



Tentamen MMS260 Kontinuummekanik

Tid: 2 juni 2023 kl 08:30-12:30

Lärare: Henrik Ström (mobil: 070-40 25 119, kontor: 031-772 13 60)

Tillåtna hjälpmedel: Till tentamen får man medföra ett (dubbelssidigt) paper med egna anteckningar. Dessa anteckningar kan vara handskrivna eller datorskrivna, vilket som önskas. I övrigt är följande hjälpmedel tillåtna: penna, radergummi, linjal och ordbok (ej elektroniska ordböcker), samt miniräknare med tömt minne och matematisk handböcker (t ex Physics Handbook och/eller BETA). Räknare som används som hjälpmedel vid tentamen får inte ha trådlös anslutningsmöjlighet till internet. I formelsamlingar får endast indexeringar göras. Om det förekommer tryckfel i de tillåtna i hjälpmedlen får handskrivna rättelser finnas. Mobiltelefoner och elektronisk utrustning, som inte är godkända hjälpmedel, skall vara avstängda och får inte medföras till skrivplatsen.

Lärare besöker salen: ca kl 09:30 och kl 11:30

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

Rättning: Resultatet anslås senast den 23:e juni 2023 i Canvas. Det kan också ses i Studentportalen och Ladok (eventuellt med viss födröjning). Instruktioner för tentamensgranskning publiceras tillsammans med tentamensresultatet.

Betygsgränser: Poängantalet för korrekt besvarad/löst uppgift anges inom parentes (p). Betygsgränser för tentamen är:

Betyg U < 20p ; 20p ≤ Betyg 3 < 30p ; 30p ≤ Betyg 4 < 40p ; Betyg 5 ≥ 40p.

LYCKA TILL!

1. Grundläggande begrepp (5p)

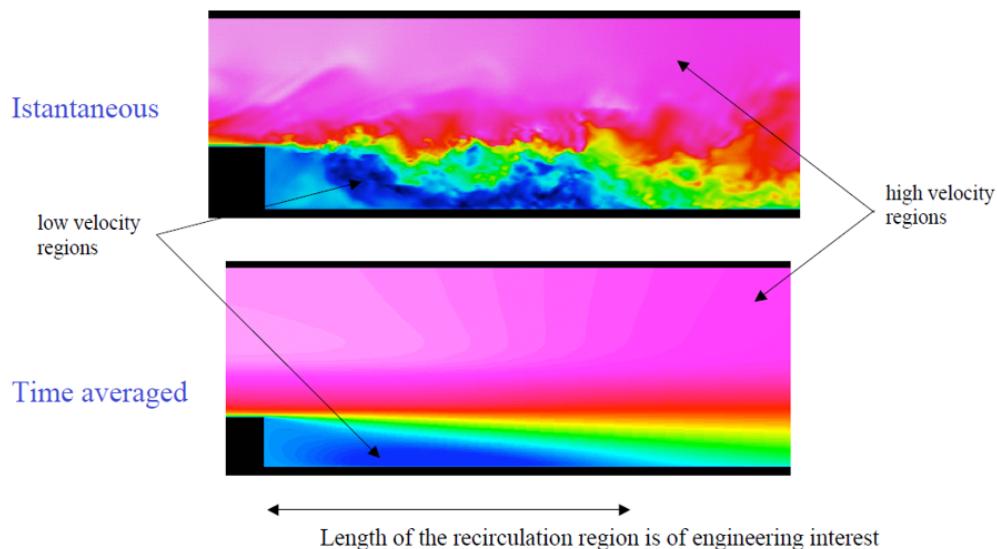
Identifiera (namnge) de grundläggande begrepp - ur listan i rutan på nästa sida - som beskrivs nedan i (a)-(g):

- a) Tensor som karakteriseras deformationshastigheten i flider och används i materialmodeller för att bestämma skjuvspänningarna
- b) Tidsderivata för en given (fix) materialpartikel
- c) Spänningstensor som karakteriseras nuvarande kraft per enhet odefomerad area
- d) Tensor som karakteriseras rotationen som behövs för att överföra ett materiallinjelement från referenskonfigurationen till den nuvarande konfigurationen om deformationen dekomponeras i en ren töjning och en ren rotation
- e) Materialegenskap som karakteriseras tendensen till deformation i de riktningar som är vinkelräta mot en pålagd belastning (t ex tvärsnittets tendens till deformation vid belastning i längdrikningen)

deformationsgradienttensorn, F
förflyttningstensorn, H
vänstra Cauchy-Green deformationstensorn, B
högra Cauchy-Green deformationstensorn, C
styrhetstensorn, C
hastighetsgradienttensorn, L
symmetriska delen av hastighetsgradienttensorn, D
antisymmetriska delen av hastighetsgradienttensorn, W
materiederivatan, D/Dt
Eulerska töjningstensorn, e
Lagrangeska töjningstensorn, E
infinitesimala töjningstensorn, ϵ
Cauchys spänningstensor, σ
första Piola-Kirchoff spänningstensorn, P
andra Piola-Kirchoff spänningstensorn, S
hastighetsvektorn, v
förflyttningsvektorn, u
värmefluxvektorn, q
spänningstensorn, t
Cauchys högra töjningstensor, U
Cauchys vänstra töjningstensor, V
rotationstensorn, R
deformationsmappningen, χ
temperaturen, T
trycket, p
skjuvspänningstensorn, τ
dissipationsfunktionen, Φ
viskositeten, μ
densiteten, ρ
Youngs modul, E
Poissonration, ν
skjuvmodulen, G
värmekonduktiviteten, k
specifika värmekapaciteten (vid konstant tryck), c_p
bulkmodulen, κ

