# Tentamen TME017 Hållfasthetslära 2021-10-08

Jorhavande: Peter Olsson, nås på peter.olsson@chalmers.se .

**Hjälpmedel**:

ALLT utom att konsultera någon annan!

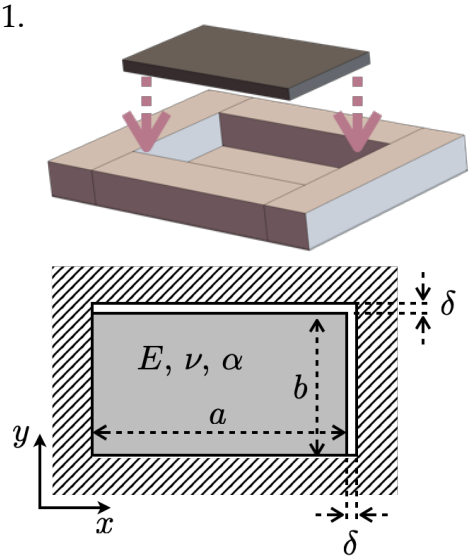
**Poängbedömning:** Maximal poäng på tentamen är 25 poäng. Till denna kommer eventuella bonuspoäng från årets övningsskrivning. För att ge poäng måste lösningen vara läslig och uppställda ekvationer klart motiverade. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren. Om hjälpmedel används vid lösning av problem bör referens och sidhänvisning anges.

**Betygsgränser:**

0-9 poäng: underkänt
10-14 poäng: betyg 3
15-19 poäng: betyg 4
20-25 poäng: betyg 5

Lycka till!

1.



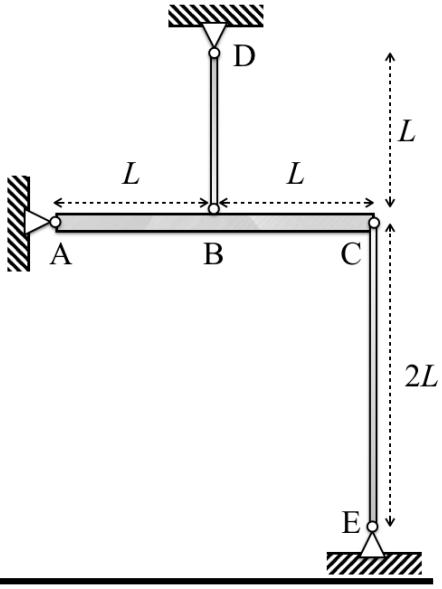

En lätt, jämntjock rektangulär skiva (sidlängder $a$ och $b$ enligt figuren; $a > b$) placeras i en försänkning i en stel kropp som figurerna antyder. Kontakten mellan skivan och stelkroppen är helt friktionsfri. Skivan är tillverkad i ett material med elasticitets-modulen $E$, tvärkontraktionstalet $\nu$ och längdutvidgnings-koefficienten $\alpha$.

Skivan passar inte perfekt i försänkningen, utan två spalter av bredden $\delta$ separerar skivan från två av väggarna, som den nedre figuren visar.

Man vill sluta dessa spalter genom att värma skivan. Bestäm hur stor temperaturhöjning $\Delta T$ skivan minst måste utsättas för, för att <u>båda</u> spalterna skall slutas. (5p)

2. En stel (och lätt) balk ABC är momentfritt infäst i änden A. I B och C är två termoelastiska stänger, BD respektive CE, fästa i den stela balken. Stängernas ändar (B, D, C, E) är alla fästa med momentfria leder. Måtten anges i figuren här intill. Stängerna har tvärsnittsarean $A$, yttröghets-momentet $I$, elasticitetsmodulen $E$ och längdutvidgnings-koefficienten $\alpha$.

