Tentamen HMA081 2021-08-19

Tid och plats: **08:30—13:00 på distans via Canvas och Zoom.**

Hjälpmedel: **Inga restriktioner, men tentamen ska genomföras enskilt.**

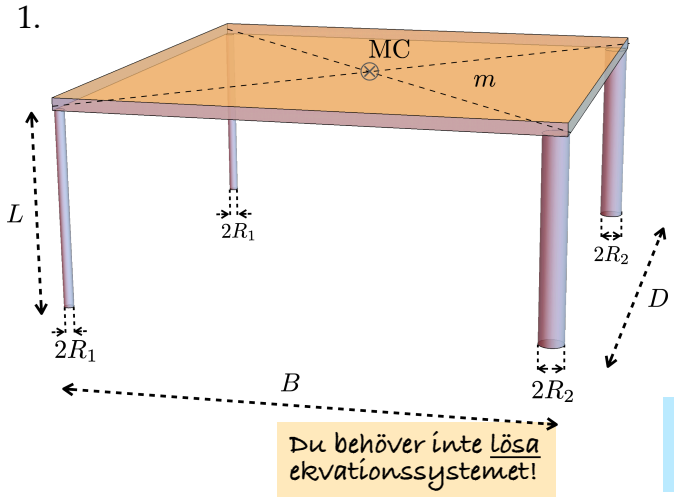
Lärare: **Peter Olsson. Nås under tentamen på peter.olsson@chalmers.se .**

Poängbedömning: **Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2020) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.**
För att ge poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras. (Det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

Ordinarie tentamenstid 14–18 har förlängts med 30 minuter för att ge tid att skanna och skicka in lösningsförslagen i Canvas. Kontrollera noggrant ljus och kontrast, så att dina dokument är läsbara. Använd helst pdf; undvik bildfiler (jpg, png, bmp etc). Om det skulle krångla med Canvas–inlämning kan du mejla som en nödlösning. ’

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad.

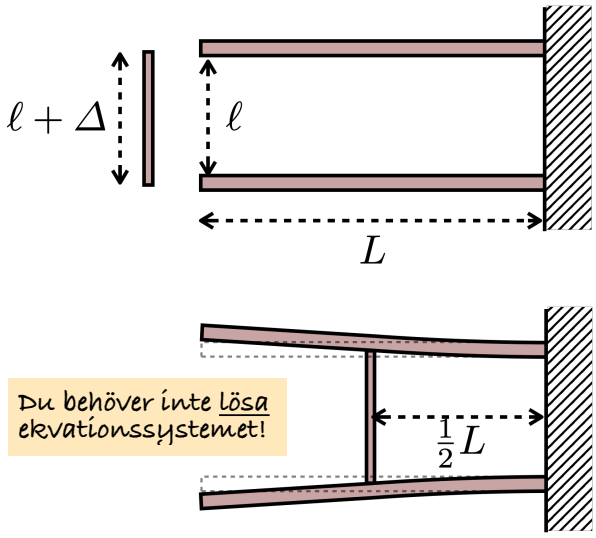
1.



En stel, homogen, tunn och jämntjock rektangulär bordskiva (sidlängder B och D enligt figuren) av massan m vilar i sina fyra hörn på fyra lätta vertikala ben. Benen är i obelastat tillstånd alla av längden L, och är homogena cirkulära cylindrar av ett material som har elasticitetsmodulen E. Benen har parvis olika diametrar ($2R_1$ respektive $2R_2$), som angivet i figuren. Bordet ställs på ett orubbligt, glatt, horisontellt och stelt golv. Man önskar veta hur långt bordsskivans centrum förskjuts nedåt som en följd av av skivans tyngd.

