \cdot \dot{\underline{u}}} = f_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\text{där } \underline{\sigma} = 2\mu \underline{\epsilon} + \lambda \text{tr} \underline{\epsilon} \underline{I}$$

$$\text{och } \underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Med givet \underline{u} är de enda nollställda komponenterna i $\underline{\epsilon}$:

(3)

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = -\frac{1}{2} x_3 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}$$

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{31} = \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}$$

Av detta följer att den nollställda komponenten i σ är:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = -\mu x_3 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu x_2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}$$

Rörelselagen innehåller tre ekvationer (en i varje koordinatsystem):

$$x_1: \quad 0 = 0$$

$$x_2: \quad -\mu x_3 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} = -g_0 x_3 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu}{g_0} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

$$x_3: \quad \mu x_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} = g_0 x_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu}{g_0} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

} samma
ekvation

Den sökta diff.ekv. är:

$$\boxed{\frac{\mu}{g_0} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}}$$

5. Vi söker först hastighetsfältet från N-S.

(4)

Antag fullt utvecklad strömning; $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$; $g_x = 0$

Anslätt $v_y = v_z = 0$ och $v_x = v_x(y)$

Antag laminär strömning! + stationärt

I sät fall:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + g_{fx} = \cancel{g} \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

$$\text{dvs } \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \rightarrow v_x(y) = C_1 y + C_2$$

$$v_x(y=0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$v_x(y=b) = U \rightarrow C_1 = \frac{U}{b}$$

$$\rightarrow v_x(y) = \frac{Uy}{b}$$

Nu energibalans för T (obs! dissipation ej försäkrar enligt uppgift)

$$\begin{aligned} \cancel{g}_{cp} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + g_{fh} + \\ &+ 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Med hastighetsfält enligt ovan och ansett $T = T(y)$:
(+ tidigare antagnanden)
+ ingen värmeförståning

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad ; \quad \text{från ovan: } \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{U}{b}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = - \frac{\mu U^2}{kb^2}$$

$$\rightarrow T(y) = - \frac{\mu U^2}{kb^2} \frac{y^2}{2} + A y + B$$

$$T(y=0) = T_0 \rightarrow B = T_0$$

$$T(y=b) = T_1 \rightarrow A = \frac{T_1 - T_0}{b} + \frac{\mu U^2}{2kb}$$

(5)

$$\rightarrow T(y) = \left(\frac{y}{b} + \frac{\mu_0^2}{2k(T_1 - T_0)} \frac{y}{b} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \right) (T_1 - T_0) + T_0$$

b. a) jmv: $N_1 + N_2 = 0$

Sölt: ventilen förhållning

övre stängen: $\delta_1 = \frac{N_1 L}{EA} + \alpha L \Delta T$

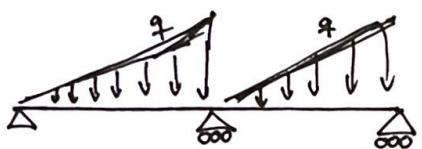
ur $\begin{cases} \delta = \epsilon L \\ \epsilon = \epsilon^{\text{mek}} + \epsilon^{\text{term}} \\ \epsilon^{\text{mek}} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA} \end{cases}$

undre stängen: $\delta_2 = \frac{N_2 2L}{EA} + \alpha 2L \Delta T$

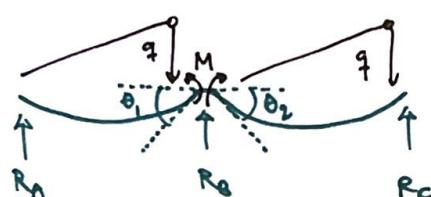
$$\delta_1 = \delta_2 = \delta$$

Lös ut: $\delta = \frac{4\alpha L \Delta T}{3}$

b)



Sölt: stödreaktionerna (R_A, R_B, R_C)



vertikal jmv: $R_A + R_B + R_C = 2 \frac{qL}{2}$

momentjmv B

vänster del: $R_A L - \frac{qL}{2} \frac{L}{3} - M = 0$

momentjmv B

höger del: $\frac{qL}{2} \frac{2L}{3} + M - R_C L = 0$

M är okänd \rightarrow vi behöver ett samband till

kan t ex vara att $\Theta_1 = -\Theta_2$ (vinkelama "mots" vid 8); $\Theta = \frac{dw}{dx}$; $M = -EI \frac{d^2w}{dx^2}$

i detta fall:

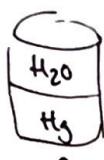
$$\begin{cases} \Theta_1 = \frac{ML}{3EI} + \frac{qL^3}{45EI} \\ \Theta_2 = \frac{ML}{3EI} + \frac{7qL^3}{360EI} \end{cases} \rightarrow \frac{2M}{3} + \frac{qL^2}{45} + \frac{7qL^2}{360} = 0 \rightarrow M = -\frac{qL^2}{16}$$

så att $R_A = \frac{5qL}{48}$, $R_B = \frac{5qL}{8}$, $R_C = \frac{13qL}{48}$

7. a) Många saker... sätta in något form av motstånd (exvis ventil, helt eller delvis blockerat röret) eller justera höjdskillnaden om möjligt

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_f$$

b)



Den fluid som har lägst densitet hamnar överst
Trycket ökar nedt $\frac{\partial p}{\partial x_1} = -\rho g$

Högst tryck på botten \rightarrow där medeldensitet är högst = glas 2

Lägst tryck på botten \rightarrow där medeldensitet är lägst = glas 3

Är trycket mitt i glasen detsamma? Nej! Samma i glas 1 och 2 men lägre i glas 3

c)

Relevanta resultat \rightarrow vill uppfylla dynamisk likhet \rightarrow hell Re konstant!

$$\begin{cases} Re_1 = \frac{\rho U D}{\mu} \\ Re_2 = \frac{\rho u d}{\mu} \end{cases} \quad Re_1 = Re_2 \rightarrow \underline{\underline{u = 52.9 \text{ m/s}}} \\ = 6 \cdot 10^6$$

Vad blir F ? Re konstant $\leftrightarrow C_D$ konstant

$$C_D = \frac{F_1}{\rho v^2 D^2} = 0.436 \rightarrow \underline{\underline{F_2 = 4226 \text{ N}}}$$

(Samma som för stora fallskärmen!)
 \rightarrow ty $UD = \text{nd}$ om Re konstant
och ρ, μ samma