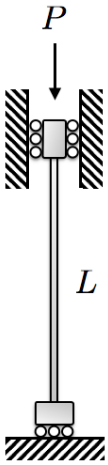
Temperaturen hos både stång CE och stång BD höjs med $\Delta T$. Vad blir förskjutningen av balkens mittpunkt B till storlek och riktning? (5p)



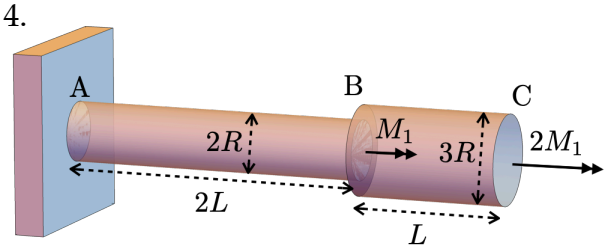

3. En slank och lätt balk av längd $L$ är infäst så som figuren antyder.. Balken har ett kvadratiskt tvärsnitt med sidan $L/20$. Balkmaterialets elasticitetsmodul är $E$ och dess flytspänning är $E/200$.

En kraft $P$ anbringas i balkens övre ände, och ökas sakta från noll till allt större värden.

Vad inträder först: flytning eller knäckning? (Motivera!) (5p)



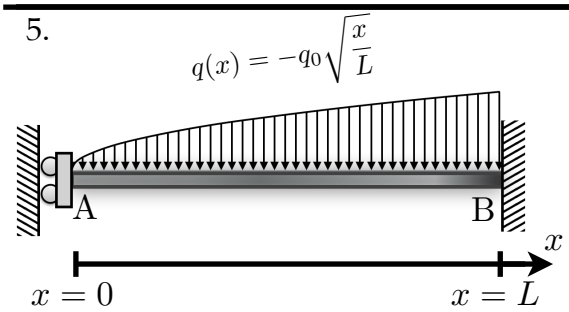
4.




En axel ABC med cirkulärt tvärsnitt består av två delar (AB och BC) med sinsemellan olika längder och radier som figuren visar. Axelmaterialet är elastiskt med skjuvmodulen $G$. I änden A är axeln fast inspänd i en orubblig stel vägg, och i B anbringas ett vridande moment $M_1$ som figuren visar. I änden C anbringas samtidigt ett dubbelt så stort moment, $2M_1$.

Ställ upp lagom många ekvationer för att kunna bestämma vilken vinkel axeländen C vrides under dessa laster. (5p)

5.




En lätt rak balk AB av längden $L$, med konstant tvärsnitt, är i änden B fast inspänd i en stel orubblig vägg. I änden A är den fri att röra sig i vertikalriktningen, men med fixerad lutning, som figuren antyder. Balken, som har böjstyvheten $EI$, belastas med en utbredd last av formen

$$q(x) = -q_0\sqrt{\frac{x}{L}}\,.$$

Bestäm utböjningen $w$ av balken som funktion av koordinaten $x$ i figuren. (Räkna utböjningen $w$ positiv uppåt i figuren.) (5p)

*Och här tog tentan plötsligt slut!*

# LÖSNINGSSKISSER

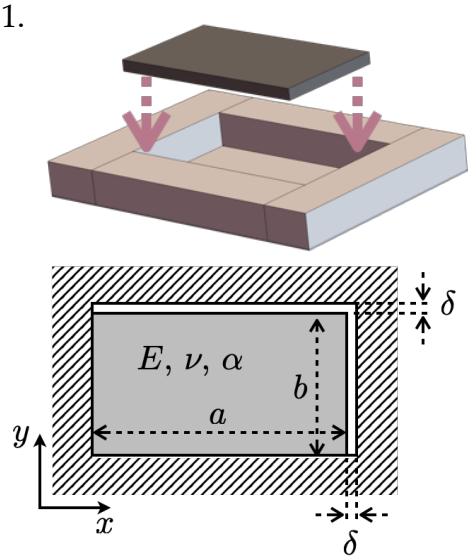
# till

# Tentamen MHA081

# Hållfasthetslära

# 2021-10-08

1.