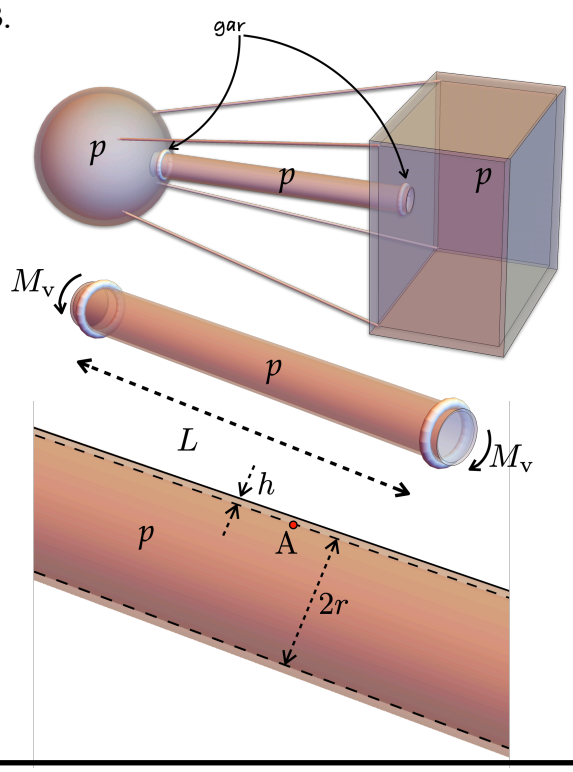
Ställ upp lagom många ekvationer för att denna förskjutning skall kunna beräknas! (5p)

2. Två lätta, identiska horisontella balkar (böjstyvhet EI, längd L) är fast inspända i en orubblig vägg som den övre figuren visar. Avståndet mellan balkarna är ℓ. En lätt stång (av samma material som balkarna) med dragstyvheten EA och längden $\ell + \Delta$ pressas in mellan balkarna till det läge som visas i den nedre figuren. Vi antar att $\Delta << \ell$.



Ställ upp lagom många ekvationer för att stångkraften S i den vertikala stången, och stångens förkortning $-\delta$ i det fastkilade läget, skall kunna bestämmas. (5p)

3.



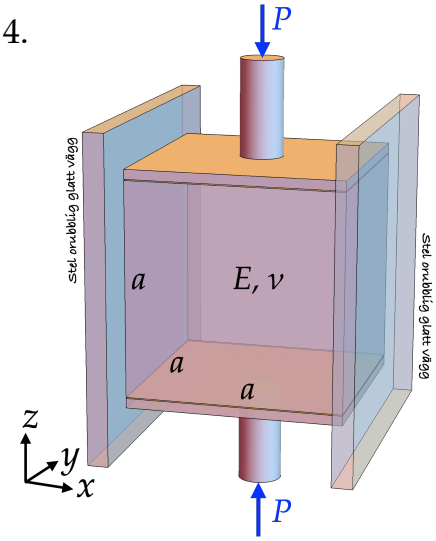
Två delar av en rymdstation är förbundna medelst stag och ett trycksatt tunnväggigt rör så som figuren antyder. Rörets båda ändar är öppna, så att trycket i hela stationen inklusive röret är detsamma, nämligen p.

En liten konstruktionsmiss har medfört att röret också utsätts för ett vridande moment M_v (se fig.).

Rörets längd är L, dess radie är r och dess godstjocklek är h (som alltså är $<< r$).

Bestäm spänningstillståndet (uttryckt i form av en spänningsmatris/tensor) för en godtycklig punkt A på innerytan av röret. (Försumma härvid INTE den radiella normalspänningen, och notera att röret är "öppet" i ändarna.) (5p)

4.



En homogen, lätt, elastisk kub av sidan a, med elasticitetsmodulen E och tvärkontraktionstalet ν, är (i obelastat tillstånd) i x-led perfekt inpassad mellan två parallella, glatta, stela och orubbliga väggar som figuren antyder.

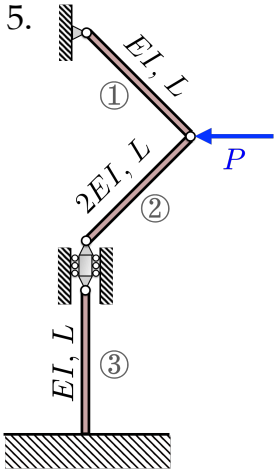
I z-led är kubens övre och undre begränsningsytor utsatta för ett jämnt fördelat tryck, orsakat av två krafter av storleken P som visas i figuren.

