LÖSNINGSSKISSER

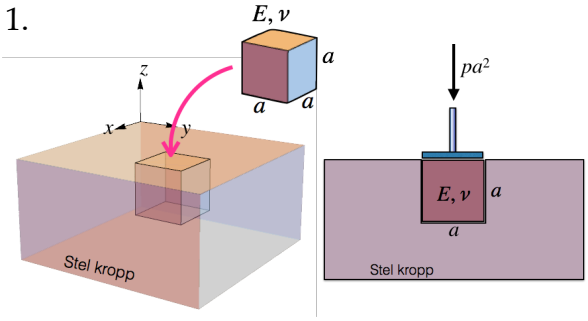
till

Tentamen MHA081

Hållfasthetslära

2022-06-04

1.



En lätt och linjärt elastisk kubisk kropp med sidan a passar perfekt i en öppen, glatt (= friktionsfri) kubisk försänkning i en stel kropp.
Den kubiska kroppen har elasticitetsmodulen E och tvärkontraktionstalet ν.
Ett jämnt fördelat tryck p appliceras över kroppens övre yta.
Hur mycket ändras kroppens höjd som en följd av detta tryck om

a) $\nu > 0$? (3p)
b) $\nu < 0$? (2p)

a) Ett homogent spännings- och töjningstillstånd råder i den kubiska kroppen, med $\sigma_z = -p$. Eftersom den stela kroppen hindrar kroppen från att utvidga sig i x- och y-led är $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$, så Hookes generaliserade lag (FS avsnitt 10) ger $\sigma_x = \sigma_y = \nu\,\sigma_z/(1-\nu)$. Hookes generaliserade lag igen:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right) = \frac{\sigma_z}{E}\left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu}\right) = -\frac{p}{E}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}$$

Svar a): $$\Delta z = \varepsilon_z a = -\frac{ap(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}$$

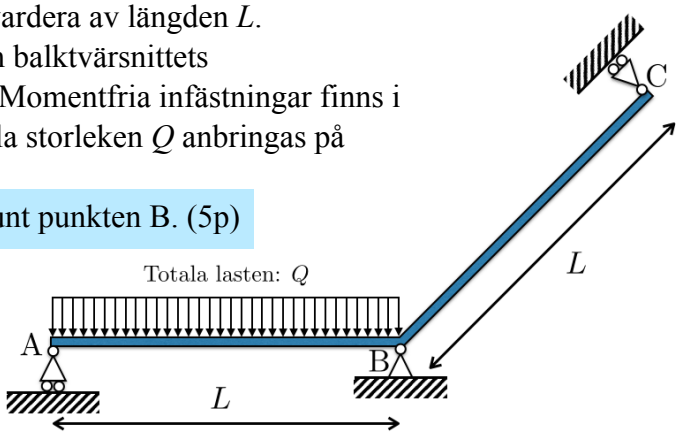
b) Ett homogent spännings- och töjningstillstånd råder i den kubiska kroppen, med $\sigma_z = -p$. Men för $\nu < 0$ tappar kroppen kontakten med de vertikala väggarna, så nu är istället $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Hookes generaliserade lag ger då:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) = -\frac{p}{E}$$

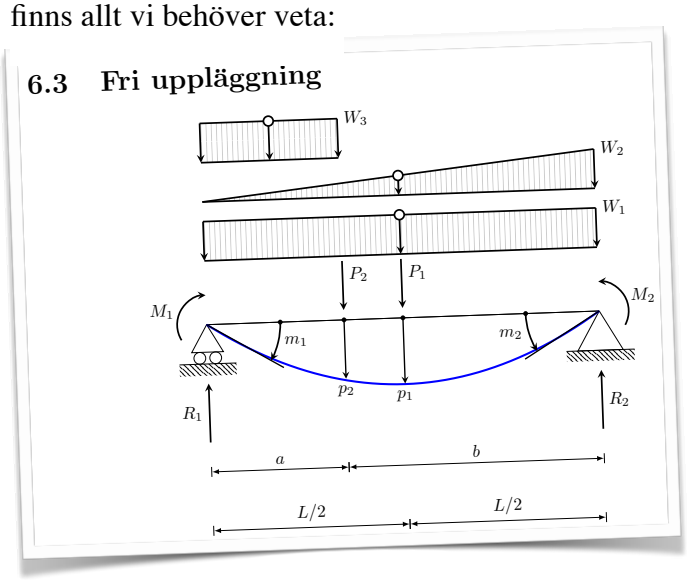
Svar b): $$\Delta z = \varepsilon_z a = -\frac{ap}{E}$$

