Föreläsning 1

2023-03-20

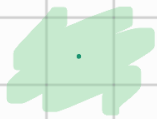
Anteckningar av: Emma "Jackie" Chan

KONTINUUMMEKANIK

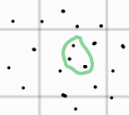
grundläggande begrepp:

material	SOLID	FLUID	
		VÄTSKOR	GASER
flödar (deformerar kontinuerligt) vid skjuvning. 	NEJ	JA	
har definitiv form?	JA	NEJ	NEJ
har definitiv volym?	JA	JA	NEJ

kontinuum-nivå:



molekulär nivå:



Föreläsning 2

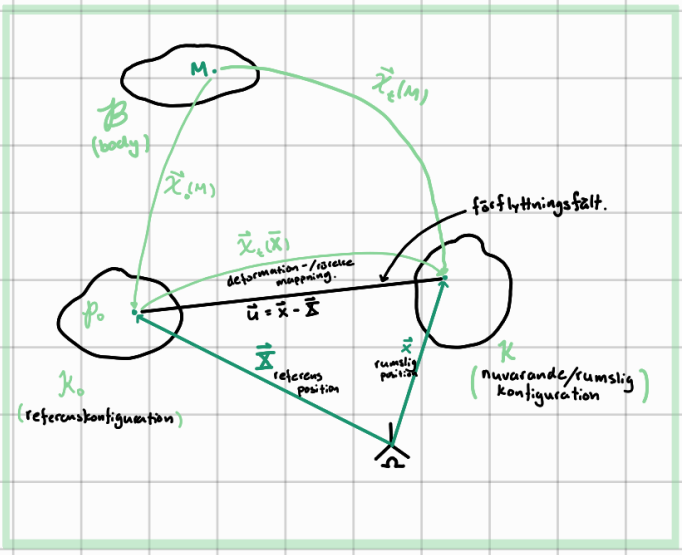
Begrepp

Kinematik: analys av rörelse och deformation.

Observatör: Valet av observatör spelar roll!

partikel: "en liten bit material"

Konfigurationer & rörelse



- Body = abstrakt objekt – lista över materialpartiklar M.
- vi kan identificera varje partikel M som:

$$\begin{cases} \vec{X} = \vec{\chi}_0(M) \\ \vec{x} = \chi_t(M) \end{cases}$$

- $\vec{x}/\vec{X}$: postionsvektorer
- $\mathcal{E}$: Euklidiskt rum, $P_0 \in \mathcal{E}$, $P \in \mathcal{E}$
- $\chi_t(M)$ är en mappning (dvs function).

  rörelse-/deformations mappningen ger vägen
- en partikel har $\vec{x} = \chi_t(\vec{X})$

- Om vi känner rörelsen / deformationen, vill vi också kunna uttrycka relevanta derivator.

  Hastighet $\vec{v} = \dfrac{\partial \vec{\chi}_t(M)}{\partial t} = \vec{v}(M,t)$

  Acceleration $\vec{a} = \dfrac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t} = \vec{a}(M,t)$
- Operatorer kan för tydlighetsskull uttryckas på följande sätt:

  $\vec{X} = X_A \vec{E}_A$: existerar / lever i $\mathcal{K}_0$

  $\vec{x} = x_i \vec{e}_i$: existerar/lever i $\mathcal{K}$

  Grad $\vec{v} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{X}} = \dfrac{\partial v_i}{\partial X_A} \vec{e}_i \otimes \vec{E}_A$

  grad $\vec{v} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_i} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i$

  Div, Curl "existerar med ett ben i $\mathcal{K}_0$ och ett ben i $\mathcal{K}$"

  Div, Curl "existerar helt i $\mathcal{K}$"

Lagrangeskt och Eulerskt betraktarsätt/representation

- rent generellt kan en funktion ha flera olika representationer.

$$\phi = \underset{\substack{\text{MATERIE-}\\\text{REPRESENTATION}}}{\check{\phi}(M,t)} = \underset{\substack{\text{LAGRANGESK}\\\text{(REFERENS)}\\\text{REPRESENTATION}}}{\hat{\phi}(\vec{X},t)} = \underset{\substack{\text{EULERSK}\\\text{(RUMSLIK)}\\\text{REPRESENT.}}}{\tilde{\phi}(\vec{x},t)}$$

$\check{\phi}$: ger oss värdet på ϕ för en given partikel vid en given tidpunkt t.

$\hat{\phi}$: ger oss värdet på ϕ för en given partikel som är assosierad m. position $\vec{X}$.

i referenskonfigurationen vid t.

$\tilde{\phi}$: ger oss värdet på ϕ för en given partikel som råkar befinna sig i punkten $\vec{x}$ vid t.

Materiederivatan $\frac{D}{dt}$

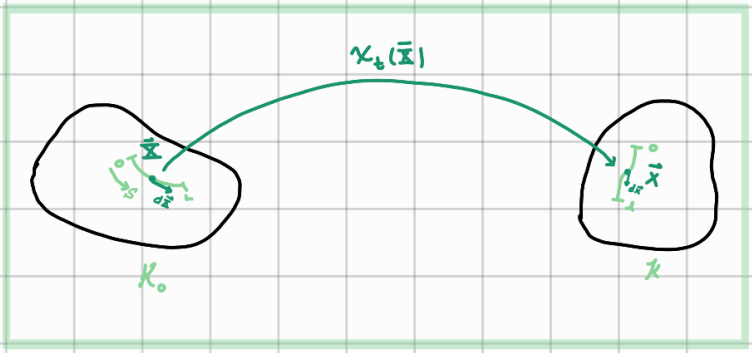
$$\frac{D\phi}{dt} = \left\{\begin{matrix}\text{förändring av } \phi \text{ över tid för}\\ \text{en given partikel som vi följer}\end{matrix}\right\} = \begin{cases} \dfrac{\partial\check{\phi}}{\partial t} = \left.\dfrac{\partial\check{\phi}(M,t)}{dt}\right|_{M\ \text{fix}} \\ \dfrac{\partial\hat{\phi}}{\partial t} = \left.\dfrac{\partial\hat{\phi}(\vec{X},t)}{\partial t}\right|_{\vec{X}\ \text{fix}} \\ \dfrac{\partial\tilde{\phi}(\vec{x},t)}{\partial t} + \dfrac{\partial\tilde{\phi}(\vec{x},t)}{\partial\vec{x}}\cdot\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \underbrace{\dfrac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t}}_{\substack{\text{rumslig/lokal}\\\text{tidsderivata}}} + \underbrace{\text{grad}\,\tilde{\phi}\cdot\vec{v}}_{\substack{\text{konvektiv}\\\text{förändringshastighet}}} \end{cases}$$

$$\tilde{\phi}(\vec{x},t) = \tilde{\phi}(\vec{x}_t(X),t)$$

NOTERA SÄRSKILT

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\check{\vec{v}}(M,t)}{dt} = \frac{\partial\check{\vec{v}}(\vec{X},t)}{dt} = \frac{\partial\tilde{v}(\vec{x},t)}{dt} + \frac{\partial\tilde{\vec{v}}}{\partial\vec{x}}\vec{v}$$

Infinitesimala (differentiella) materiallinje-/yt/volym-element



- S/s är acklängdsparameteriseringen på $\mathcal{K}_0/\mathcal{K}$
- $d\vec{X}/d\vec{x}$ är infinitesimala vektorer som är tangenter till den ljusgröna linjen $\Leftrightarrow$ de pekar i linjens riktning vid $\vec{X}/\vec{x}$ och har infinitesimal längd.

DEFORMATION: $d\vec{X}$ ändrar längd & riktning och blir $d\vec{x}$

FRÅGA: vad är relationen $d\vec{X} \rightarrow d\vec{x}$? (givet viss rörelse)

1. Materiallinjeelement: $d\vec{X} \longrightarrow d\vec{x}$

$$\begin{cases} d\vec{X} = dS\,\vec{M} & \text{eller} \quad \dfrac{\partial \vec{X}}{\partial S} = \vec{M} \quad \left(\begin{array}{c}\text{def av}\\ \text{arklängd}\end{array}\right) \\ d\vec{x} = ds\,\vec{m} & \text{eller} \quad \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial s} = \vec{m} \end{cases}$$

enhetsvektorn i riktning av $d\vec{X}$

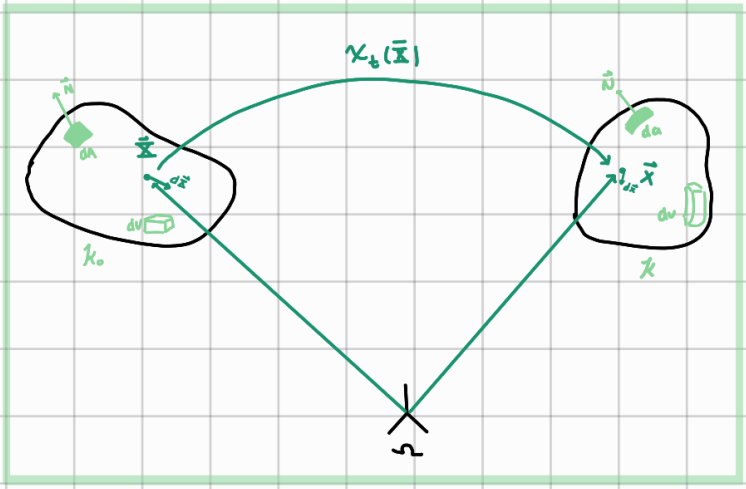
Så att: $$\vec{m} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = \underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}}}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{X}}{\partial S}}_{\vec{M}} \cdot \frac{\partial S}{\partial s} = \vec{F}\,\vec{M}\,\frac{dS}{ds}$$

Deformations gradient tensorn

$$ds \cdot \vec{m} = d\vec{x} = \vec{F}\,\underbrace{\vec{M}\,dS}_{d\vec{X}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{d\vec{x} = \vec{F}\,d\vec{X}}$$

Föreläsning 3

RECAP



- $d\vec{X} \rightarrow d\vec{x}$
- $dA \rightarrow da$
- $dV \rightarrow dv$

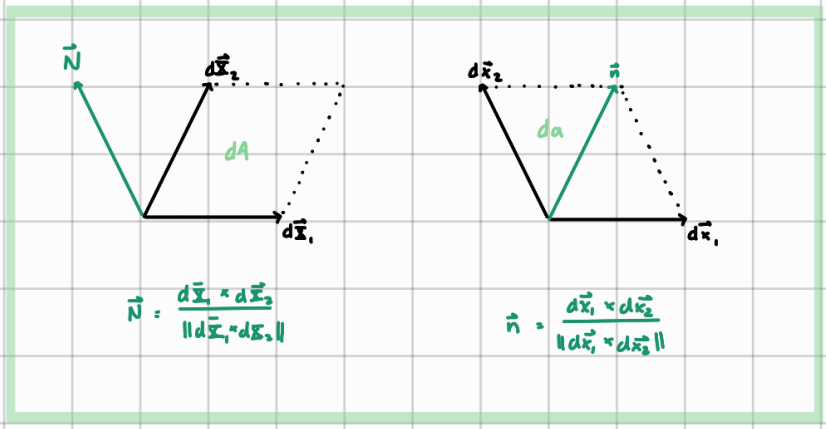
materiallinjelement

- $d\mathbf{X} = ds\vec{M}$
- $d\mathbf{x} = ds\vec{m}$
- $d\vec{x} = \vec{F}\, d\vec{X}$

DEFORMATONSGRADIENTTENSORN
(ej en vektor → en tensor)