2. Teori (12p)

- a) Om vi definierar $\lambda = \sqrt{\mathbf{M} \cdot \mathbf{C}\mathbf{M}}$, där \mathbf{C} är den högra Cauchy-Green deformationstensorn och \mathbf{M} är en enhetsvektor i referenskonfigurationen, vad representerar då λ ? (\mathbf{M} utgår från samma punkt \mathbf{X} i vilken man bestämt \mathbf{C}).
- b) Figuren nedan illustrerar magnituden av hastighetsvektorn \mathbf{v} i ett turbulent flöde över ett så kallat *backward-facing step*. Fluiden strömmar från vänster till höger i bild, och de svarta områdena representerar solida väggar. Tidigt till vänster i bild syns en plötslig ökning av den tillgängliga tvärsnittsarean för flödet, vilket skapar en recirkulationsregion (blåa området). Den övre panelen illustrerar en ögonblicksbild och den nedre en tidsmedelvärderad bild. Reynoldsdekomponering innebär att hastigheten i ett turbulent flöde \mathbf{v} delas upp som $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$. Förklara vilken variabel som illustreras i vilken panel (av \mathbf{v} , $\bar{\mathbf{v}}$ eller \mathbf{v}')! Ge också förslag på vilka ekvationer man kan lösa för att erhålla fälten som illustreras i de två panelerna.



- c) Utgå från principen om masskonservering (att massan av ett givet system inte kan skapas eller förstöras) och visa att $\frac{D}{Dt}(\rho J) = 0$, där $J = |\mathbf{F}|$ och volymmappningen mellan referenskonfigurationen och den nuvarande konfigurationen kan beskrivas som $dv = JdV$ (\mathbf{F} är deformationsgradienttensorn).
- d) Vad innebär den så kallade *superpositionsprincipen* i den linjäriserade beskrivningen av en elastisk solid? Varför kan den inte tillämpas för turbulent strömning?
- e) Styvhettstensorn \mathbb{C} innehåller 81 skalära komponenter. I verkligheten är dock som mest 21 av dessa oberoende - varför? En ingenjör utför materialprovning av ett riktningsoberoende (isotrop) material och ett kompositmaterial med fibrer som alla ligger i samma riktning. Hur många oberoende komponenter har det isotropa materialet i \mathbb{C} ? Har kompositmaterialet fler eller färre oberoende komponenter?
- f) I fluider finns ofta starka kopplingar mellan värmtransporten och strömningen som gör problemen svåra att analysera analytiskt. Förklara (genom hänvisning till energi- och rörelsemängdsbalanserna för en fluid) hur hastighetsfältet påverkar temperaturfältet och vice versa.

3. Spänning- och töjningstillstånd (4p)

Spänningstensorn σ i ett (x_1, x_2, x_3) -system har följande utseende:

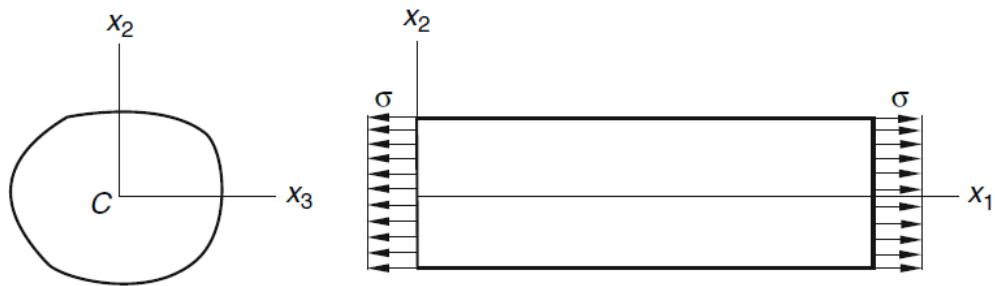
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Identifiera de huvudsakliga spänningarna, det plan som är associerat med den maximala huvudsakliga spänningen samt den maximala skjuvspänningen.

Ledning: För tensorn σ definierad ovan gäller (med godtagbar numerisk noggrannhet) att invarianterna $I_1 = \text{tr } \sigma = 2$, $I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr } \sigma)^2 - \text{tr} (\sigma^2)] = -17$, och $I_3 = |\sigma| = -34$, samt att egenvärdena är $\lambda_1 = 4.12$, $\lambda_2 = -4.12$, $\lambda_3 = 2$ och egenvektorerna $\mathbf{x}^{(1)} = \{0.993, 0.122, 0\}$, $\mathbf{x}^{(2)} = \{-0.122, 0.993, 0\}$, och $\mathbf{x}^{(3)} = \{0, 0, 1\}$.

4. Elasticitetsproblem (5p)

En cylindrisk stång av godtyckligt tvärsnitt belastas av lika stora och motrikade normalspänningar σ med uniform fördelning över dess ändar (se figur). Mantelytan är spänningsfri och inga volymkrafter är aktiva. Materialet kan beskrivas som en linjär elastisk isotrop solid.