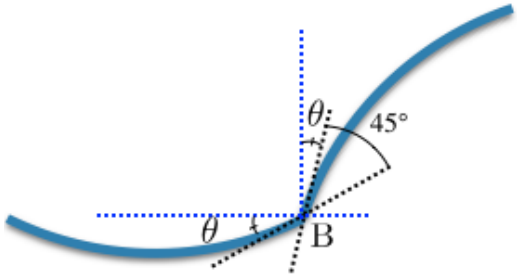
■

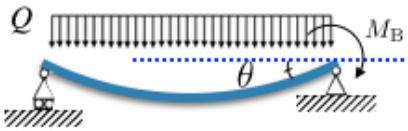
2. En balk ABC har formats i 45°:s vinkel som figuren antyder, och kan alltså betraktas som två sammanfogade balkar, vardera av längden L. Balkmaterialets elasticitetsmodul är E, och balktvärsnittets yttröghetsmoment är I; båda är konstanta. Momentfria infästningar finns i A, B och C. En jämnt fördelad last av totala storleken Q anbringas på stycket AB.
Bestäm vilken vinkel som AB vrider sig runt punkten B. (5p)



Inför vridningsvinkeln θ som i figuren till höger. Dela upp balken i två delar som antyds i de två nedre figurerna till höger. I FS, elementarfall 6.3 finns allt vi behöver veta:







För den mellersta figuren till höger ser vi att vi kan sätta $M_2 = -M_B$ och $W_1 = Q/L$, och kan avläsa

$$\theta = m_2 = \frac{L}{3EI} \cdot (-M_B) + \frac{L^3}{24EI} \cdot \frac{Q}{L}$$

För den nedersta högra figuren kan vi "vända upp och ned på det hela", och sätta $M_2 = M_B$ och p.s.s. få

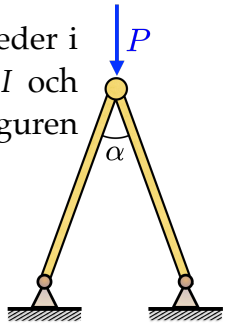
$$\theta = m_2 = \frac{L}{3EI} \cdot M_B$$

Vi har alltså två ekvationer för de två obekanta θ och M_B, och kan lösa ut

Svar: $\theta = \dfrac{QL^2}{48EI}$

■

3. Två slanka och lätta balkar av längd L är infästa med momentfria leder i båda ändar så som figuren antyder. Balkarna har böjstyvheten EI och anordningen belastas med en vertikal kraft av storleken P som figuren visar.
Vid vilken storlek på P knäcker balkarna ut? (5p)



Lösning: Snitta i stängerna och lägg in snittkrafterna S (snittkrafterna lika i de två stängerna på grund av symmetri). Jämvikt ger

$$2S\cos\frac{\alpha}{2}+P=0 \quad \text{vilket ger} \quad S=\frac{-P}{2\cos(\alpha/2)}$$

*Tryck*kraften i strävorna blir således $-S = P/2\cos(\alpha/2)$.
Strävorna knäcker enlig Eulers fall 2. Det ger

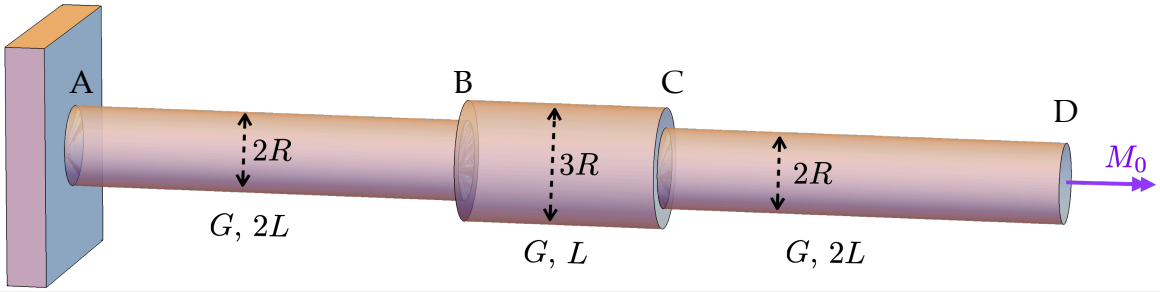
$$-S=-S_{\text{krit}}=\frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{som ger} \quad \frac{P_{\text{krit}}}{2\cos(\alpha/2)}=\frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

varur löses

$$P_{\text{krit}}=\frac{2\pi^2 EI\cos(\alpha/2)}{L^2} \qquad \blacksquare$$

4. En massiv axel ABCD med cirkulärt tvärsnitt består av tre delar (AB, BC resp. CD) med de olika längder och radier som figuren visar. Axel-materialet är elastiskt med skjuvmodulen G. I änden A är axeln fast inspänd i en orubblig stel vägg, och i D anbringas ett vridande moment M_0 som figuren visar.