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}}$$

Materialytelement: dA → da



$$\vec{N} = \frac{d\vec{X}_1 \times d\vec{X}_2}{\|d\vec{X}_1 \times d\vec{X}_2\|} \qquad \vec{n} = \frac{d\vec{x}_1 \times d\vec{x}_2}{\|d\vec{x}_1 \times d\vec{x}_2\|}$$

$$dA = \|d\vec{X}_1 \times d\vec{X}_2\|$$

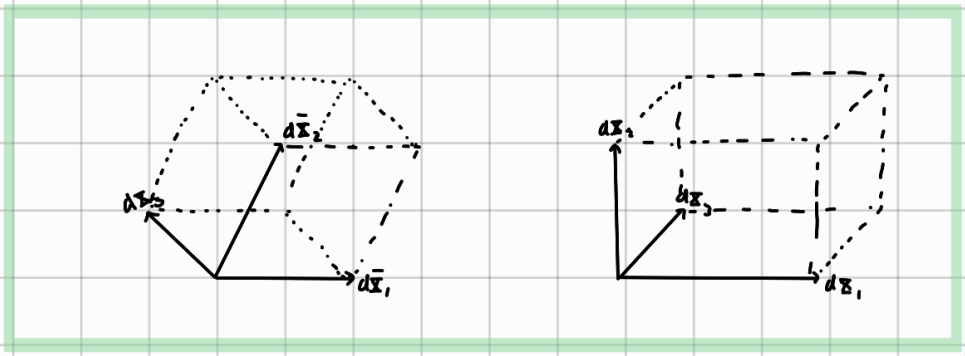
$$d\vec{A} = dA\vec{N} = d\vec{X}_1 \times d\vec{X}_2$$

$$d\vec{a} = da\vec{n} = d\vec{x}_1 \times d\vec{x}_2 = (\vec{F}\, d\vec{X}_1) \times (\vec{F}\, d\vec{X}_2)$$

$$= \vec{F}^{*}(d\vec{X}_1 \times d\vec{X}_2) = \vec{F}^{*}\, dA$$

$$\boxed{da\,\vec{n} = \vec{F}^{*}\, dA\, N}$$

Materialvolymelement : $dV \to dv$



$$\frac{dv}{dV} = \frac{[\bar{F}d\bar{X}_1, \bar{F}d\bar{X}_2, \bar{F}d\bar{X}_3]}{[d\bar{X}_1, d\bar{X}_2, d\bar{X}_3]} =$$

$$= \det \bar{F} = J$$

JACOBIAN OF MAPPING/DEFORMATION

$$\boxed{dv = \det \bar{F} \cdot dV}$$

$$dV = d\vec{X}_3 \cdot (d\bar{X}_1 \times d\bar{X}_2) = d\bar{X}_1 \cdot (d\bar{X}_2 \times d\bar{X}_3) = [d\bar{X}_1, d\bar{X}_2, d\bar{X}_3]$$

$$dv = [d\bar{x}_1, d\bar{x}_2, d\bar{x}_3] = [\bar{F}d\bar{X}_1, \bar{F}d\bar{X}_2, \bar{F}d\bar{X}_3]$$

Krav: $J > 0$

VAD ÄR $\frac{DJ}{Dt} = \dot{J}$?

materialderivatan av J!!

JACOBISKFORMEL:

om $\vec{A}(\tau)$ är en tensorfunktion som beror av τ, så

$$\frac{d}{d\tau} \det \bar{A} = \det \bar{A} \; \mathrm{tr}\left[\frac{dA}{d\tau} \vec{A}^{-1}\right]$$

$$J = \det \bar{F}$$

$$\dot{J} = J \, \mathrm{tr}\left[\dot{\bar{F}} \bar{F}^{-1}\right]$$

$$\dot{\bar{F}} = \dot{\overline{\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{X}}}} = \left\{ \begin{matrix} \vec{X} \text{ beror av } t \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} = \bar{v} \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{X}} = \underbrace{\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}}_{\bar{L}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{X}}}_{\bar{F}} \longrightarrow \dot{\bar{F}} \bar{F}^{-1} = \bar{L} \bar{F} \bar{F}^{-1} = \bar{L}$$

$$\mathrm{tr}\, \bar{L} = \mathrm{div}\, \vec{v}$$

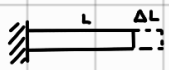
$$\boxed{\dot{J} = J \, \mathrm{div}\, \vec{v}}$$

Töjning

$$\left.\begin{matrix} d\vec{x} = \bar{F} d\bar{X} \\ ds\, \bar{m} = \bar{F} dS \bar{M} \end{matrix}\right\} \lambda = \frac{ds}{dS} > 0$$

$\lambda > 1$: förlängning

$\lambda < 1$: kontraktion



$S \in [0, L]$

$s \in [0, L+\Delta L]$

$$\lambda = \frac{\Delta s}{\Delta S} = \frac{L + \Delta L}{L} = 1 + \epsilon$$

$$ds\,\vec{m} = \vec{F}\,dS\,\vec{M} \xrightarrow[\lambda = \frac{ds}{dS}]{} \lambda \vec{m} = \vec{F}\vec{M}$$

"dotta båda sidor m. sig själv" : $\lambda^2 = \bar{F}\bar{M} \cdot \bar{F}\bar{M} = \bar{M} \cdot \underbrace{\bar{F}^T \bar{F}}_{\bar{C}} \bar{M}$

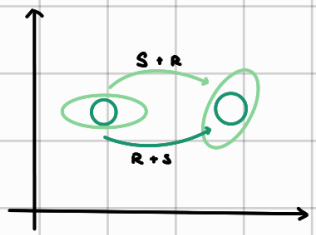
$\bar{C}$ ← högra cauchy-green deformationstensorn.

$C = \bar{F}^T \bar{F}$

Polar decomposition theorem

en reellvärd tensor $\bar{F}$ m nollskild determinant kan alltid delas upp i produkten av en proper ortogonal tensor (som representerar rotation) och en positiv definit symmetrisk tensor (som representerar töjning) det spelar ingen roll om vi betraktar rörelsen som rotation + töjning eller töjning + rotation.

$$\boxed{\vec{F} = \underbrace{\bar{R}\,\bar{U}}_{\text{right stretch tensor}} = \underbrace{\bar{V}\,\bar{R}}_{\text{left stretch tensor.}}}$$



antag $J > 0 \rightarrow \bar{F} = \bar{R}\bar{U} \rightarrow \bar{F}^T\bar{F} = \bar{U}\underbrace{\bar{R}^T\bar{R}}_{I}\bar{U} = \bar{U}^2 = \bar{C}$

$$\lambda = \sqrt{\bar{M} \cdot \bar{C}\bar{M}} > 0 \quad \forall \vec{M}$$

på samma sätt: $\lambda \bar{m} = \bar{F}\bar{M}$

$\lambda^{-1}\bar{M} = \bar{F}^{-1}\bar{m}$

"dotta" $\lambda^{-2} = \bar{F}^{-1}\bar{m} \cdot F^{-1}\bar{m} = \bar{m} \cdot \underbrace{\bar{F}^{-T}\bar{F}^{-1}}_{\bar{B}^{-1}} \bar{m}$

$\bar{B} = \bar{F}\bar{F}^T$

vänstra CG deformationstensorn

antag $J > 0 \rightarrow \bar{F} = \bar{U}\bar{R} \rightarrow \bar{F}\bar{F}^T = \bar{V}\underbrace{\bar{R}\bar{R}^T}_{I}\bar{V} = V^2 = \bar{B}$

$$\lambda^{-1} = \sqrt{\bar{m} \cdot \bar{B}^{-1}\bar{m}} > 0 \quad \forall \bar{m}$$

Töjningstensorer

Våra önskemål: $\begin{cases} \rightarrow 0 \quad \text{om } \bar{u} = \bar{v} = \bar{I} \\ \text{ska inte vara rotationskänslig} \end{cases}$

identitetsmatris

$$d\bar{x} = \bar{F}\, d\bar{X}$$

the lagrangian (green) strain tensor

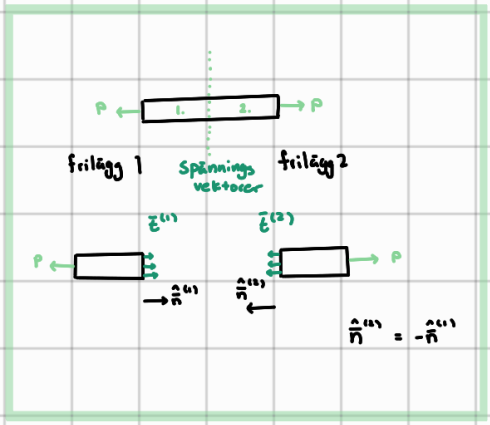
$$ds^2 - dS^2 = \|d\bar{x}\|^2 - \|d\bar{X}\|^2 = \bar{F}\,d\bar{X} \cdot \bar{F}\,d\bar{X} - d\bar{X} \cdot \bar{I}\,d\bar{X} = d\bar{X} \cdot F^T \bar{F}\, d\bar{X} - d\bar{X} \cdot I\, d\bar{X} = d\bar{X}\, \overbrace{(\bar{C} - \bar{I})}^{2\bar{E}}\, d\bar{X}$$

$$ds^2 - dS^2 = d\bar{x} \cdot d\bar{x} - \bar{F}^{-1} d\bar{x} \cdot F^{-1} d\bar{x} = d\bar{x} \cdot I\, d\bar{x} - dx \cdot \bar{F}^{-T} \bar{F}^{-1} dx = dx\, \underbrace{(\bar{I} - \bar{B}^{-1})}_{2\bar{e}}\, dx$$

the eulerian (almansi) strain tensor

Föreläsning 4

Spänningar ex.



1) $\bar{t} = \tilde{\bar{t}}(\bar{x}, t, \bar{n})$ – måst bero av yta/ snitt (normal)

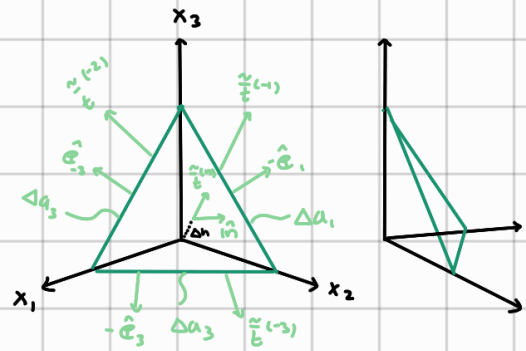
2) $\bar{t}^{(1)} = -\bar{t}^{(2)}$, $\hat{\bar{n}}^{(1)} = -\hat{\bar{n}}^{(2)}$ $\rightarrow$ $\tilde{\bar{t}}(\bar{x}, t, \bar{n}) = -\tilde{\bar{t}}(\bar{x}, t, \bar{n})$

CAUCHYS LEMMA

$$\boxed{\tilde{\bar{t}}(\bar{n}) = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta \tilde{\bar{f}}(\bar{n})}{\Delta a}}$$