En lätt, jämntjock rektangulär skiva (sidlängder $a$ och $b$ enligt figuren; $a > b$) placeras i en försänkning i en stel kropp som figurerna antyder. Kontakten mellan skivan och stelkroppen är helt friktionsfri. Skivan är tillverkad i ett material med elasticitets-modulen $E$, tvärkontraktionstalet $\nu$ och längdutvidgnings-koefficienten $\alpha$.
Skivan passar inte perfekt i försänkningen, utan två spalter av bredden $\delta$ separerar skivan från två av väggarna, som den nedre figuren visar.
Man vill sluta dessa spalter genom att värma skivan. Bestäm hur stor temperaturhöjning $\Delta T$ skivan minst måste utsättas för, för att <u>båda</u> spalterna skall slutas. (5p)

Fas 1: Innan någon spalt har slutits helt ger Hookes generaliserade lag med värmeutvidgning (ty alla spänningar är noll i denna fas):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(0 - \nu(0+0)) + \alpha\,\Delta T_1$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(0 - \nu(0+0)) + \alpha\,\Delta T_1$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(0 - \nu(0+0)) + \alpha\,\Delta T_1$$

där temperaturhöjningen är $\Delta T_1$ ($< \Delta T_{\text{min}}$, den minsta tempeaturhöjning som ger att båda spalterna sluts). Så snart någon av förlängningarna i $x$- eller $y$-led blir $= \delta$ ”låses” denna töjning eftersom skivan då inte kan utvidga sig mer i den riktningen. Eftersom $a > b$ är det töjningen i x-led som först ”låses”. Det sker då $\Delta T_1 = \delta/(a\,\alpha)$.

Fas 2: När högra spalten slutits ger Hookes lag ända fram till dess att övre spalten nätt och jämnt slutits

$$\frac{\delta}{a} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(0+0)) + \alpha\,\Delta T_2$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(0 - \nu(\sigma_x + 0)) + \alpha\,\Delta T_2$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(0 - \nu(0+0)) + \alpha\,\Delta T_2$$

där temperaturhöjningen är $\Delta T_2$ ($\Delta T_1 < \Delta T_2 < \Delta T_{\text{min}}$). När temperaturhöjningen når $\Delta T_{\text{min}}$ så fås

$$\frac{\delta}{a} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(0+0)) + \alpha\,\Delta T_{\text{min}} \quad (i)$$
$$\frac{\delta}{b} = \frac{1}{E}(0 - \nu(0+\sigma_x)) + \alpha\,\Delta T_{\text{min}} \quad (ii)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(0 - \nu(\sigma_x + 0)) + \alpha\,\Delta T_{\text{min}}$$

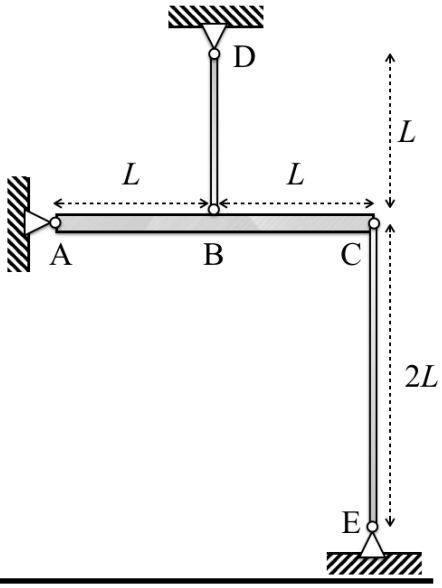
Ur ekv. ($i$) och ($ii$) kan vi lösa ut den sökta (minsta) temperaturhöjningen.

Svar: $\Delta T_{\text{min}} = \dfrac{\delta}{\alpha(1+\nu)}\left(\dfrac{\nu}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$

■

2. En stel (och lätt) balk ABC är momentfritt infäst i änden A. I B och C är två termoelastiska stänger, BD respektive CE, fästa i den stela balken. Stängernas ändar (B, D, C, E) är alla fästa med momentfria leder. Måtten anges i figuren här intill. Stängerna har tvärsnittsarean $A$, yttröghetsmomentet $I$, elasticitetsmodulen $E$ och längdutvidgningskoefficienten $\alpha$.