Följande lösning utgör ett giltigt förflyttningsfält för denna situation:

$$u_1 = \left(\frac{\sigma}{E}\right) x_1,$$

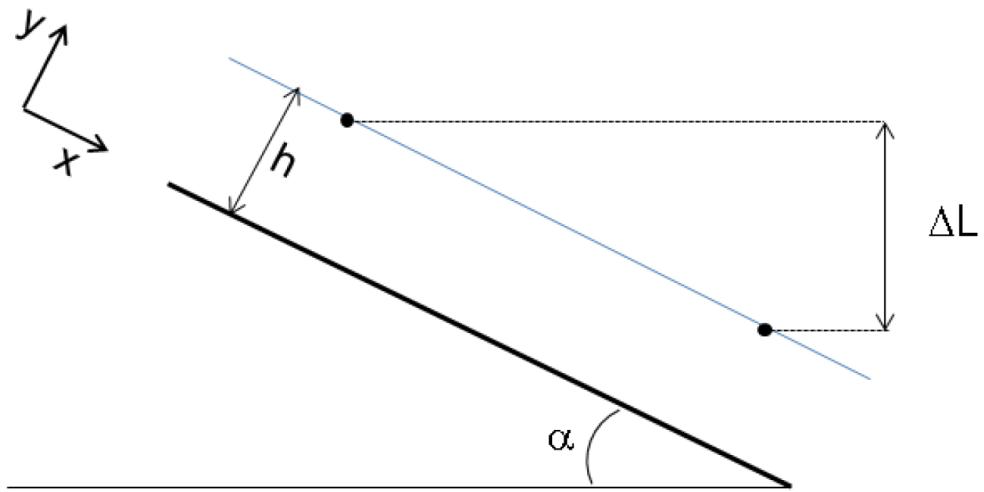
$$u_2 = -\nu \left(\frac{\sigma}{E}\right) x_2,$$

$$u_3 = -\nu \left(\frac{\sigma}{E}\right) x_3.$$

Utgå från denna lösning och ta fram samtliga komponenter i spänningstensorn $\boldsymbol{\sigma}$. Visa också huruvida den erhållna spänningstensorn uppfyller de i uppgiften beskrivna randvillkoren.

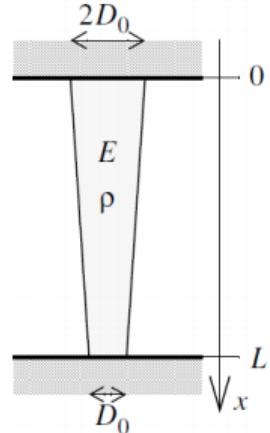
5. Strömningsproblem (7p)

En vätska strömmar nedför ett sluttande plan på ett sådant sätt att strömningen hela tiden förblir laminär. Fluiden är Newtonsk och strömningen är inkompressibel. Härled ett uttryck för den tid det tar för ett fluidelement precis i gränsytan (dvs i $y = h$) att förflytta sig ett avstånd ΔL i höjdled (se figur). Utgå från Navier-Stokes ekvationer när du tar fram ditt svar.



6. Approximativa lösningar: solider (10p)

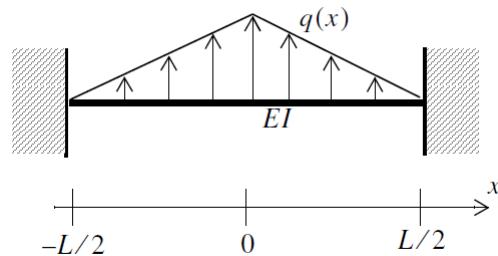
- a) En pelare med ett homogent cirkulärt tvärsnitt har i spänningsfritt tillstånd längden L (se figur). Tvärsnittets diameter varierar linjärt från $2D_0$ vid övre infästningen, till D_0 vid nedre änden. Materialet är linjärt elastiskt med elasticitetsmodul E och densitet ρ . Pelaren monteras vertikalt mellan två stela plan på avståndet L från varandra enligt figuren. Beräkna normalkraften $N(x)$ i pelaren. (5p)



- b) En axel tillverkad av ett linjärt elastiskt material har längden L och ett massivt cirkulärt tvärsnitt av konstant radie R där vridstyvheten är GK_v . Axeln belastas med ett vridande moment T vid $x = L$. Vid $x = 0$ sitter axeln fast, så att vridningsvinkeln $\varphi(0) = 0$. Uttryck hur vridningsvinkeln $\varphi(L)$, d v s högra ändens vridning relativt vänster ände, beror av T . (2p)
- c) En dubbelsidigt fast inspänd balk, tillverkad av ett linjärt elastiskt material, har konstant böjstyrhet EI och längd L . Den belastas av en utbredd last med intensitet (kraft/längd)

$$q(x) = \begin{cases} -q_0 (1 + 2\frac{x}{L}) & -L/2 < x < 0 \\ -q_0 (1 - 2\frac{x}{L}) & 0 < x < L/2 \end{cases}$$

Bestäm snittmomentet $M(x)$ i balkens högra halva ($0 \leq x \leq L/2$). (3p)