CAUCHYS SPÄNNINGSFORMEL

Cauchys tetraeder (infitesimal i ett kartesiskt koordinatsystem vars hörn är $\bar{x}$)



$$\Delta V = \frac{1}{3} \Delta h \Delta a$$

newtons 2:a lag för massan i tetraedern:

volymskraft t.ex. g

netto accelerationen

$$\tilde{\bar{t}}^{(n)} \cdot \Delta a - \tilde{\bar{t}}^{(1)} \Delta a_1 - \tilde{\bar{t}}^{(2)} \Delta a_2 - \tilde{\bar{t}}^{(3)} \Delta a_3 + \rho \cdot \Delta V \tilde{\bar{f}} = \rho \Delta V \tilde{\bar{a}}$$

areorna Δa_1, Δa_2, Δa_3 är projektionerna av Δa mot koordinatplanen:

$$\begin{cases} \Delta a_1 = (\hat{\bar{e}}_1 \cdot \hat{\bar{n}}) \Delta a \\ \Delta a_2 = (\hat{\bar{e}}_2 \cdot \hat{\bar{n}}) \Delta a \\ \Delta a_3 = (\hat{\bar{e}}_3 \cdot \hat{\bar{n}}) \Delta a \end{cases}$$

inför

$$\tilde{\bar{t}}^{(n)} \cancel{\Delta a} - \tilde{\bar{t}}^{(1)} (\hat{\bar{e}}_1 \cdot \hat{\bar{n}}) \cancel{\Delta a} - \tilde{\bar{t}}^{(2)} (\hat{\bar{e}}_2 \cdot \hat{\bar{n}}) \cancel{\Delta a} - \tilde{\bar{t}}^{(3)} (\hat{\bar{e}}_3 \cdot \hat{\bar{n}}) \cancel{\Delta a} + \frac{1}{3} \rho \Delta h \cancel{\Delta a} (\tilde{\bar{f}} - \tilde{\bar{a}}) = 0$$

Krymp tetrahedern till en punkt. $\Delta h \to 0$

$$\tilde{\tilde{t}}^{(n)} = \tilde{\tilde{t}}^{(1)}(\hat{e}_1 \cdot \hat{n}) + \tilde{\tilde{t}}^{(2)}(\hat{e}_2 \cdot \hat{n}) + \tilde{\tilde{t}}^{(3)}(\hat{e}_3 \cdot \hat{n}) = \underbrace{(\tilde{\tilde{t}}^{(1)}\hat{e}_1 + \tilde{\tilde{t}}^{(2)}\hat{e}_2 + \tilde{\tilde{t}}^{(3)}\hat{e}_3)}_{\equiv \tilde{\tilde{\sigma}}} \cdot n$$

CAUCHYS SPÄNNINGSTENSOR.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \\ \tilde{t}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

* i en eulers betraktelse av kontinuummekaniken är cauchys spänningstensor det mest naturliga valet $\longrightarrow$ standard i strömmningsmekanik.

* för att möjliggöra en Lagrangesk betraktelse behöver vi också spännings tensorer som kan uttryckas i termer av referenskonfigurationen.

$$I\, dA = \tilde{\tilde{t}}\, da$$

$$\bar{P} \cdot \hat{N}\, dA = \tilde{\tilde{\sigma}}\, \hat{n}\, da$$

första piola-kirchoff spänningstensorn (nuvarande kraft per odeformerad area)

* det är möjligt att relatera kraften på det odeformerade areaelementet $d\bar{A}$ till kraften på det deformerade areaelementet $d\bar{a}$:

$$d\bar{F} = \bar{F}^{-1} d\tilde{\tilde{f}}$$

* detta gör det möjligt att definiera spänningstensor som:

$$d\bar{F} = \bar{S} \cdot \hat{N}\, dA$$

andra piola-kirchoff spänningstensor (transformeras nuvarande kraft per odeformerad area)

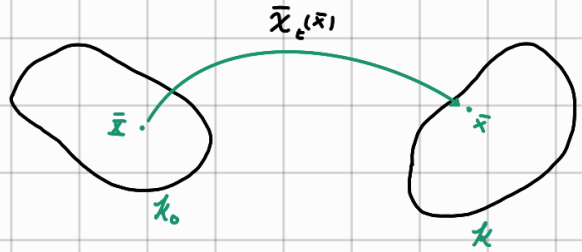
* vad händer i gränsen av mkt små (infinitesimala) deformationer?

infinitesimala deformationer $\left\| \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \right\| \ll 1$ $\rightarrow \bar{E} \approx \bar{e} = \bar{\varepsilon}$ och $\tilde{\tilde{\sigma}} \approx \bar{S}$

dessutom $\left\| \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \right\| \approx \frac{\partial u}{\partial \bar{X}}$

Föreläsning 5

Recap.



mappning / deformation: $d\bar{x} = \bar{F}\, d\bar{X}$ $\quad \bar{F} = \frac{\delta \bar{x}}{\delta \bar{X}} = \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{X}}$ Deformations-gradient tensorn.

$dv = J\, dV$ $\quad J = \det(\bar{F}) > 0$

Bra att ta:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \begin{cases} \left.\frac{\partial \hat{\phi}(\bar{X},t)}{dt}\right|_{\bar{X}=\text{fix}} \\ \frac{\partial \tilde{\phi}(\bar{x},t)}{\partial t} + \text{grad}\, \tilde{\phi} \cdot \bar{v} \end{cases}$$

Polär uppdelning

$$\bar{F} = \bar{R}\bar{U} = \bar{V}R$$

$$\bar{U}^2 = \bar{C} = \bar{F}^T\bar{F}$$

$$\bar{V}^2 = \bar{B} = \bar{F}F^T$$

Straintensors

$\bar{E} = \frac{1}{2}(\bar{C} - \bar{I})$ lagrangeska töjningstensorn

$\bar{e} = \frac{1}{2}(\bar{I} - \bar{B}^{-1})$ euerska töjningstensorn

Spänningar:

$$\tilde{\bar{t}}(\tilde{\bar{n}}) = \tilde{\bar{\sigma}} \cdot \tilde{\bar{n}}$$

$$\tilde{\bar{\sigma}}^T = \tilde{\bar{\sigma}}$$ CAUCHYSPÄNNINGSLAG

MEKANIKLAGARNA

RIKSLAGARNA

1) Masskonservering — MASSBALANCE (MB)
2) Linjär rörelsemängdsbalans (N2) — LINEAR MOMENTUM BALANCE (LMB)
3) Rörelsemängdsmomentbalans (N2 för rotation) — ANGULAR MOMENTUM BALANCE (AMB)
4) Energibalans (Termodynamikens 1ª)
5) ~~Entropibalans (TD 2ª)~~

massbalans

$$m = \int_{\mathcal{B}} dm$$

$$m = \begin{cases} \int_{\mathcal{K}_0} \rho_0 \, dV & \longrightarrow \rho_0 : \text{referensmassdensitet} \\ \int_{\mathcal{K}} \rho \, dv & \longrightarrow \rho : \text{rumslig/nuvarande massdensitet} \end{cases}$$

$$m = \int_{\mathcal{K}} \rho \, dv = \int_{\mathcal{K}_0} \rho J \, dV = \int_{\mathcal{K}_0} \rho_0 \, dV \longrightarrow \boxed{\rho_0 = \rho J}$$

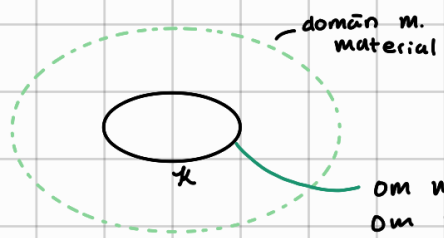
$$0 = \frac{dm}{dt} = \begin{cases} \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{K}_0} \rho_0 \, dV}_{\text{integralform}} = \int_{\mathcal{K}_0} \frac{d}{dt}\rho_0 \, dV = \int_{\mathcal{K}_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} dV \longrightarrow \underbrace{\boxed{\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0}}_{\text{Lokalform}} \\ \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{K}} \rho \, dv = \frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{K}} \rho \, dv = \frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{K}_0} \rho J \, dV = \int_{\mathcal{K}_0} \frac{D}{Dt}(\rho J) dV \\ \frac{D}{Dt}(\rho J) = \frac{D\rho}{Dt} J + \frac{DJ}{Dt}\rho = \frac{D\rho}{Dt} J + \rho J \, \mathrm{Div}\,\bar{v} = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \mathrm{div}\,\bar{v} = 0} \end{cases}$$

tr $\mathcal{K}_0$ ändras ej m. tid

referens konfig.

nuvarande konfig.

öppet vs slutet system.



om materialyta = slutet sys.
Om ytan ej följer partiklar
→ partiklar passerar in/ut = öppet sys.

RENALDS TRANSPORTTEOREM – slutet system

DIVERGENS TEOREM

$$0 = \frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{K}} \rho \, dv = \int_{\mathcal{K}} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \mathrm{Div}\,\bar{v}\right) dv = \int_{\mathcal{K}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,[\rho \bar{v}] \, dv = \left[\int_{\mathcal{K}} \mathrm{div}\,\bar{A} \, dv = \int_{\partial\mathcal{K}} \bar{A}\cdot\hat{n} \, da\right] =$$

$$= \int_{\mathcal{K}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{K}} \rho \cdot \bar{v} \cdot \hat{n} \, da \qquad (1)$$

RENALDS TRANSPORTTEOREM – öppet system.

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{K}} \rho \, dv = \int_{\mathcal{K}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{K}} \rho \cdot \bar{w} \cdot \hat{n} \, da \qquad \text{obs} \neq 0 \qquad (2)$$

hast i vår domän

(1) - (2) ger:

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{K}} \rho\, dv = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{K}} \rho\, dv + \int_{\partial\mathcal{K}} \rho(\bar{v}-\bar{\omega})\cdot\hat{n}\, da = 0$$

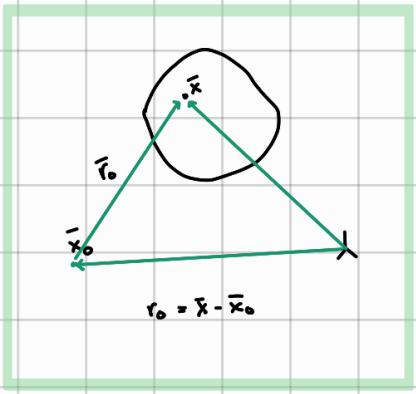
rörelsemängdsbalanserna

- linjär (translationell) rörelsemängd hos materialet i $\mathcal{K}$:

$$\bar{P} = \int_{\mathcal{B}} d\bar{p} = \int_{\mathcal{K}} \bar{p}\, dv = \int_{\mathcal{K}} \rho\, \bar{v}\, dv$$

- vinkelmoment (roterande) hos materialet i $\mathcal{K}$ m.a.p en (stationär / fix) punkt $\bar{x}_0$:

$$\bar{\mathcal{H}}^0 = \int_{\mathcal{B}} \bar{r}_0 \times d\bar{p} = \int_{\mathcal{K}} \bar{r}_0 \times \rho\bar{v}\, dv$$



EULERSRÖRELSELAGAR:

(LMB) $\boxed{\frac{D\bar{P}}{Dt} = \bar{F}}$ KRAFT och $\boxed{\frac{D\bar{\mathcal{H}}^0}{Dt} = \bar{M}^0}$ (AMB)

- Det finns två typer av krafter: volymkrafter (B) & ytkrafter (S)

$$\bar{F} = \bar{F}_B + \bar{F}_S$$

$$\bar{F}_B = \int_{\mathcal{B}} d\bar{F}_B = \int_{\mathcal{K}} \bar{f}_B\, dv = \int_{\mathcal{K}} \rho\, \underbrace{\bar{b}}_{\text{acc.}}\, dv$$

$$\bar{F}_S = \int_{\mathcal{B}} d\bar{F}_S = \int_{\partial\mathcal{K}} \underbrace{\bar{t}}_{\text{spänning tensor}}\, da$$

- antag: $\bar{M}^0 = \bar{M}_B^0 + \bar{M}_S^0$ (inga nya effekter!)

$$\bar{M}_B^0 = \int \bar{r}_0 \times d\bar{F}_B = \int_{\mathcal{K}} \bar{r}_0 \times \rho\, \bar{b}\, dv$$

$$\bar{M}_S^0 = \int \bar{r}_0 \times d\bar{F}_S = \int_{\partial\mathcal{K}} \bar{r}_0 \times \bar{t}\, da$$

Föreläsning 6

Från förra gången

	integral form	lokal form
nuvarande konfiguration	$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{K}} \rho \, dv = 0$	$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \mathrm{div}\,\bar{v} = 0$ kontinuitetsekvationen
referens konfiguration	$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{K}_0} \rho_0 \, dV = 0$	$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$, $\rho_0 = \rho J$

(LMB) $$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{K}} \rho \bar{v} \, dv = \int_{\mathcal{K}} \rho \bar{b} \, dv + \int_{\partial K} \bar{t} \, da}$$

(AMB) $$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{K}} \bar{r}_0 \times \rho \bar{v} \, dv = \int_{\mathcal{K}} \bar{r}_0 \times \rho \bar{b} \, dv + \int_{\partial K} \bar{r}_0 \times \bar{t} \, da.}$$

Cauchys rörelselagar

↳ lokala samband för nuvarande konfig.