Temperaturen hos både stång CE och stång BD höjs med $\Delta T$. Vad blir förskjutningen av balkens mittpunkt B till storlek och riktning? (5p)




Momentjämvikt för den stela balken ABC kring A ger $\overset{\curvearrowright}{\mathrm{A}}$: $N_{\mathrm{CE}} \cdot 2L - N_{\mathrm{BD}} \cdot L = 0$
där $N_{\mathrm{CE}} = \sigma_{\mathrm{CE}} A$ och $N_{\mathrm{BD}} = \sigma_{\mathrm{BD}} A$ är stångkrafterna i CE repektive BD. Alltså gäller för normalspänningarna $2\sigma_{\mathrm{CE}} = \sigma_{\mathrm{BD}}$.
För stängernas förlängningar ger geometrin att $\delta_{\mathrm{CE}} = -2\delta_{\mathrm{BD}}$,
och töjningens definition ger

$$\delta_{\mathrm{CE}} = 2L \cdot \varepsilon_{\mathrm{CE}}$$
$$\delta_{\mathrm{BD}} = L \cdot \varepsilon_{\mathrm{BD}}$$

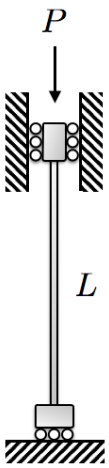
Ur dessa tre samband får vi $\varepsilon_{\mathrm{CE}} = -\varepsilon_{\mathrm{BD}}$. Hookes lag ger slutligen

$$\varepsilon_{\mathrm{CE}} = \frac{\sigma_{\mathrm{CE}}}{E} + \alpha\,\Delta T$$
$$\varepsilon_{\mathrm{BD}} = \frac{\sigma_{\mathrm{BD}}}{E} + \alpha\,\Delta T$$

Ur de fyra ekvationerna på gul botten ovan kan vi lösa ut $\varepsilon_{\mathrm{BD}} = -\frac{1}{3}\alpha\Delta T$.

Svar: Punkten B rör sig sträckan $\frac{1}{3}\alpha\Delta T \cdot L$ uppåt. ■

3. En slank och lätt balk av längd $L$ är infäst så som figuren antyder. Balken har ett kvadratiskt tvärsnitt med sidan $L/20$. Balkmaterialets elasticitetsmodul är $E$ och dess flytspänning är $E/200$.
En kraft $P$ anbringas i balkens övre ände, och ökas sakta från noll till allt större värden.
Vad inträder först: flytning eller knäckning? (Motivera!) (5p)




$$I = \frac{(\frac{1}{20}L)^4}{12} = \frac{EL^4}{1920000}$$

$$P_{\mathrm{E5}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2\, EL^2}{1920000}$$

$$A = \frac{L^2}{400}$$

$$\sigma_{\mathrm{flyt}} = \frac{E}{200}$$

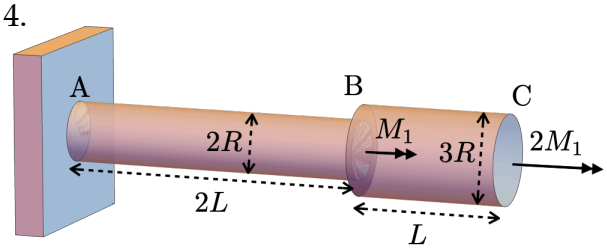
$$P_{\mathrm{flyt}} = \sigma_{\mathrm{flyt}}\, A = \frac{E}{200}\frac{L^2}{400} = \frac{EL^2}{80000}$$

$$\frac{P_{\mathrm{E5}}}{P_{\mathrm{flyt}}} = \frac{\pi^2 \cdot 80000}{1920000} = \frac{\pi^2}{24} < 1$$

Svar: Eftersom knäcklasten är mindre än flytlasten inträffar **knäckning först**.

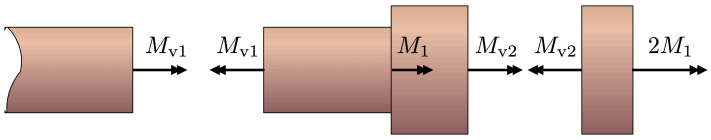
■

4.