7. Approximativa lösningar: fluider (7p)

- a) En fluid strömmar genom en förträngning. Vad händer med fluidens hastighet i förträngningen? Vad händer med trycket? Motivera ditt svar. (2p)
- b) Vattnet i en lugn sjö kan antas vara stillastående, vilket innebär att trycket ökar ju längre ned under ytan man befinner sig. Detta innebär att den uppåtriktade tryckkraften från vattnet på ett föremål som sänks ned i sjön är större ju djupare föremålet är. Med andra ord är vattnets flytkraft (den kraft med vilken vattnet vill orsaka en uppåtriktad acceleration av ett nedsänkt föremål) större ju längre ner i vattnet man kommer. Är detta resonemang sant eller falskt? Motivera ditt svar! Du får anta att vattnets densitet är konstant (oberoende av djup). (2p)
- c) Energiflödet i den viskösa dissipationen beror av viskositeten μ (Pa·s), värmekonduktiviteten k (W/m·K), en karakteristisk hastighet U (m/s) och en karakteristisk temperatur T_0 (K). Formulera ett dimensionslöst tal (Brinkmantalet) som är proportionellt mot μ och kan användas för att karakterisera denna process. Brinkmantalet kan tolkas som kvoten mellan värmeproduktionen i den viskösa dissipationen och hastigheten med vilken detta värme sprids ut i fluiden; ett högt värde indikerar att den viskösa dissipationen orsakar lokala temperaturhöjningsfenomen. Är Brinkmantalet högt eller lågt i de flesta konventionella strömnings-situationer? (3p)

Formelsamling

Matematik

s är skalär, \mathbf{v} är vektor, \mathbf{A} är andra ordningens tensor

Jacobis formel

$$\frac{d}{d\tau} \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \operatorname{tr} \left[\frac{d\mathbf{A}}{d\tau} \mathbf{A}^{-1} \right]$$

Symmetriska och antisymmetriska tensorer

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^S + \mathbf{A}^A = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

\mathbf{A}^S symmetrisk: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, $A_{ij} = A_{ji}$

\mathbf{A}^A anti-symmetrisk: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, $A_{ij} = -A_{ji}$, $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$

Deviatorisk (avvikande) tensor

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{I}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A}' = 0$$

Identitetstensor

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}$$

Divergensteoremet

$$\int_{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \int_{\partial\kappa} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$$

Kinematik

Definitioner

$$\mathbf{X} = \chi_0(M), \mathbf{x} = \chi_t(M), \mathbf{x} = \chi_t(\mathbf{X})$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \chi_t(M)}{\partial t}, \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}(M, t)}{\partial t}$$

$$\phi = \check{\phi}(M, t) = \hat{\phi}(\mathbf{X}, t) = \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)$$

Materiederivatan och hastighetsgradienten

$$\frac{D\phi}{Dt} = \begin{cases} \frac{\partial \check{\phi}(M, t)}{\partial t} \Big|_{M = \text{fix}} \\ \frac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x} = \text{fix}} \\ \frac{\partial \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \tilde{\phi} \cdot \mathbf{v} \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

$$\text{tr } \mathbf{L} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$$

Förflyttning och deformation

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \chi_t(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$$

Mappning mellan referenskonfigurationen och nuvarande konfigurationen

$$J = \det \mathbf{F} = |\mathbf{F}|$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

$$da \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}^\# \, dA \cdot \hat{\mathbf{N}} = J \, \mathbf{F}^{-\text{T}} \cdot dA \, \hat{\mathbf{N}}$$

$$dv=JdV$$

$$T\ddot{o}jning$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}=\mathbf{V}\cdot\mathbf{R}$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{U}^2=\mathbf{F}^{\text{T}}\cdot\mathbf{F}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}^2=\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{\text{T}}$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{C}-\mathbf{I}\right)$$

$$\mathbf{e}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}^{-1}\right)$$

Spänningar

Spänningsvektorer

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}})=\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}})}{\Delta a}$$

$$\mathbf{t}=\mathbf{t}_{nn}+\mathbf{t}_{ns}=(\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}+\hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{t}\times\hat{\mathbf{n}})$$

$$\mathbf{t}_{nn}=(\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}, \, t_{nn}=\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{n}}=t_in_i=\sigma_{ij}n_in_j$$

$$\mathbf{t}_{ns}=\mathbf{t}-\mathbf{t}_{nn}, \, |\mathbf{t}_{ns}|=t_{ns}=\sqrt{|\mathbf{t}|^2-t_{nn}^2}$$

$$(t_{ns})_{\max}=\tfrac{1}{2}\left(\lambda_{\max}-\lambda_{\min}\right)$$

$$\hat{\mathbf{n}}=\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$$

Cauchys lemma

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\hat{\mathbf{n}}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \hat{\mathbf{n}})$$

Cauchys spänningssformel

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

Cauchys spänningstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$I_1 = \text{tr } [\sigma] = \sigma_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr } [\sigma])^2 - \text{tr } ([\sigma]^2)] = \frac{1}{2} (\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji})$$

$$I_3 = |\sigma|$$

Piola-Kirchoffs spänningstensorer

$$\mathbf{T} dA = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} dA = \mathbf{t} da = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T$$

$$d\mathcal{F} = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \mathbf{F}^T$$

Mekaniklagar

Massa

$$m = \int_{\mathcal{B}} dm = \int_{\kappa_0} \rho_0 dV = \int_{\kappa} \rho dv$$

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

$$\rho_0 = \rho J$$

Massbalans - integral form för referenskonfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \rho_0 dV = 0$$

Massbalans - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho dv = 0$$

Massbalans - lokal form för referenskonfigurationen

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$$

Massbalans - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho F dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\kappa} \rho F dv + \int_{\partial\kappa} \rho F \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