(LMB) $$\underbrace{\frac{D}{Dt}\int_{K} \rho \bar{v} \, dv} = \int_{K} \rho \bar{b} \, dv + \underbrace{\int_{\partial K} \bar{t} \, da}$$

(dv = J dV) $$\underbrace{\int_{K_0} \rho \bar{v} J \, dV} \qquad \underbrace{\int_{\partial K} \bar{\sigma} \hat{\bar{n}} \, da}$$

($\rho_0 = \rho J$) $$\underbrace{\int_{K_0} \rho_0 \bar{v} \, dV} \qquad \int_{K} \mathrm{div}\,\bar{\sigma} \, dv$$

(K₀ var. ej i tid) $$\underbrace{\int_{K_0} \frac{D}{Dt}(\rho_0 \bar{v}) \, dV}$$

(ρ_0 var. ej i tid) $$\underbrace{\int_{K_0} \rho_0 \frac{D\bar{v}}{Dt} \, dV}$$

$$\int_{K} \rho \frac{D\bar{v}}{Dt} \, dV$$

$$\int_{K} \left(\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} - \rho \bar{b} - \mathrm{div}\,\bar{\sigma} \right) dv = 0$$

CAUCHYS SPÄNNINGSFORMEL

$$\tilde{\bar{t}}(\bar{x}, t, \hat{\bar{n}}) = \tilde{\bar{\sigma}}(\bar{x}, t)\hat{\bar{n}}$$

DIVERGERANDE THEOREM

$$\int_{K} \mathrm{div}\,\bar{A} \, dv = \int_{\partial K} \bar{A} \hat{\bar{n}} \, da$$

$$\rightarrow \boxed{\operatorname{div}(\bar{\sigma}) + \rho\bar{b} = \rho\frac{D\bar{v}}{Dt}}$$

LOKAL/NUVARANDE VERSION AV LMB

$$\boxed{\bar{\sigma}^T = \bar{\sigma}}$$

LOKAL/NUVARANDE FORM AV AMB

- Kvar är nu referensformen av rörelsemängdsbalansen
- Vi vill gå från $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}_0$, $\partial\mathcal{K} \rightarrow \partial\mathcal{K}_0$ ... hur?
- Kom ihåg! första Piola-Kircoffspänningstensorn (nuvarande kraft / odeformerad area)

$$\underbrace{\tilde{\bar{t}}(\bar{x},t,\hat{\bar{n}})}_{\text{cachys spänningsv.}} = \underbrace{\tilde{\bar{\sigma}}(\bar{x},t)}_{\text{cauchys spänningstensor}}\underbrace{\hat{\bar{n}}}_{\text{normal i nuvarande konfiguration}} \qquad \underbrace{\hat{\bar{T}}(\bar{X},t,\hat{\bar{N}})}_{\text{Piola spänningstensor}} = \hat{\bar{P}}(\bar{X},t,\underbrace{\hat{\bar{N}}}_{\text{normal i referenskonfig.}})$$

- Vi har att $\bar{P} = J\bar{\sigma}\cdot\bar{F}^{-T} \longrightarrow \bar{\sigma} = \frac{1}{J}\bar{P}\bar{F}^T$

AMB: $\bar{\sigma} = \frac{1}{J}\bar{P}\bar{F}^T = \bar{\sigma}^T = \frac{1}{J}\bar{F}\bar{P}^T \longrightarrow \boxed{\bar{P}\bar{F}^T = \bar{F}\bar{P}^T}$

LOKALA REFERENSKONFIG

LMB:

$$\underbrace{\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{K}}\rho\bar{v}\,dv}_{\underbrace{\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{K}_0}\rho_0\bar{v}\,dV}_{\int_{\mathcal{K}_0}\rho_0\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}dV}} = \underbrace{\int_{\mathcal{K}}\rho\bar{b}\,dv}_{\int_{\mathcal{K}_0}\rho_0\bar{b}\,dV} + \underbrace{\int_{\partial\mathcal{K}}\bar{t}\,da}_{\underbrace{\int_{\partial\mathcal{K}_0}\bar{T}\,dA}_{\underbrace{\int_{\partial\mathcal{K}_0}\bar{P}\hat{\bar{N}}\,dA}_{\int_{\mathcal{K}_0}\operatorname{Div}\bar{P}\,dV}}}$$

$$\left[\begin{array}{l} v = J\,dV \\ \rho_0 = \rho J \\ \rho\,dv = \rho_0\,dV \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{l} \bar{u} = \bar{x} - \bar{X} \\ \bar{v} = \frac{D\bar{u}}{Dt} \\ \frac{D\bar{v}}{Dt} = \frac{\partial^2\bar{u}}{dt^2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{K}_0}\left(\rho_0\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2} - \rho_0\bar{b} - \operatorname{Div}\bar{P}\right)dV = 0$$

$$\boxed{\operatorname{Div}\bar{P} + \rho_0\bar{b} = \rho_0\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}}$$

LOKALA REFERENSFORMEL AV LMB

SAMMANFATTNING AV DE LOKALA RÖRELSELAGARNA

	nuvarande konfiguration	referens konfiguration
MB	$\frac{D\rho}{dt} + \rho \, \mathrm{div}(\bar{v}) = 0$	$\rho_0 = \rho J$
LMB	$\mathrm{div}(\bar{\sigma}) + \rho \bar{b} = \rho \frac{D\bar{v}}{Dt}$	$\mathrm{Div}(\bar{P}) + \rho_0 \bar{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$
AMB	$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^T$	$\bar{P}\bar{F}^T = \bar{F}\bar{P}^T$

Energibalans

↳ bygger på termodynamikens huvudsats;

$$\frac{D}{Dt}\underbrace{(\underbrace{K}_{\text{kinetisk energi}} + \underbrace{U}_{\text{inre energi}})}_{\text{tot energi}} = \underbrace{W}_{\text{arbete/tid som yttre krafter utför}} + \underbrace{Q_n}_{\text{värmetillförsel till sys}}$$

$$K = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{K}} \rho \bar{v} \cdot \bar{v} \, dv \qquad W = \int_{\mathcal{K}} \rho \bar{b} \cdot \bar{v} \, dv + \int_{\partial\mathcal{K}} \bar{t} \cdot \bar{v} \, da$$

$$U = \int_{\mathcal{K}} \underbrace{e}_{\text{specifik energi}} \, dv \qquad Q_n = -\int_{\partial\mathcal{K}} \hat{n} \underbrace{\bar{q}}_{\text{värmeflux vektor}} \, da + \int_{\mathcal{K}} \underbrace{\rho r_n}_{\text{inre värmetillskottning/massenhet}} \, dv$$

$$0 = \int_{\mathcal{K}} \left(\rho \frac{De}{Dt} - \underbrace{\bar{\sigma} : \bar{D}}_{\text{"Dubbel Dot"}} + \mathrm{div}\, \bar{q} - \rho r_n \right) dv = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho \frac{De}{Dt} = \bar{\sigma} : \bar{D} - \mathrm{div}\, \bar{q} + \rho r_n}$$

LOKAL RUMSLIG FORM AV EB

$$\left[(\bar{A}\bar{B}) : (\bar{C}\bar{D}) = (\bar{A} \cdot \bar{C})(\bar{B} \cdot \bar{D}) \right]$$

\# okända : $\underset{(3)}{\bar{v}} + \underset{(1)}{\rho} + \underset{(6)}{\bar{\sigma}} = 10$

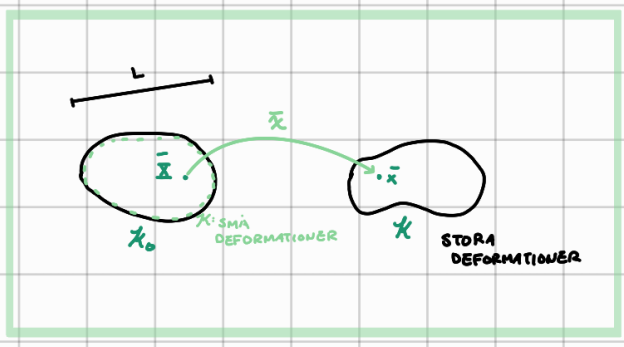
\# ekvationer: $\underset{(1)}{MB} + \underset{(3)}{LMB} + \underset{(0)}{AMB} = 4$

ty redan använt

→ Saknar 6 ekv!! :o

Föreläsning 7

Linjär elasticitet.



L = representativ längddimension

$\bar{x} = \bar{X} + \bar{u}$ $\qquad$ $\bar{u}$ = förflyttningsvektor

$\bar{F} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{X}} = \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}} = \bar{I} + \bar{H}$ $\qquad$ $\bar{H}$ = förflyttningstensor

Små deformationer: $|H| \ll 1$ $\quad$ ($|u|/L \ll 1$)

linjäriserade versioner av rörelselagarna räcker!

TÖJNINGSTENSORERNA

$\bar{C} = \bar{F}^T F$

$$\bar{E} = \frac{1}{2}(\bar{C} - \bar{I}) = \frac{1}{2}((\bar{I} + \bar{H}^T)(\bar{I} + \bar{H}) - I) = \frac{1}{2}(\bar{H} + \bar{H}^T) + \underbrace{\frac{1}{2}\bar{H}^T H}_{\text{kasta!}} \approx \frac{1}{2}(\bar{H} + \bar{H}^T) = \bar{\epsilon}$$

infinitesimala töjningstensorn

$\bar{B} = \bar{F}\bar{F}^T$

$$\rightarrow \quad \bar{e} = \frac{1}{2}(\bar{I} - \bar{B}^{-1}) = \{\bar{F}^{-1} \approx \bar{I} - \bar{H}\} = \frac{1}{2}(\bar{I} - (\bar{I} - \bar{H}^T)(\bar{I} - \bar{H})) = \frac{1}{2}(\bar{H}^T + H) - \underbrace{\frac{1}{2}\bar{H}^T\bar{H}}_{\text{kasta!}}$$

$$\approx \frac{1}{2}(\bar{H}^T + H) = \bar{\epsilon}$$

vad betyder detta? $\Rightarrow$ alla mått på töjning är identiska i den linjäriserade beskrivningen!

DERIVATOR/GRADIENTER

$\bar{u}$ liten $\rightarrow$ $\bar{x} \approx \bar{X}$, så derivator m.a.p $\bar{X}$ eller $\bar{x}$ är ekvivalenta

SPÄNNINGSTENSORN

$$J \approx 1 + \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = 1 + \underset{\text{trace}}{\mathrm{tr}}\,\bar{\epsilon} \approx 1$$

$\rho_0 = \rho J \approx \rho$

$\rightarrow$ "skillnaden är så liten = i princip samma."