En axel ABC med cirkulärt tvärsnitt består av två delar (AB och BC) med sinsemellan olika längder och radier som figuren visar. Axelmaterialet är elastiskt med skjuvmodulen $G$. I änden A är axeln fast inspänd i en orubblig stel vägg, och i B anbringas ett vridande moment $M_1$ som figuren visar. I änden C anbringas samtidigt ett dubbelt så stort moment, $2M_1$.

Ställ upp lagom många ekvationer för att kunna bestämma vilken vinkel axeländen C vrides under dessa laster. (5p)




Gör ett snitt genom AB och ett genom BC som figuren visar. Ställ upp momentjämvikt runt längsaxeln för de två frilagda delarna:

$$-M_{v1} + M_1 + M_{v2} = 0 \qquad (1)$$

$$-M_{v2} + 2M_1 = 0 \qquad (2)$$

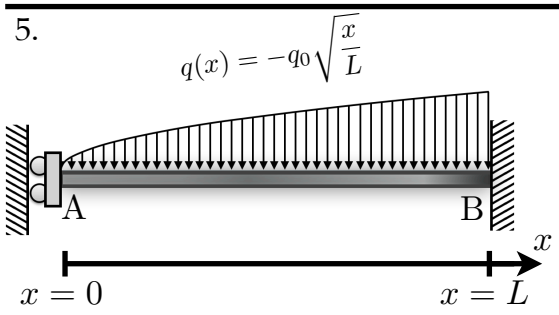
Om vi kallar vridningen av AB för $\varphi_1$ och vridningen av BC för $\varphi_2$, så är den sökta rotationen $\varphi$ av axeländen C summan av dessa: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ (3)

Materialsambanden säger oss att $\varphi_1 = \dfrac{M_{v1}L}{GK_1}, \quad \varphi_2 = \dfrac{M_{v2}\frac{1}{2}L}{GK_2}$ (4), (5)

där $K_1 = \dfrac{\pi}{2}R^4, \quad K_1 = \dfrac{\pi}{2}(\frac{3}{2}R)^4$ (6), (7)

Svar: Ekv. (1), (2), … (7) kan lösas för bl.a. den sökta rotationen $\varphi$. ■

5.




En lätt rak balk AB av längden $L$, med konstant tvärsnitt, är i änden B fast inspänd i en stel orubblig vägg. I änden A är den fri att röra sig i vertikalriktningen, men med fixerad lutning, som figuren antyder. Balken, som har böjstyvheten $EI$, belastas med en utbredd last av formen

$$q(x) = -q_0\sqrt{\frac{x}{L}}\,.$$

Bestäm utböjningen $w$ av balken som funktion av koordinaten $x$ i figuren. (Räkna utböjningen $w$ positiv uppåt i figuren.) (5p)

Balkens diffekvation (Euler-Bernoulli) är $\quad w''''(x) = \dfrac{q(x)}{EI} = -\dfrac{q_0}{EI}\sqrt{\dfrac{x}{L}}$

Integrera fyra gånger så ger det

$$w(x) = -\frac{16q_0\,x^4\sqrt{x}}{945EI\sqrt{L}} + C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$$

De fyra konstanterna $C_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$) ges av

RV1: Tvärkraften i A är noll $\Rightarrow$ $\quad 6C_3 = 0$

RV2: Lutningen i A är noll $\Rightarrow$ $\quad C_1 = 0$

Sätt in detta i $w(x)$ så fås

$$w(x) = -\frac{16q_0\,x^4\sqrt{x}}{945EI\sqrt{L}} + C_0 + C_2x^2$$

RV3: Lutningen i B är noll $\Rightarrow$ $\quad -\dfrac{8L^3q_0}{105EI} + 2LC_2 = 0$

RV4: Utböjningen i B är noll $\Rightarrow$ $\quad -\dfrac{16L^4q_0}{945EI} + C_0 + L^2C_2 = 0$

Ur de två sista ekvationerna får $C_0$ och $C_2$. Om alla konstanter löses ut och dessa sätts in i uttrycket för w(x) får vi svaret

Svar: $\quad -\dfrac{4q_0\left(5L^4 - 9L^2x^2 + 4x^4\sqrt{\frac{x}{L}}\right)}{945EI}.$

■