Rörelsemängd

$$\mathcal{P} = \int_{\mathcal{B}} d\mathcal{P} = \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} dv$$

$$\mathcal{H}^o = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_o \times d\mathcal{P} = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dv$$

$$\frac{D\mathcal{P}}{Dt} = \mathbf{F}$$

$$\frac{D\mathcal{H}^o}{Dt} = \mathbf{M}^o$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \, da$$

$$\mathbf{M}^o = \mathbf{M}_B^o + \mathbf{M}_S^o = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, da$$

Rörelsemängdsbalanser - integral form för referenskonfigurationen

$$\int_{\kappa_0} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = \int_{\kappa_0} \rho_0 \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dA$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dV = \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, dA$$

Rörelsemängdsbalanser - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \, da$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dv = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, da$$

Rörelsemängdsbalanser - lokal form för referenskonfigurationen

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^T$$

Rörelsemängdsbalanser - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$$

Energi

$$\frac{D}{Dt} (K + U) = W + Q_h$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv, \quad U = \int_{\kappa} e \, dv$$

$$W = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da, \quad Q_h = - \int_{\partial\kappa} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q} da + \int_{\kappa} \rho r_h dv$$

Energibalans - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\int_{\kappa} \left(\rho \frac{De}{Dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r_h \right) dv = 0$$

Energibalans - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\rho \frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r_h$$

Konstitutiva samband

Generalisering av Hookes lag till 3D

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\{\sigma\} = [\mathbb{C}] \{\epsilon\}, \{\epsilon\} = [S] \{\sigma\}, \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S} = \mathbb{C}^{-1}$$

Isotrop elastisk solid

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} = \kappa \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, 2\mu + \lambda = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\kappa = \lambda + 2\mu/3$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}}$$

Newtonsk fluid, inkompressibel strömning

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]$$

$$\tau \propto \frac{d\theta}{dt} = \frac{dv_x}{dy}, \quad \tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

Oviskös eller stillastående fluid, alternativt rotationsfri strömning

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I}$$

Fouriers lag

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla T \text{ (anisotrop medium)}$$

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \text{ (isotrop medium)}$$

Linjäriserade elasticitetsproblem

Linjäriserade beskrivningen

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\mathbf{e} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{X}, \rho_0 \approx \rho$$

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{P} \approx \mathbf{S}$$

Töjning-förflyttning

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Rörelselagar

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho_0 f_x = \rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho_0 f_y = \rho_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho_0 f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho_0 f_r = \rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\theta r} - \sigma_{r\theta}}{r} + \rho_0 f_\theta = \rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho_0 + f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

Kompatibilitet

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\epsilon})^T = \mathbf{0}$$

Lamé-Naviers ekvationer

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

Michells ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \nabla [\nabla (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})] = -\frac{\nu \rho_0}{1-\nu} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{I} - \rho_0 [\nabla \mathbf{f} + (\nabla \mathbf{f})^T]$$

Beltramis ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \nabla [\nabla (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})] = \mathbf{0}$$

Plantöjningsproblem - jämvikt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

Planspänningssproblem - jämvikt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

Strömningsproblem

Inkompressibel strömning, Newtonsk fluid

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{f} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y = \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\
& \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\
& \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_r \\
& = \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
& \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f_\theta \\
& = \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\
& \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z \\
& = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

Hydrostatik

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

Värmtransportproblem

$$\begin{aligned}
\rho c_p \frac{DT}{Dt} &= \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho r_h \\
\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \rho r_h
\end{aligned}$$

1D-problem

$$\begin{aligned}
& \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2} + gz \right)_{\text{out}} (\rho Q)_{\text{out}} - \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2} + gz \right)_{\text{in}} (\rho Q)_{\text{in}} \\
& = W_{\text{shaft}} + H_{\text{net}}
\end{aligned}$$

Dissipation, Newtonsk fluid

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \Phi$$

$$\begin{aligned}\Phi &= 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &\quad + \mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

Boussinesq approximation

$$\rho = \rho_0 - \beta \rho_0 (T - T_0)$$

Termisk expansion

$$\epsilon^{\text{term}} = \alpha \Delta T$$

$$\epsilon = \epsilon^{\text{mek}} + \epsilon^{\text{term}} = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

Approximativa lösningar: solider

Stång

$$N = P, \bar{\epsilon} = \delta/L, \sigma = E\bar{\epsilon}, N = \sigma A$$

$$\begin{bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}$$

Stångens differentialekvation

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{du}{dx}, \sigma = E \frac{du}{dx}, N = EA \frac{du}{dx} \\ -\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) &= K_x A\end{aligned}$$

Axel

$$\tau = G\gamma = \frac{M_v}{K_v} r, \gamma = \frac{r}{L} (\varphi(L) - \varphi(0)) = \frac{r}{L} (\varphi_2^e - \varphi_1^e)$$

$$\begin{bmatrix} M_1^e \\ M_2^e \end{bmatrix} = \frac{GK_v}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^e \\ \varphi_2^e \end{bmatrix}$$

$K_v = 2\pi r^3 h$ (tunnväggigt tvärsnitt)

$K_v = \pi(b^4 - a^4)/2$ (tjockväggigt tvärslott)