$\rightarrow$ i den linjäriserade beskrivningen finns bara en densitet

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{J}\bar{P}\bar{F}^T \approx \bar{P}(\bar{I}+\bar{H})^T = \bar{P} + \bar{P}\bar{H}^T \approx \bar{P}$$

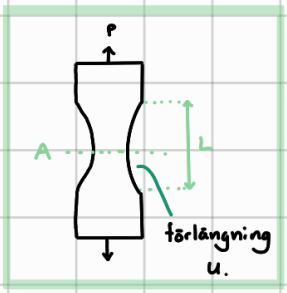
$$\bar{S} = \bar{F}^{-1}\bar{P} \approx (\bar{I}-\bar{H})\bar{P} = \bar{P} - \bar{H}\bar{P} \approx \bar{P} = \boxed{\bar{\sigma}}$$

infinitesimala spänningstensorn.

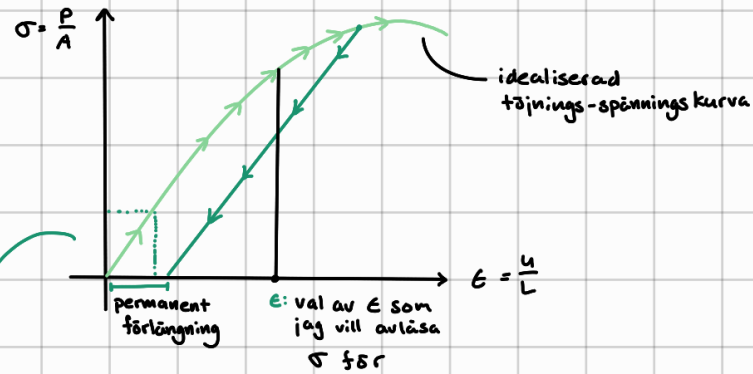
vad betyder detta? ⇒ alla mått på spänning är identiska i den linjäriserade beskrivningen!

LMB: $\boxed{\operatorname{div}(\sigma) + \rho\bar{b} = \rho\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}}$

materialmodellering

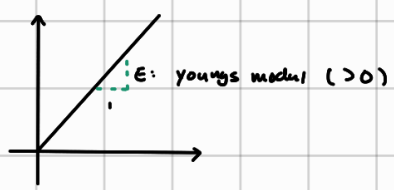


L = längd före
u = längd efter



- det finns flera σ för ett ε
- ingen "enkel" funktion kan avspegla detta
- Spänningen beror av hela historiken av deformationen

ELASTISKA DOMÄNEN



1D: $\sigma = E\epsilon$ (hooks lag)

3D: $\bar{\sigma} = \bar{\mathbb{C}}\bar{\epsilon}$

STYVHETSTENSORN

$$\underbrace{\sigma_{ij}}_{3\times3} = \underbrace{\mathbb{C}_{ijkl}}_{\substack{3\times3\times3\times3 \\ =81}} \underbrace{\epsilon_{kl}}_{3\times3}$$

Symetrisk = 6 ober komp.

6 ober. komp.

6×6 = 36

$\mathbb{C}$ är också symmetrisk ⇒ 21

VOIGT NOTATION

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{normal spänning} \\ \\ \\ \text{skjuvspänning} \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\underset{6\times1}{\{\sigma\}} = \underset{6\times6}{[\mathbb{C}]} \underset{6\times1}{\{\epsilon\}}$$

$$\{\epsilon\} = \underbrace{[S]}_{\text{compliance matrix}} \{\sigma\}$$

$$[\mathbb{C}] = [S]^{-1}$$

isotropa material

$$[S] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & & & \\ & 1/E & -\nu/E & & \emptyset & \\ & & 1/E & & & \\ \hline & & & 1/\mu & & \\ & \emptyset & & & 1/\mu & \\ & & & & & 1/\mu \end{array}\right]$$

E : Youngs modul > 0

ν : Poissonratio

μ : skjuvningsmodul > 0

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$\rightarrow$ 2 ober komponentes!

$$[S]^{-1} = [\mathbb{C}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & & & \\ & 2\mu+\lambda & \lambda & & \emptyset & \\ & & 2\mu+\lambda & & & \\ \hline & & & \mu & & \\ & \emptyset & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{array}\right]$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$ – Lamé konstant

$$\bar{\sigma} = \lambda \, tr(\bar{\epsilon}) \bar{I} + 2\mu \bar{\epsilon} = \left[\bar{\epsilon} = \tfrac{1}{3} tr \bar{\epsilon} \bar{I} + \bar{\epsilon}^{dev}\right] = \underbrace{(\lambda + 2\mu/3)}_{\kappa \text{ : bulkmodul } > 0} tr(\bar{\epsilon}) \bar{I} + 2\mu \bar{\epsilon}^{dev}$$

$$\boxed{\bar{\sigma} = \kappa \, tr \bar{\epsilon} \bar{I} + 2\mu \bar{\epsilon}^{dev}}$$

fluider

- endast en konfiguration av intresse (nuvarande)
- $\bar{v}$ (ist för $\bar{u}$) karaktäriserar deformation
- antag inkompressibel strömning $J = 1$, ρ = konstant.

RÖRELSELAGARNA

MB: $\underbrace{\frac{D\rho}{Dt}}_{=0} + \rho \, \mathrm{div}\, \bar{v} = 0$ } $\boxed{\mathrm{div}(\bar{v}) = 0}$

LMB: $\boxed{\mathrm{div}(\bar{\sigma}) + \rho \bar{b} = \frac{D\bar{v}}{Dt}}$

ENKLAST MÖJLIGA ANALOGI M. ELASTISK SOLID

Inkompressibelt: $k \to \infty$

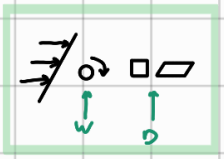
$\mathrm{tr}\,\bar{\varepsilon} \to 0$

$k \, \mathrm{tr}\,\bar{\varepsilon} = -p$

för solid: spänningen ges som funktion av $\bar{\varepsilon} \longleftrightarrow (\nabla \bar{u})^{sym}$

för fulid: spänningen ges som funktion av $\bar{D} \longleftrightarrow (\nabla \bar{v})^{sym}$

$$\mathrm{grad}\,\bar{v} = \bar{L} = \bar{L}^{sym} + \bar{L}^{antisym} = \underbrace{\bar{D}}_{\text{deformation}} + \underbrace{\bar{W}}_{\text{rotation}}$$



$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + 2\mu\bar{D}$$

ny var. konstant (viskositet)

NEWTONSK FLUID

TVÅ FLUIDEGENSKAPER: ρ och μ

$$\mathrm{div}(\bar{v}) = 0$$

$$-\mathrm{grad}(p) + \mu \, \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\bar{v}) + \rho\bar{b} = \rho\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}(\bar{v})\,\bar{v}\right)$$

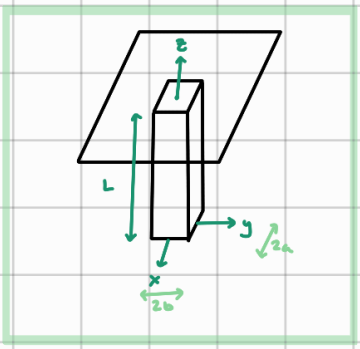
Föreläsning 8

NOTATION

- div $\bar{A}$ = $\nabla \cdot \bar{A}$
- grad $\bar{A}$ = $\nabla \bar{A}$
- curl $\bar{A}$ = $\nabla \times \bar{A}$
- div (grad $\bar{A}$) = $\nabla^2 \bar{A}$ "Laplacian"

→ går igenom en ppt → se ppt för olika ekvationer !!

EX,



Densitet: ρ

Toppen är fast inspänd: $u_x = u_y = u_z = 0$ vid $x, y, z = 0$

$f_z = -\rho g \hat{e}_z$,

Sök: $\bar{u}(x)$

Randvilkor

$\bar{u}(0,0,L) = 0$

$\bar{t}(x,y,0) = 0$

$\bar{t}(x, \pm b, z) = 0$

$\bar{t}(\pm a, y, z) = 0$

$\bar{t}(x \neq 0, y \neq 0, L) = 0$

Det innebär att överallt på randen (utom i $x = y = 0$, $z = L$) så:

$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$

Eftersom kroppen är fri att ändra sin geometri kommer dessa spänningskomponenter förbli 0 inuti kroppen

⇒ Antag att $\sigma_{zz} = S(z)$,

samtliga komponenter i $\bar{\sigma}$ nu "kända"

randvilkoret $\bar{t}(x,y,0) = 0$, kräver att $S(0) = 0$

VILKA ÄR VÅRA RÖRELSELAGAR?

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho_0 f_x = \rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$ trivialt uppfylld

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho_0 f_y = \rho_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$ trivialt uppfylld

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho_0 f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \longrightarrow \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho_0 f_z = 0$$

integrera: $S(z) = \rho g z + C$ randvilkoret $S(0) = 0$ $\rightarrow$ $C = 0$ $S = \rho g z = \sigma_{zz}$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho g z \end{bmatrix}$$

är $\bar{\sigma}$ kompatibelt m. ett töjningsfält?

$$\Rightarrow \nabla^2 \bar{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \nabla(\nabla \operatorname{tr}(\bar{\sigma})) = 0$$

trivialt uppfylld $\therefore$ σ är ok!!

vi går $\bar{\sigma} \rightarrow \bar{\epsilon} \rightarrow \bar{u}$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & \emptyset & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & & \\ & \emptyset & & & \frac{1-2\nu}{2} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu \epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy} + (1-\nu)\epsilon_{zz}) = \rho g z$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{zz}) = 0$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu \epsilon_{xx} + (1-\nu)\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{zz}) = 0$$

$$\rightarrow \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \rho g z, \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0 \quad \epsilon_{zz} = \frac{1}{E} \rho g z$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{E}\rho g z & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}\rho g z & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E}\rho g z \end{bmatrix} \qquad \bar{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \bar{u} + (\nabla \bar{u})^T)$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{E}\rho g z \rightarrow u_z = \frac{1}{2E}\rho g z^2 + h(x,y)$$ $\boxed{h \text{ okänd funk}}$

$$2\epsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 \longrightarrow \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial x} \rightarrow u_x = -\frac{\partial h}{\partial x} z + g(x,y)$$ $\boxed{g \text{ okänd funk}}$

$$2\epsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0 \longrightarrow \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial y} \rightarrow u_y = -\frac{\partial h}{\partial y} z + f(x,y)$$ $\boxed{f \text{ okänd funk}}$

Föreläsning 9

Forts.

$$u_z = \frac{1}{2E}\rho g z^2 + h(x,y)$$
$$u_x = -\frac{\partial h}{\partial x} z + g(x,y)$$
$$u_y = -\frac{\partial h}{\partial y} z + f(x,y)$$

f, g, h
- okända funktioner
- ska bestämmas.

$$\epsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E}\rho g z \quad \text{och} \quad \epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial h}{\partial x} z + g(x,y)\right) = -\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial x}$$

om giltig för alla z;

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\nu}{E}\rho g \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \rightarrow g = G(y)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\nu}{E}\rho g z \quad \text{och} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial h}{\partial y} z + f(x,y)\right) = -\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} z + \frac{\partial f}{\partial y}$$

om giltig för alla z

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\nu}{E}\rho g \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \rightarrow f = F(x)$$

Från $\epsilon_{xy} = 0$:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = -2\frac{\partial h^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Vi kan anta följande form för h:

$$h(x,y) = \frac{\nu}{2E}\rho g (x^2+y^2) + C_4 x + C_5 y + C_6 \longrightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\rightarrow \frac{dG}{dy} + \frac{dF}{dx} = 0 \rightarrow \begin{cases} G(y) = C_1 y + C_2 \\ F(x) = -C_1 x + C_3 \end{cases}$$

C_i - konstanter att bestämma

$$u_x = -\frac{\partial h}{\partial x} z + g(x,y) = -\frac{\nu}{E}\rho g x z - C_4 z + C_1 y + C_2$$
$$u_y = -\frac{\partial h}{\partial y} z + f(x,y) = -\frac{\nu}{E}\rho g y z - C_5 z - C_1 x + C_3$$
$$u_z = \frac{\rho g}{2E}\left[z^2 + \nu(x^2+y^2)\right] + C_4 x + C_5 y + C_6$$

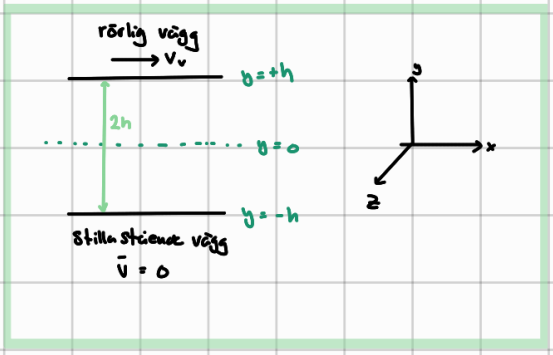
$$\boxed{\bar{u}(0,0,L) = 0 \rightarrow C_2 = C_3 = 0, \quad C_6 = -\frac{\rho g L^2}{2E}}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0$$

tillåter ej rotation!! $\rightarrow C_1 = C_4 = C_5 = 0$

gör igenom ppt för strömning.