I y-led är kuben fri att utvidga sig.

Ställ upp lagom många ekvationer för att kunna bestämma normalspänningarna och normaltöjningarna i kuben! (5p)

Du behöver inte lösa ekvationssystemet!

5.



Tre balkar ①, ② och ③, alla av längden L, är sammanfogade med momentfria leder så som figuren visar. Balk ② har en böjstyvhet som är dubbelt så stor som böjstyvheterna hos balk ① och ③.

En punktkraft av storleken P appliceras enligt figuren. Man vill veta vilken av balkarna som knäcks först när P ökas från noll till allt större värden.

a) Bestäm tryckkrafterna i balkarna. (2p)

b) Avgör för var och en av balkarna vilket Eulerfall som är tillämpligt. (2p)

c) Bestäm vilken av balkarna som knäcks först. (1p)

Och här tar tentan plötsligt slut!

LÖSNINGSSKISSER

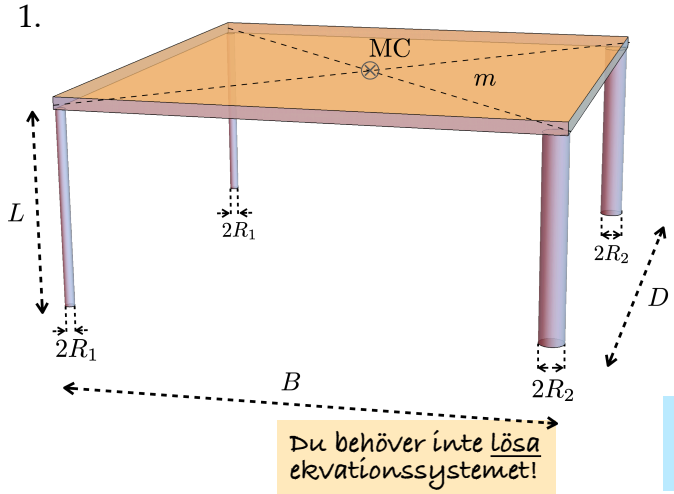
till

Tentamen MHA081

Hållfasthetslära

2021-08-19

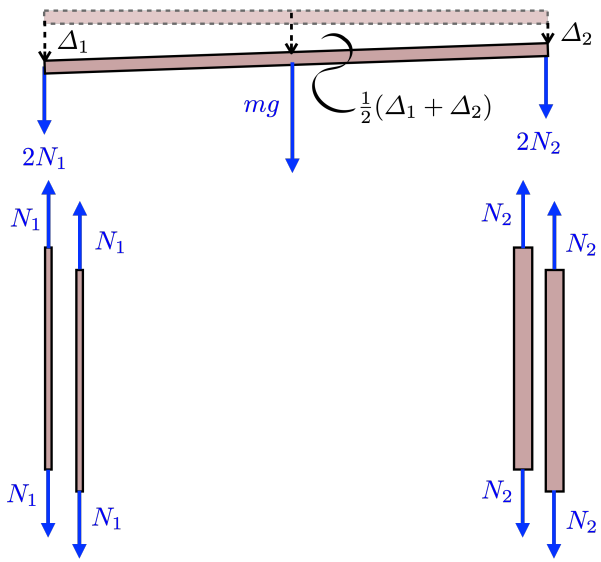
1.



En stel, homogen, tunn och jämntjock rektangulär bordskiva (sidlängder B och D enligt figuren) av massan m vilar i sina fyra hörn på fyra lätta vertikala ben. Benen är i obelastat tillstånd alla av längden L, och är homogena cirkulära cylindrar av ett material som har elasticitetsmodulen E. Benen har parvis olika diametrar ($2R_1$ respektive $2R_2$), som angivet i figuren. Bordet ställs på ett orubbligt, glatt, horisontellt och stelt golv. Man önskar veta hur långt bordsskivans centrum förskjuts nedåt som en följd av av skivans tyngd.