Axelns differentialekvation

$$\frac{d}{dx} \left(GK_v \frac{d\varphi}{dx} \right) + q_v = 0$$

Balk

$$\frac{dN}{dx} + K_x A = 0, \frac{dT}{dx} + q = 0, \frac{dM}{dx} = T, \frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0$$

$$\alpha = \frac{dw}{dx}, \epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{d^2 w}{dx^2} z, \sigma_x = E \epsilon_x = -E \frac{d^2 w}{dx^2} z, M = -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

Balkens differentialekvation (Elastiska linjens ekvation)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = q(x)$$

Approximativa lösningar: flöider

Bernoullis ekvation

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{constant (utan förluster)}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_f \text{ (med förluster)}$$

Turbulens

Kolmogorovs skalar

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}, \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}, u_\eta = (\nu \varepsilon)^{1/4}$$

Reynoldsdekomponering

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}', p = \bar{p} + p'$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} dt = \langle \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} \rangle = \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}} = 0$$

Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) ekvationer

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0$$

$$\nabla \cdot (-\bar{p} \mathbf{I} + 2\mu \bar{\mathbf{D}} - \rho \langle \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' \rangle) = \rho \frac{D \bar{\mathbf{v}}}{Dt}$$

1. a) Db) D/Dtc) Pd) Re) V

2. a) λ berättar hur mycket ett materiallinjelement i riktningen av M utgående från X sträcks ut i den deformationen som F beskriver ($\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$)

b) övre panelen: V — lös lämpligen Navier-Stokes ekvationer
 undre panelen: V — lös lämpligen RANS-ekvationerna

c) Principen om masskonservering:

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 \quad \text{Här: } \frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_K \mathbf{g} dV = \frac{D}{Dt} \int_{K_0} \mathbf{g}_0 dV - \frac{D}{Dt} \int_{K_0} \mathbf{g}_1 dV = \int_{K_0} \frac{D}{Dt}(\mathbf{g}) dV$$

och eftersom $\frac{Dm}{Dt} = 0 = \int_{K_0} \frac{D}{Dt}(\mathbf{g}) dV$ så $\frac{D}{Dt}(\mathbf{g}) = 0$ (eftersom integralen endast kan vara = 0 för samtliga val av K_0 om integranden är = 0)

d) Superpositionsprincipen: för linjära rörelselagor och sni deformationer

Kan man dela upp ett komplext problem i flera enklare (man löser rörelselagarna för flera olika set av randvillkor); den sökta lösningen erhålls genom att addera (superpositionera) de olika dellösningarna.

Sni deformationer är ett svar (annars flyttas randen och det är inte längre möjligt att dela upp randvillkoren i olika set). Turbulent strömning beskrivs av Navier-Stokes ekvationer som är icke-linjära, då fungerar inte superpositionsprincipen.

c) $\underline{\underline{C}}$ har (som 4:e ordningens tensor) 81 komponenter, men då $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}}$ och $\underline{\underline{\sigma}}$ & $\underline{\underline{E}}$ är symmetriska (bara 6 istf 9 komponenter är oberoende) kan det i praktiken inte finnas fler än $6^2 = 36$ oberoende komponenter i $\underline{\underline{C}}$. Dock så är även $\underline{\underline{C}}$ symmetrisk, vilket innebär $21 = 15 + 6$ komponenter.

\uparrow \uparrow
en sidan diagonalen

Ett isotrop material har 2 oberoende komponenter.

Ett material med fibrer i en och samma riktning

har transvers isotropi \rightarrow 5 oberoende komponenter (dvs fler än det isotropa).

f)

Rörelsemängd: $\underline{\underline{\mu}} \nabla^2 \underline{\underline{v}} - \nabla p + \underline{\underline{g}} = \underline{\underline{S}} \left(\frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{v}} \cdot \nabla \underline{\underline{v}} \right)$

Energi: $\nabla \cdot (\underline{\underline{k}} \nabla T) + \underline{\underline{g}} \cdot \underline{\underline{v}} = \underline{\underline{S}}_{cp} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{\underline{v}} \cdot \nabla T \right)$

Temperaturfältet påverkar materialdata, fr $\in \underline{\underline{S}}$ är drivande i naturlig konvektiv

Hastighetsfältet påverkar direkt genom konvektiv transport av energi

(Dissipationen beror av $\underline{\underline{v}}$ och kan i speciellfall påverka T)

$$3. \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Sökt: huvudsakliga spänningarna
plan för maximala huvudsakliga spänningar
maximala skjutspänningen

Lösning: De huvudsakliga spänningarna ges av egenvärdena:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \lambda_1 = 4.12 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = \lambda_2 = -4.12 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = \lambda_3 = 2 \text{ MPa} \end{cases}$$

Den maximala huvudsakliga spänningen är σ_1 , och är således associerad med $\lambda_1 \rightarrow \underline{x}(1)$

$\underline{x}^{(1)}$ är enhetsytornormal till det efterfrågade planet:

$$\hat{\underline{n}} = \underline{x}^{(1)} = 0.993 \hat{\underline{e}}_1 + 0.122 \hat{\underline{e}}_2 + 0 \hat{\underline{e}}_3$$

Den maximala skjutspänningen ges av:

$$(t_{ns})_{\max} = \frac{1}{2} (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) = \frac{1}{2} (4.12 - (-4.12)) \text{ MPa} = 4.12 \text{ MPa}$$

4. Givet: $\begin{cases} u_1 = \frac{\sigma}{E} x_1 \\ u_2 = -\nu \left(\frac{\sigma}{E}\right) x_2 \\ u_3 = -\nu \left(\frac{\sigma}{E}\right) x_3 \end{cases}$ Löst: $\underline{\sigma}$

Lösning: Med givet \underline{u} har vi att:

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\sigma}{E}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\nu \frac{\sigma}{E}$$

$$\epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\nu \frac{\sigma}{E}$$

Alla andra komponenter i ϵ måste vara lika med noll.