Couette - flöde



Sök: $\bar{v}$

Antag: $V_y = V_z = 0$

laminär strömning (ingen tubulans)

Steady state.

$V_x = V_x(y)$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = \rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = \rho\left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x\frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)$$

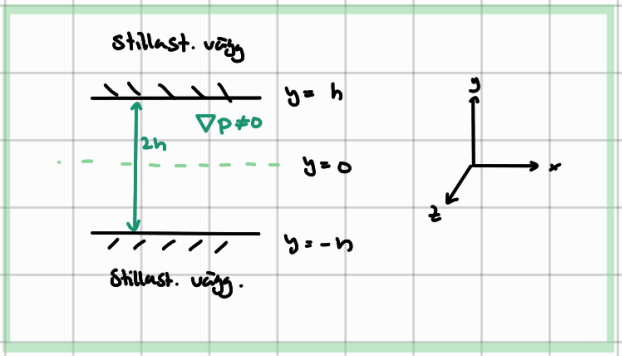
$$\mu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_z = \rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x\frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

$$\Rightarrow \mu\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = 0$$

integrera! $\frac{dV_x}{dy} = C_1 \rightarrow V_x = C_1 y + C_2$

randvilkor! $\begin{cases} V_x(y=-h) = 0 \\ V_x(y=h) = V_v \end{cases} \Rightarrow V_x = \frac{V_v}{2}\left(1 + \frac{y}{h}\right)$

poiseuille - flöde



Sök: v

Antag: $V_y = V_z = 0$

Laminär strömning

Steady state

$V_x = V_x(y)$

rörelselagar:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

icke linjär?

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = \rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_z = \rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0}$$

$$\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad \rightarrow \mu\frac{d^2 v_x}{d^2 y} = \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}y + C_1 \quad \rightarrow \quad v_x = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

randvillkor: $\begin{cases} v_x(y=h) = 0 \\ v_x(y=-h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2} \end{array}$

$$\Rightarrow v_x = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2}\left(1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right)$$

parabolisk!!!
μ spelar roll!!

Föreläsning 10

Recap

- termodynamikens första huvudsats:

$$\frac{D}{Dt}\underbrace{(\underbrace{K}_{\text{kinetisk energi}} + \underbrace{U}_{\text{läges-energi}})}_{\text{total energi}} = \underbrace{W}_{\text{arbete per tidsenhet som yttre krafter utför på systemet}} + \underbrace{Q_h}_{\text{värmetillförsel till systemet.}}$$

- LOKALFORM AV EB NUVARANDE KONFIGURATIONEN:

$$\underbrace{\rho}_{\text{densitet}} \underbrace{\frac{De}{Dt}}_{\text{specifik inre energi}} = \underbrace{\bar{\sigma}}_{\text{Cauchys spänningstensor}} : \underbrace{\bar{D}}_{\text{symetriska delen av } \bar{L}} - \underbrace{\operatorname{div} \bar{q}}_{\text{värmeflödesvektorn}} + \underbrace{\rho r_h}_{\text{inre värmetillsättning per massenhet.}}$$

- GLOBALFORM AV EB NUVARANDE KONFIGURATIONEN:

$$\int_K \left(\rho \frac{De}{Dt} - \bar{\sigma} : \bar{D} + \operatorname{div} \bar{q} - \rho r_h\right) dV = 0$$

$$\bar{E} = \bar{e} = \bar{\varepsilon}$$

$$\bar{L} = \underbrace{\tfrac{1}{2}(\bar{L} + \bar{L}^T)}_{\text{Sym. delen } = \bar{D}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\bar{L} - \bar{L}^T)}_{\text{anti-symetriska delen } = \bar{W}}$$

$$\bar{L} = \operatorname{grad}(\bar{v}) = \nabla \bar{v}$$

$$\bar{D} = \tfrac{1}{2}(\bar{L} + \bar{L}^T)$$

om $\bar{\sigma}$ symetrisk: $\bar{\sigma} : \bar{D} = \bar{\sigma} : \bar{L}$

Låt oss försöka finna en smidigare form av EB som vi kan använda för att lösa för temperaturen i en fluid.

$$\underbrace{\bar{\sigma} : \bar{D}}_{\text{arbete per tidsenhet utfört på ett volymelement för att ändra dess volym och form.}} = \underbrace{-p(\nabla v)}_{\text{arbete / tidsenhet för att åstadkomma volymändring (REVERSIBEL)}} + \underbrace{\bar{\tau} : \nabla \bar{v}}_{\text{arbete per tidsenhet. för att åstadkomma formändring (IRREVERSIBEL)}} = -p(\nabla \bar{v}) + \underbrace{\Phi}_{\text{dissipationsfunktionen}}$$

inkompressibel strömning: $\Delta \bar{v} = 0$

FÖR NEWTONS FLUID

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + \bar{\tau}$$
$$\tau = 2\mu \bar{D}$$

→ i "alla vanliga" situtationer ger detta en obetydlig påverkan på temperaturen!!

vad ska vi göra m. q?

↳ vi behöver ett konstruktivt samband! FOURIERS LAG

$$\underset{[W/m^2]}{\bar{q}} = \underset{\substack{\text{termisk} \\ \text{konduktivitet} \\ [W/m^2K]}}{-\bar{k}} \cdot \underset{[K]}{\nabla T}$$

FÖR ISOTROPA MATERIAL $\longrightarrow$ $\boxed{q = -k\nabla T}$

för solider

$$\boxed{\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t}}$$

antag att e är en funktion av temperaturen:

$$e = \underset{\substack{\text{Specifik} \\ \text{Värmekapacitet} \\ [J/kgK]}}{c} T \longrightarrow e = c_p T \longrightarrow \rho \frac{De}{Dt} = \rho c_p \frac{DT}{Dt} \approx -\operatorname{div}(\bar{q}) + \rho_{rh} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho_{rh} = k \nabla^2 T + \rho_{rh}$$

$$\boxed{\rightarrow \rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \rho_{rh}}$$

naturlig konvektion

$$\begin{cases} \nabla \bar{v} = 0 \\ \rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{v} + \rho g \end{cases}$$

boussineq apoximation

$$\rho = \rho_0 - \underset{\substack{\text{termisk} \\ \text{expontionskoeff.}}}{\beta} \rho_0 (T - T_0)$$

ρ_0 är $\rho(T_0)$

termisk expansion

- volymandring av material med T kan orsaka töjning

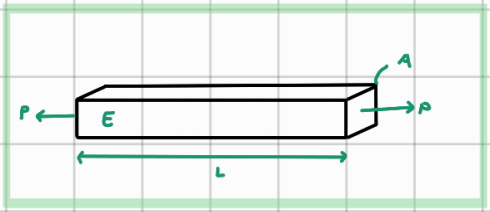
$$\epsilon^{term} = \underset{\substack{\text{temperaturutvidgningskoefficient}}}{\alpha} \Delta T$$

- totala töjningen blir:

$$\epsilon = \epsilon^{mekanisk} + \epsilon^{termiska} = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T \rightarrow \sigma = E(\epsilon - \alpha \Delta T)$$

Föreläsning 11

Stång



P: yttre axiellt riktad kraft

A: tvärsnittsarea

E: youngs modul

L: längd

JÄMVIKTSSAMBAND: $N = P$ — N: inre normalkraft

KINEMATISKSAMBAND: $\bar{\varepsilon} = \frac{\delta}{L}$ — δ: deformation

KONSTITUTIVTSAMBAND: $\sigma = E\bar{\varepsilon}$ — $\bar{\varepsilon}$: medeltöjning

Inuti system gäller $N = \sigma A$ — σ: spänning

Vi beskriver stångelement i ett endimentionellt koordinatsystem där höger riktning längs positiv koordinataxel.

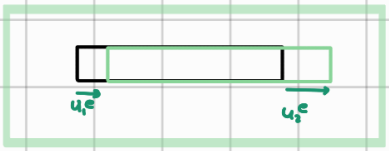
$\Rightarrow$ jmv: $P_1^e + N = 0 \Rightarrow N = -P_1^e$

jmv: $P_2^e - N = 0 \Rightarrow N = P_2^e$

$N > 0$: inre dragnormalkraft

$N < 0$: inre tryckenormalkraft

för deformationen:



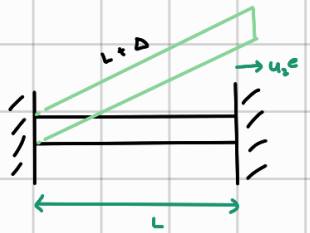
$$\delta = (L + u_2^e - u_1^e) - L = u_2^e - u_1^e$$

Kombinera: $\delta = [-1, 1]\begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix} \rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{\delta}{L} = \frac{1}{L}[-1, 1]\begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix} \rightarrow \sigma = E\bar{\varepsilon} = \frac{E}{L}[-1, 1]\begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}$

$$\rightarrow N = \sigma A = \frac{EA}{L}[-1, 1]\begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} N = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}[-1, 1]\begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{elementstyvhetsmatris}}\begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}$$

ex - duschdraggori



Sök: N (normalkraften i stången pga inspänningen)

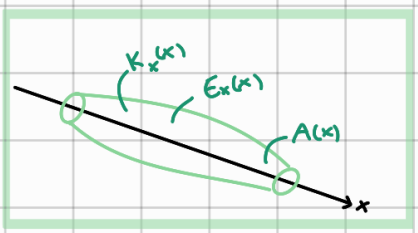
antag att stången placeras så att $u_1^e = 0$

för att stången ska få plats måste vi då ha $u_2^e = -\Delta$

$$\begin{bmatrix} p_1^e \\ p_2^e \end{bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta \end{bmatrix} = \frac{EA\Delta}{L}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

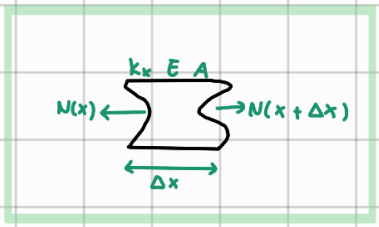
ine normalkraften erhålls som $N = -p_1^e = p_2^e = -\frac{EA\Delta}{L}$

Stångens differentialekvation



k_x : volymlast [N/m³] som verkar längs stången (t.ex egenvikt)

Studera ett infinitesimalt volymelement.