Ställ upp lagom många ekvationer för att kunna bestämma vilken vinkel axeländen D vrides under den angivna lasten. (5p)



Genom att snitta i var och en av delaxlarna, ser vi från momentjämvikt att snittmomentet M_v är konstant $= M_0$ längs hela axeln. Vridningsvinkeln mellan delarnas resp. ändar är då

$$\Delta\varphi_\mathrm{AB} = \frac{M_0 \cdot 2L}{GK_\mathrm{v1}}, \quad \Delta\varphi_\mathrm{BC} = \frac{M_0 \cdot L}{GK_\mathrm{v2}}, \quad \Delta\varphi_\mathrm{CD} = \Delta\varphi_\mathrm{AB}. \qquad (1\ \mathrm{abc})$$

Här är

$$K_\mathrm{v1} = \frac{\pi}{2}R^4, \quad K_\mathrm{v2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{2}R\right)^4. \qquad (2\ \mathrm{ab})$$

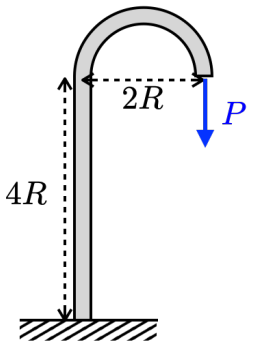
Vridningen φ av D relativt den fixa änden A är

$$\varphi = \Delta\varphi_\mathrm{AB} + \Delta\varphi_\mathrm{BC} + \Delta\varphi_\mathrm{CD}. \qquad (3)$$

Svar: Ekvationerna (1 abc), (2 ab) och (3).

■

5.

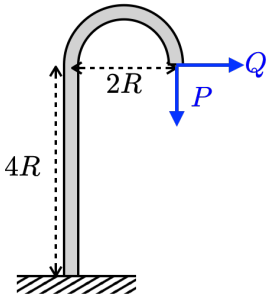


En lätt, i övre änden krökt, balk, med mått enligt figuren till vänster, belastas i ena änden med en vertikal, nedåtriktad kraft av storleken P. Balkens andra ände är fast inspänd i ett stelt orubbligt underlag. Balken har böjstyvheten EI. Dragstyvheten och vridstyvheten kan båda anses mycket stora ("$EA = \infty$", "$GK_v = \infty$").

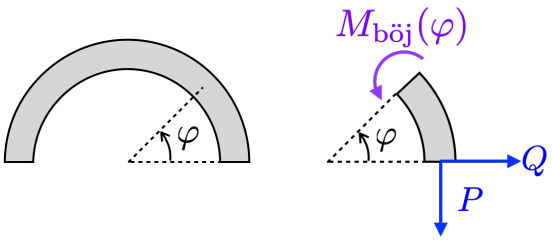
Antag att balkens krökta del kan anses *svagt* krökt ($R >> I^{1/4}$).

Ställ upp lagom många ekvationer för att kunna bestämma hur långt angreppspunkten för P flyttas horisontellt under pålastningen. (5p)

Endast den del av den elastiska töjningsenergin som hänger samman med det böjande momentet behöver beaktas. Inför en "spökkraft" Q enligt figuren. ("Spökkraften" sätts sedermera till noll, men möjliggör, mha Castiglianos andra sats, bestämning av den horisontella förskjutningen av balkens ändpunkt.)

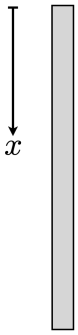


Inför vinkeln φ enligt nedan, och frilägg en bit av den böjda änden:



Momentjämvikt kring den ände där $M_{böj}(\varphi)$ "angriper" ger:

$$M_{böj}(\varphi) - PR(1-\cos\varphi) + QR\sin\varphi = 0 \qquad (1)$$



För den raka delen av balken får vi ett böjande moment som går linjärt mellan värdena i dess ändar:

$$M_{böj}\big|_{x=0} = 2PR \qquad (2)$$

$$M_{böj}\big|_{x=4R} = 2PR + 4QR \qquad (3)$$

Den totala elastiska töjningsenergin är alltså

$$U = \int_0^{\pi} \frac{M_{böj}(\varphi)^2}{2EI} R\,\mathrm{d}\varphi + \frac{4R}{6EI}\left(M_{böj}^2\big|_{x=0} + M_{böj}\big|_{x=0} M_{böj}\big|_{x=4R} + M_{böj}^2\big|_{x=4R}\right) \qquad (4)$$

Den horisontella förskjutningen av balkens ändpunkt ges sedan enligt Castiglianos andra sats av:

$$\delta_Q = \left.\frac{\partial U}{\partial Q}\right|_{Q=0} \qquad (5)$$

$$\left(\delta_Q = \frac{14PR^3}{EI}\right)$$

Svar: Ekvationerna (1), (2), (3), (4) och (5).

■