Vi har vidare att:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

$$\text{Så att: } \sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu) \epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22} + \nu \epsilon_{33} \right)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu \epsilon_{11} + (1-\nu) \epsilon_{22} + \nu \epsilon_{33} \right)$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu \epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22} + (1-\nu) \epsilon_{33} \right)$$

Övriga komponenter i $\underline{\sigma}$ måste vara lika med noll.

Insättning:

$$\sigma_{11} = \frac{\epsilon}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu) \frac{\sigma}{E} - \nu^2 \frac{\sigma}{E} - \nu^2 \frac{\sigma}{E} \right) =$$

$$= \sigma \left(\frac{(1-\nu) - 2\nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) = \frac{1-\nu-2\nu^2}{1-2\nu+\nu-2\nu^2} \sigma = \sigma$$

$$\sigma_{22} = \frac{\epsilon}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu \frac{\sigma}{E} - (1-\nu)\nu \frac{\sigma}{E} - \nu^2 \frac{\sigma}{E} \right) =$$

$$= \sigma \left(\frac{\nu - (1-\nu)\nu - \nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) = \sigma \left(\frac{\nu - \nu + \nu^2 - \nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) = 0$$

$$\sigma_{33} = 0 \quad (\text{samme som } \sigma_{22})$$

$\therefore \Sigma$ innehåller bara en nötklild komponent; $\sigma_{11} = \sigma$

Vad är de angivna randvilkoren?

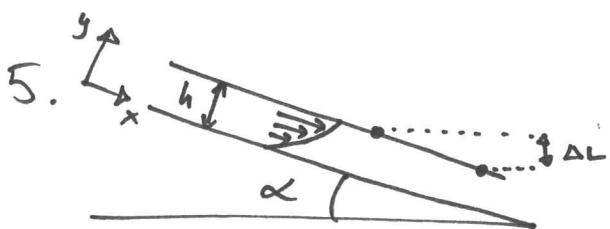
Vid $x_1=0$ och $x_1=L$:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma \\ \sigma_{21} = \sigma_{31} = 0 \end{cases}$$

Mantelytan : $\sigma_{21} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$

Dvs det framtagne utseendet på σ uppfyller randvilkoren!

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Sökt: tid för förflyttning ΔL vid fasgränsytan

Lösning: Utga från N-S:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + g f_x = g \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

Antag: inkompressibel, Newtoniskt fluid (\rightarrow N-S)

stationär ($\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$)

fullt utvecklad strömning ($\frac{\partial v_x}{\partial x} \rightarrow 0$)

atmosfärtryck längs hela fasgränsytan ($\rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0$)

strömningen drivs av gravitationen (här: $f_x = g \sin \alpha$)

laminärt ($\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \rightarrow 0$)

$$v_x = v_x(y) \quad \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \rightarrow 0 \right)$$

$\overline{}$ = termer som försvinner med antagnaden

Rörelselagen blir då: $\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + g g \sin \alpha = 0$

Integrera: $\frac{d^2 v_x}{dy^2} = - \frac{g g \sin \alpha}{\mu} \rightarrow \frac{dv_x}{dy} = - \frac{g g \sin \alpha}{\mu} y + c_1$

$$\rightarrow v_x = - \frac{g g \sin \alpha}{2\mu} y^2 + c_1 y + c_2$$

Randvillkor: $\begin{cases} v_x(y=0) = 0 & \rightarrow c_2 = 0 \\ \mu \frac{dv_x}{dy} \Big|_{y=h} = 0 & \rightarrow c_1 = \frac{g g \sin \alpha}{\mu} h \end{cases}$

$$\rightarrow v_x = \frac{g g \sin \alpha}{2\mu} y (2h - y)$$

Ett fluidelement i fasgränsytan har således hastigheten

$$v_x(y=h) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} h^2$$

Hur lång förflyttning (i x) motsvarar ΔL ?


$$\sin \alpha = \frac{\Delta L}{\Delta x}$$

Tid för att förflytta sig Δx med hastigheten $v_x(y=h)$:

$$t = \frac{\Delta x}{v_x(y=h)} = \frac{\Delta L}{\sin \alpha} \cdot \frac{2\mu}{\rho g \sin \alpha h^2} = \frac{2\mu \Delta L}{\rho g h^2 \sin^2 \alpha}$$

$$6. \text{ a) } \underline{\text{Lösung:}} \quad \text{Stang} - N(x) = EA \frac{du}{dx}$$

$$\text{samt } \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = -K_x A$$

$$\text{Hier: } D(x) = D_0 \left(2 - \frac{x}{L} \right) \rightarrow A(x) = \frac{\pi D_0^2}{4} \left(2 - \frac{x}{L} \right)^2$$