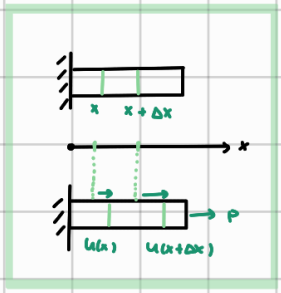


jmv: $N(x+\Delta x) - N(x) + \int_x^{x+\Delta x} k_x A\,dx = 0$

Δx litet $\rightarrow$ $N(x+\Delta x) - N(x) + k_x A \Delta x = 0$

Div. m. Δx och låt $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{N(x+\Delta x) - N(x)}{\Delta x} + k_x A = \frac{dN(x)}{dx} + k_x(x)A(x) = 0$$



$$\bar{\epsilon} = \frac{\delta}{L} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

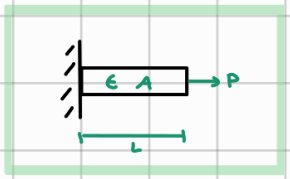
Sålunda:

$$\epsilon(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du(x)}{dx} \qquad \left(\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)$$

Den elastiska stångens differentialekvationen blir:

$$\epsilon = \frac{du}{dx} \rightarrow \sigma = E\epsilon = E\frac{du}{dx} \rightarrow N = \sigma A = EA\frac{du}{dx} \rightarrow -\frac{dN}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) = k_x A$$

ex – stängelement m. konstanta egenskaper



Sök: $u(x)$

$$-\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) = K_x A \quad ,$$

här: E, A konst.
$K_x = 0$

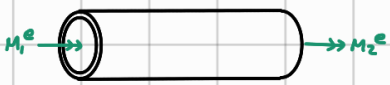
$$\rightarrow -\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad \rightarrow \frac{du}{dx} = \epsilon = C_1 \quad \rightarrow u(x) = C_1 x + C_2$$

randvillkor: $u(0) = 0 \quad \rightarrow C_2 = 0$

$N(L) = P \quad \rightarrow N = EA\frac{du}{dx} = EAC_1 \quad \rightarrow C_1 = P/EA$

alltså $u(x) = \frac{P}{EA}x$

axel



tunnväggigt elastiskt cylindriskt rör

M_1^e, M_2^e : yttre vridande moment

h : rörtjocklek

r : (medel) radie

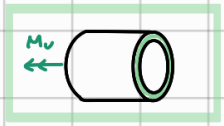
M_v : inre vridande moment.

SNITTA:

jmv: $M_1^e + M_v = 0 \quad \rightarrow M_1^e = -M_v$

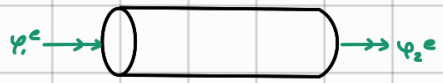
jmv: $M_2^e - M_v = 0 \quad \rightarrow M_2^e = M_v$

tänk tvärsnitt → antag konstant skjuvspänningar τ över tvärsnittet



$$M_v = \tau \, 2\pi r h \, r \quad \Leftrightarrow$$

KINEMATIK



$\varphi(x)$: vridvinklar

$\varphi(0) = \varphi_1^e$

$\varphi(L) = \varphi_2^e$

γ : skjuvvinkel / skjuvtöjning

antag små deformationer $(|\gamma| << 1)$

$$\rightarrow \tan(\gamma) \approx \gamma \qquad \tan(\gamma) = \frac{(\varphi(L) - \varphi(0))r}{L}$$

$$\gamma L = (\varphi(L) - \varphi(0))r \longrightarrow \gamma = \frac{r}{L}(\varphi(L) - \varphi(0)) = \frac{r}{L}(\varphi_2^e - \varphi_1^e)$$

Konstitutivt samband: $\tau = G\gamma$ $\quad$ G: Skjuvmodul $[N/m^2]$, $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

Kombinera: $\varphi(L) - \varphi(0) = [-1, 1] \begin{bmatrix} \varphi_1^e \\ \varphi_2^e \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \gamma = \frac{r}{L}(\varphi(L) - \varphi(0)) = \frac{r}{L}[-1, 1] \begin{bmatrix} \varphi_1^e \\ \varphi_2^e \end{bmatrix} \rightarrow \tau = G\gamma = \frac{Gr}{L}[-1, 1] \begin{bmatrix} \varphi_1^e \\ \varphi_2^e \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow M_v = \tau 2\pi r^2 h = \frac{G 2\pi r^2 h}{L}[-1, 1] \begin{bmatrix} \varphi_1^e \\ \varphi_2^e \end{bmatrix}$$

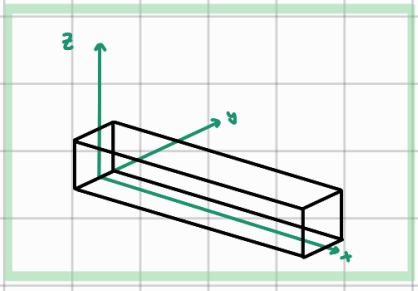
K_v: vridstyvhetens tvärsnittsfaktor

$$\rightarrow \begin{bmatrix} M_1^e \\ M_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} M_v = \underbrace{\frac{G\boxed{2\pi r^3 h}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{K}^e:} \begin{bmatrix} \varphi_1^e \\ \varphi_2^e \end{bmatrix}$$

elementstyvhetsmatris

Föreläsning 12

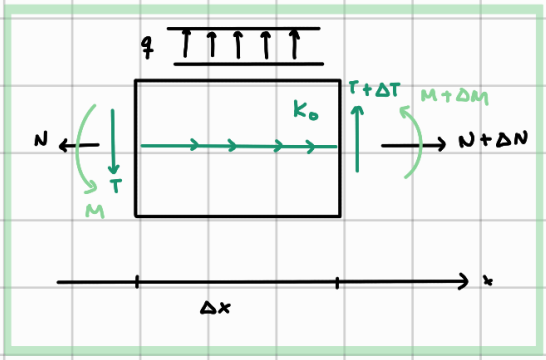
Balk



TYPER AV BELASTNING

- punktlaster P [N]
- punktmoment M_0 [Nm]
- utbredda laster q [N/m]

jämviktsekv. för balk:



Krafter $\rightarrow$: $N + \Delta N - N + k_x A \Delta x = 0 \rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta x} + k_x A = 0$

Krafter $\uparrow$: $T + \Delta T - T + q \Delta x = 0 \rightarrow \frac{\Delta T}{\Delta x} + q = 0$

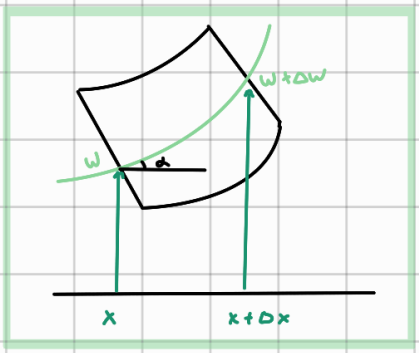
moment map $x+\Delta x$: $M + \Delta M - M + \underbrace{q \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2}}_{\text{kraft} \cdot \text{hävarm}} - T \Delta x = 0$

$\rightarrow \frac{\Delta M}{\Delta x} + q \Delta x - T = 0$

Låt $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dx} + k_x A = 0 \\ \frac{dT}{dx} + q = 0 \\ \frac{dM}{dx} = T \quad (1) \end{cases} \quad \frac{d^2M}{dx^2} + q = 0$$

Balkrotation



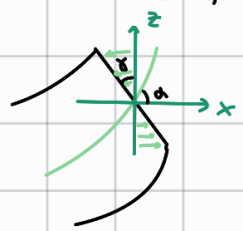
- α: rotationsvinkel
- w: utböjning ($\sim u_z$)
- $\tan(\alpha) = \frac{(w + \Delta w) - w}{(x + \Delta x) - x} \approx \alpha$ låt $\Delta x \rightarrow 0$: $\alpha = \frac{dw}{dx}$

Små deformationer

normaltöjning av balk:

$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$ → vi behöver $u_x(x,z)$

FÖR REN BÖJNING



$$\tan(\alpha) = \frac{-u_x}{z} \approx \alpha \approx \frac{dw}{dx}$$

från balkekv.

små deform.

$$\rightarrow u_x = -\frac{dw}{dx} z \rightarrow \epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{d^2 w}{dx^2} z$$

töjningen

antag $\sigma_y = \sigma_z = 0$ s.a: $\sigma_x = E\epsilon_x = -E\frac{d^2w}{dx^2} z$

uttryck för M:

$$M = \int_A z\sigma_x \, dA = -\int_A z E \frac{d^2w}{dx^2} z \, dA = -E\frac{d^2w}{dx^2} \underbrace{\int_A z^2 \, dA}_{I_y}$$

konstant enklast z varierar

I_y: yttröghetsmoment.

$$\rightarrow M(x) = -EI_y \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (2)$$

(1) och (2) ihop: $\frac{d^2}{dx^2}(-M) = \boxed{\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_y \frac{dw^2}{dx^2}\right) = q}$

ELASTISKA LINJENS EKV.

Bernoullis ekvation

↳ fluider

Cauchys rörelselag (LMB): $\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \text{div}(\bar{\sigma}) + \rho\bar{b}$

Skalärprodukten mellan $\bar{v}$ och LMB kan ge en ekvation för hur den kinetiska energin förändras.

obs: $v = |\bar{v}|$

VL: $\bar{v} \cdot \rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \frac{1}{2}\rho\left(\bar{v}\frac{D\bar{v}}{Dt} + \frac{D\bar{v}}{Dt}\bar{v}\right) = \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{v}}{2}\right) = \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)$

HL: $\bar{v}\cdot(\text{div}(\bar{\sigma}) + \rho\bar{b}) = \bar{v}\,\text{div}(\bar{\sigma}) + \rho\bar{v}\cdot\bar{b}$

s.a

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \bar{v}\,\text{div}(\bar{\sigma}) + \rho\bar{v}\cdot\bar{b}$$

ANTAG: Steady State → $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\bar{v}\cdot \text{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{1}{\rho}\bar{v}\cdot \text{div}(\bar{\sigma}) + \bar{v}\cdot\bar{b}$$

ANTAG: newtonsk fluid utan skjuvspänningar $\rightarrow$ $\bar{\sigma} = -p\bar{I}$ $(\mu = 0)$

$$\bar{v}\cdot \text{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}\bar{v}\cdot \text{grad}(p) + \bar{v}\cdot\bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{v}\cdot\text{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0$$

$$\bar{b} = -\nabla\phi; \quad \phi = gz$$

om vi antagit $\mu = 0$ kan vi lika gärna anta $\text{curl}\,\bar{v} = \nabla\times\bar{v} = 0$

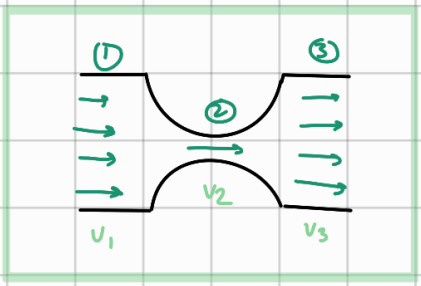
$$\mu\nabla^2\bar{v} = \mu\left[\nabla(\underbrace{\nabla\cdot\bar{v}}_{=0 \text{ för inkompresibel strömning}}) - \nabla\times(\nabla\times\bar{v})\right]$$

ANTAG rotationsfri strömning $\rightarrow$ $\nabla\times\bar{v} = 0$ $\rightarrow$ det existerar en skalär funktion Φ sådan att $\bar{v} = \nabla\Phi$ $\rightarrow$ vi kan välja $\Phi = \left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right)$

isåfall: $\text{grad}\,\Phi\cdot\text{grad}\,\Phi = 0$ $\rightarrow$ $\text{grad}\,\Phi = 0$

$$\rightarrow \boxed{\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{const.}}$$

BERNOULLIS EKVATION



$v_1 - v_3 < v_2$

$P_1 = P_3 > P_2$

$$v_1\rho_1 A_1 = v_2\rho_2 A_2$$

$$\rho_1 = \rho_2 \rightarrow v_1 A_1 = v_2 A_2$$

$$\frac{v_1^2}{2} + g\cancel{z_1} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + g\cancel{z_2} + \frac{p_2}{\rho} + \underline{gh_f}$$

$z_1 = z_2$

FÖRLUSTER

Föreläsning 13

Recap

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + hf$$

Dimensionsanalys

- likhet:
  - geometrisk likhet: två system är geometrisk lika omm alla dimensioner i alla koordinatriktningar har samma skalförhållande.
  - dynamisk likhet: två system är dynamiskt lika om strömningsbilderna är identiska.