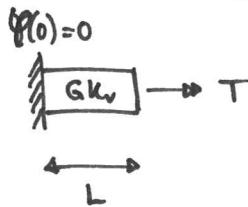
$$\rightarrow \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = - \frac{8g\pi D_0^2}{4} \left(2 - \frac{x}{L} \right)^2$$

$$\text{Integrieren } \times 2: \quad u(x) = - \frac{8g L^2}{6E} \left(2 - \frac{x}{L} \right)^2 + \frac{4L}{\pi E D_0^2 \left(2 - \frac{x}{L} \right)} c_1 + c_2$$

$$\text{Randwerte: } \begin{cases} u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = - \frac{8g \pi L D_0^2}{4}$$

$$\rightarrow N(x) = EA \frac{du}{dx} = \frac{8g \pi L D_0^2}{12} \left[\left(2 - \frac{x}{L} \right)^3 - 3 \right]$$

b) Lösung:



Schnitt:



$$\text{jew: } -M_v + T = 0 \rightarrow M_v = T$$

$$\begin{cases} G\gamma = \frac{M_v}{k_v} r \\ \gamma = \frac{r}{L} (\varphi(L) - \varphi(0)) \end{cases} \rightarrow \frac{Gr}{L} (\varphi(L) - \varphi(0)) = \frac{M_v}{k_v} r$$

$$\rightarrow \left\{ \varphi(0)=0 \right\}: \quad \varphi(L) = \frac{M_v L}{G k_v} \rightarrow \varphi(L) = \frac{T L}{G k_v}$$

c) Lösning: Balk - $M = -EI \frac{d^2w}{dx^2}$ och $\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) = q(x)$

Här: E, I konstanta ; $q(x) = \begin{cases} -q_0(1+2\frac{x}{L}) & -L/2 < x < 0 \\ -q_0(1-2\frac{x}{L}) & 0 < x < L/2 \end{cases}$

I högra halvom ($0 < x < L/2$):

$$w(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \frac{q_0 L^4}{60EI} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^5 - \frac{5}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^4 \right]$$

Symmetri villkor: $w(x) = w(-x) \rightarrow B = D = 0$

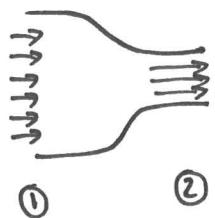
Randvillkor: $\frac{dw}{dx} \Big|_{x=L/2} = 0 \rightarrow C = \frac{q_0 L^2}{64EI}$

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \rightarrow A \quad (\text{men behövs ej ty endast } \frac{d^2w}{dx^2} \text{ sätts för } M)$$

$$\rightarrow \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{q_0 L^2}{EI} \left[\frac{1}{32} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{L}\right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right]$$

$$\rightarrow M(x) = -EI \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{q_0 L^2}{96EI} \left[48 \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 32 \left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3 \right]$$

7. a)



Masskonservering ger:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{K}} S dv = 0$$

$$RTT \text{ ger: } \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{K}} S dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{K}} S dv + \int_{\partial \mathcal{K}} S v \cdot \hat{n} da$$

$$\text{Om stationärt, så: } \int_{\partial \mathcal{K}} S v \cdot \hat{n} da = 0$$

$$\text{För 1D-system (ett inlopp och ett utlopp): } S V_1 A_1 = S V_2 A_2$$

Vid försträngning: $A_2 < A_1 \rightarrow V_2 > V_1 \quad \therefore \text{hastigheten ökar}$

Bernoullis ekvation (foljer en horisontell strömlinje):

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{S} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{S}$$

Om $V_2 > V_1$, så måste vi ha $P_2 < P_1 \quad \therefore \text{trycket minskar}$

b)

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -g$$



trycket ökar längre ner - oke!

upprättrade tryckkraften ökar längre ner - stämmer att
tryckkraften upprät på undersidan är
högre längre ner...

... MEN: även den nedrätriktade
tryckkraften från ovansidan
är högre längre ner!

Om $g = \text{konstant}$ är nettotryckkraften beroende av dyptet

Resonemangset (i sin helhet) är således falskt

$$c) \mu : [Pa, s] - \left[\frac{N}{m^2}, s \right] - \left[\frac{kg \cdot m}{s^2, m^2}, s \right] - \left[\frac{kg}{s, m} \right]$$

$$\kappa : [W/m, K] - \left[\frac{J}{s, m, K} \right] - \left[\frac{kg \cdot m^2}{s^2, s, m, K} \right] - \left[\frac{kg \cdot m}{s^3, K} \right]$$

$$U : [m/s]$$

$$T_0 : [K]$$

Formuler ett dimensionslöst tal (Brinkmantal, Br) som är proportionellt mot μ .

1) μ ska myga i täljaren

2) den enda andra variabeln som innehåller $[kg]$ är κ som alltså måste mygas i nämnaren om resultatet ska kunna bli dimensionslöst

$$\frac{\mu}{\kappa} = \frac{kg \cdot s^3, K}{s, m \cdot kg, m} = \frac{s^2, K}{m^2}$$

3) den enda kvarvarande variabeln som innehåller $[K]$ är T_0 som alltså måste mygas i nämnaren om resultatet ska bli dimensionslöst

$$\frac{\mu}{\kappa T_0} = \frac{s^2, K}{m^2, K} = \frac{s^2}{m^2}$$

4) Kvar är U som har enheten $[m/s]$; om vi läter U^2 ingå i täljaren har vi ett dimensionslöst tal

$$Br = \frac{\mu U^2}{\kappa T_0}$$

Eftersom de flesta konventionella strömningssituationer inte upprörar utpräglad lokal temperaturhöjning på grund av viskös dissipation kan vi förvänta oss att Br är lågt vanligen