- dimensionell homogenitet:

  en ekvation som uttrycker en sann och giltig relation mellan variabler i en fysikalisk process mst vara dimensionellt homogen = alla termer har samma enhet.

  → varje ekv som är dimensionellt homogen kan skrivas på en helt ekvivalent icke-dimensionell form

Navier-Stokes ekvationer på dimensionlös form

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v}\right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{v}$$

- gör längd, hastighet och tid dimensionslösa.

$$\bar{x}^* = \frac{\bar{x}}{L}, \quad \bar{v}^* = \frac{\bar{v}}{U}, \quad \bar{t}^* = \frac{t}{L/U} = \frac{Ut}{L}$$

- gör trycket dimensionslöst:

$$p^* = \frac{p}{\rho U^2} \qquad \text{eller} \qquad p^* = \frac{pL}{\mu U}$$

- lös ut: $\bar{x} = L\bar{x}^*$, $\bar{v} = U\bar{v}^*$, $t = Lt^*/U$, $p = \rho U^2 p^*$
- operatorerna: $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial(Lx^*)} = \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x^*}$, $\nabla = \nabla^*/L$, $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial(Lt^*/U)} = \frac{U}{L}\frac{\partial}{\partial t^*}$
- sätt in:

$$\rho\left(\frac{U^2}{L}\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial t^*} + \frac{U^2}{L}\left(\bar{v}^* \cdot \nabla^* \bar{v}^*\right)\right) = -\frac{\rho U^2}{L}\nabla^* p^* + \frac{\mu U}{L^2}\nabla^{*2}\bar{v}^*$$

- bryt ut $\rho U^2/L$:

$$\frac{\rho U^2}{L}\left(\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial t^*} + \bar{v}^* \cdot \nabla^* \bar{v}^*\right) = -\frac{\rho U^2}{L}\nabla^* p^* + \frac{\mu U}{L^2}\nabla^{*2}\bar{v}^*$$

- dividera m. $\rho U^2/L$

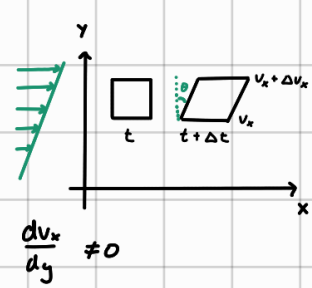
$$\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial t^*} + \bar{v}^* \cdot \nabla^* \bar{v}^* = -\nabla^* p^* + \underbrace{\frac{\mu U}{L^2}\frac{L}{\rho U^2}}_{\frac{\mu}{\rho U L}}\nabla^{*2}\bar{v}^*$$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial t^*} + \bar{v}^* \cdot \nabla^* \bar{v}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re}\nabla^{*2}\bar{v}^*}$$

Materialmodeller för fluider

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + \underbrace{2\mu\bar{D}}_{\bar{\tau}}$$

normalspänningar & skjuvspänningar



$$\frac{dv_x}{dy} \neq 0$$

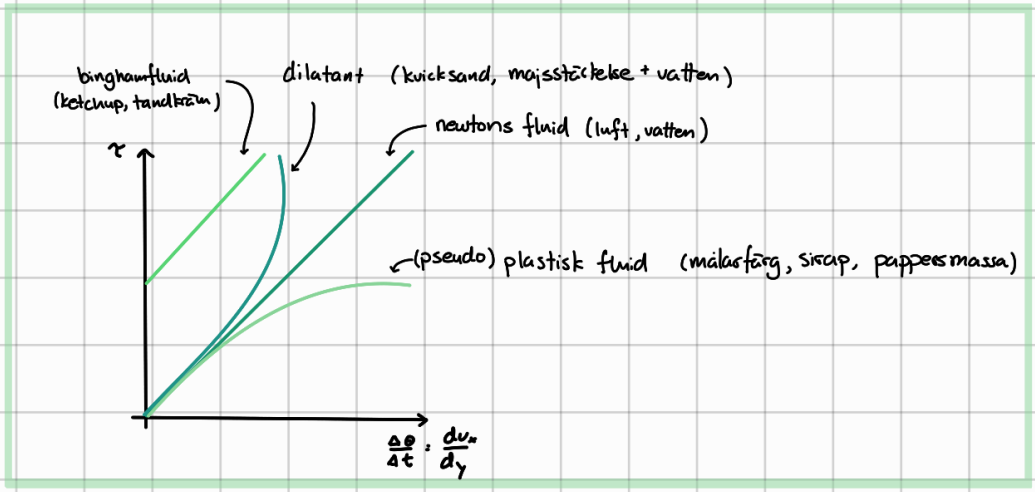
$$\bar{\tau} \propto \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\tan(\Delta\theta) = \frac{\Delta v_x \Delta t}{\Delta y} \approx \Delta\theta$$

små deformationer

$$\rightarrow \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \approx \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \frac{dv_x}{dy}$$

$$\tau_{yx} = \mu\frac{dv_x}{dy}$$


binghamfluid
(ketchup, tandkrém)
dilatant (kvicksand, majsstärkelse + vatten)
newtons fluid (luft, vatten)
(pseudo) plastisk fluid (målarfärg, sirap, pappersmassa)
τ
Δθ/Δt = du_x/dy

Föreläsning 14

turbolens karaktäriska egenskaper

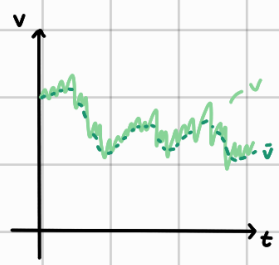
- tidsberoende / instationär
- 3D
- oregelbunden / kaotisk / oförutsägbar
- diffusiv – turbolens skapar mer effektiv transport (ex omblandning av te + socker eller man blåser för att det ska bli kallt)
- virvlar – förväntas att se
- dissipativ
- höga Reynoldstal / icke-linjär
- kontinuumfenomen
- flödesegenskap.

kaskadprocessen

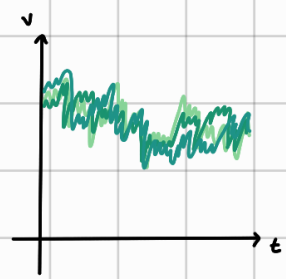
- Största virvlarna: – bestäms av flödesgeometrin. dessa virvlar bryts upp & sträcks ut.
  – är problemberoende
- "mellan virvlarna": här tillförs ingen mer energi
  här dissiperas ingen energi
  } → endast uppbrytning / förminskning.
- minsta virvlarna: – viskositet + dissipationshastighet (energi) → Kolmogorous längdskala
  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ε $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$
  – är isotropa

medelvärdering

Stationär process



väl avägt tidsfönster för medelvärdesbildning



ensemble-medelvärde

tre olika realisationer

reynoldsdekomponering

$$\bar{v} = \bar{\mathbb{v}} + \mathbb{v}'$$

$$\bar{\mathbb{v}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{v}\, dt = \langle \mathbb{v} \rangle$$

$$\langle \bar{\mathbb{v}} \rangle = \bar{\mathbb{v}} \quad , \quad \langle \mathbb{v}' \rangle = \langle \mathbb{v} - \bar{\mathbb{v}} \rangle = \langle \mathbb{v} \rangle - \langle \bar{\mathbb{v}} \rangle = \bar{\mathbb{v}} - \bar{\mathbb{v}} = 0$$

tryck

$$p = \bar{p} + p'$$

RANS: Reynolds-Avreaged Navier-Stokes.

MB: $\langle \nabla \cdot \bar{v} \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbb{v} \rangle = \nabla \cdot \bar{\mathbb{v}} = 0$

obs: $\nabla \cdot \mathbb{v} = 0$, $\nabla \cdot \bar{\mathbb{v}} = 0$ $\longrightarrow \nabla \cdot \mathbb{v}' = 0$

LMB: $\langle -\nabla p \rangle + \langle \mu \nabla^2 \mathbb{v} \rangle = \langle \rho \frac{D\mathbb{v}}{Dt} \rangle$

$$-\nabla \bar{p} + \mu \nabla^2 \bar{\mathbb{v}} = \langle \rho \frac{\partial \mathbb{v}}{\partial t} + \rho \nabla \mathbb{v} \mathbb{v} \rangle$$

$$-\nabla \bar{p} + \mu \nabla^2 \bar{\mathbb{v}} = \rho \frac{\partial \bar{\mathbb{v}}}{\partial t} + \rho \langle \nabla \mathbb{v} \mathbb{v} \rangle$$

här: $\langle \nabla \mathbb{v} \mathbb{v} \rangle = \langle \nabla (\bar{\mathbb{v}} + \mathbb{v}')(\bar{\mathbb{v}} + \mathbb{v}') \rangle = \underbrace{\langle \nabla \bar{\mathbb{v}} \bar{\mathbb{v}} \rangle}_{\nabla \bar{\mathbb{v}} \bar{\mathbb{v}}} + \underbrace{\langle \nabla \bar{\mathbb{v}} \mathbb{v}' \rangle}_{\substack{=0 \\ \text{tv } \langle \mathbb{v}' \rangle = 0}} + \underbrace{\langle \nabla \mathbb{v}' \bar{\mathbb{v}} \rangle}_{\substack{=0 \\ \text{tv } \langle \mathbb{v}' \rangle = 0}} + \underbrace{\langle \nabla \mathbb{v}' \mathbb{v}' \rangle}_{\nabla \mathbb{v}' \mathbb{v}'}$

obs: $\nabla \cdot (\mathbb{v}' \otimes \mathbb{v}') = \mathbb{v}' \underbrace{(\nabla \cdot \mathbb{v}')}_{\substack{=0 \\ \text{enl. MB}}} + \underbrace{(\mathbb{v}' \cdot \nabla)}_{= \nabla \mathbb{v}' \mathbb{v}'} \mathbb{v}'$

RANS-MB: $\nabla \cdot \bar{\mathbb{v}} = 0$

RANS-LMB: $-\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{\mathbb{v}} = \rho \frac{D\bar{\mathbb{v}}}{Dt} + \rho \langle \nabla (\mathbb{v}' \otimes \mathbb{v}') \rangle$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbb{T}} = \rho \frac{D\bar{\mathbb{v}}}{Dt}$$

vektor

rotor

$$\bar{\mathbb{T}} = -\bar{p}\, \mathbb{I} + 2\mu \bar{\mathbb{D}} - \underbrace{\rho \langle \mathbb{v}' \otimes \mathbb{v}' \rangle}_{\mathbb{R}}$$

$\mathbb{R}$: Reynoldsspänningarna