Ställ upp lagom många ekvationer för att denna förskjutning skall kunna beräknas! (5p)

Kalla mittpunktens förskjutning nedåt för Δ. Kraftjämvikt, momentjämvikt, Hookes lag och mittpunktens läge mitt i skivan ger oss fem ekvationer för de fem obekanta Δ, Δ_1, Δ_2, N_1, N_2. (Se figuren nedan!)



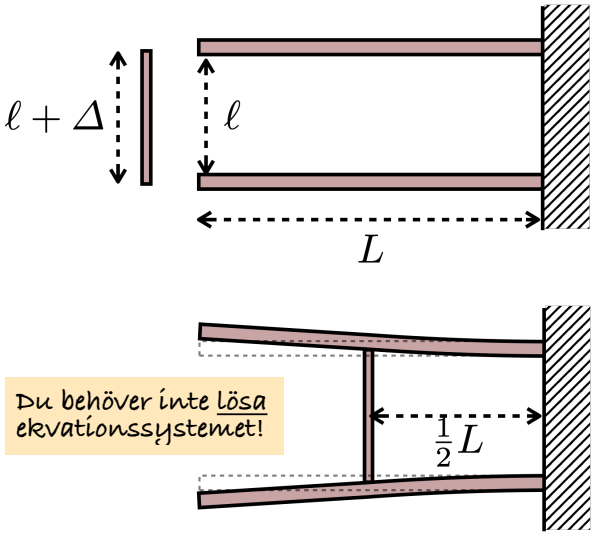
$$\begin{cases} \downarrow: & 2N_1 + 2N_2 + mg = 0 & (1) \\ \overset{\curvearrowleft}{\text{MC}}: & 2N_1 \cdot \frac{1}{2}B - 2N_2 \cdot \frac{1}{2}B = 0 & (2) \\ \text{Hookes lag:} & -\Delta_1 = (N_1 \cdot L)/(E \cdot \pi R_1^2) & (3) \\ \text{Hookes lag:} & -\Delta_2 = (N_2 \cdot L)/(E \cdot \pi R_2^2) & (4) \\ \text{Geometri!} & \Delta = \frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2) & (5) \end{cases}$$

Svar: Ekv. (1), (2), (3), (4), (5).

■

(För den som undrar: det ger $\Delta = \dfrac{mgL}{8\pi E}\left(\dfrac{1}{R_1^2} + \dfrac{1}{R_2^2}\right)$, men det behöver du inte räkna ut!)

2. Två lätta, identiska horisontella balkar (böjstyvhet EI, längd L) är fast inspända i en orubblig vägg som den övre figuren visar. Avståndet mellan balkarna är ℓ. En lätt stång (av samma material som balkarna) med dragstyvheten EA och längden $\ell + \Delta$ pressas in mellan balkarna till det läge som visas i den nedre figuren. Vi antar att $\Delta << \ell$.



Du behöver inte lösa ekvationssystemet!

Ställ upp lagom många ekvationer för att stångkraften S i den vertikala stången, och stångens förkortning $-\delta$ i det fastkilade läget, skall kunna bestämmas. (5p)

Låt w_0 vara den övre balkens utböjning (pos. uppåt) vid balkens mitt. Då är (geometri!)

$$\ell + 2w_0 = \ell + \Delta + \delta \quad \Rightarrow \quad (-\delta) = \Delta - 2w_0 \qquad (1)$$

Vidare vet vi att för stången gäller (Hooke!)

$$\delta = \frac{(\ell + \Delta)}{EA} S \qquad (2)$$

Slutligen har vi ur elementarfallet i avsnitt 6.4 i formelsamlingen (se härintill!) att

$$w_0 = \frac{L^3}{24\,EI}(-S) \qquad (3)$$

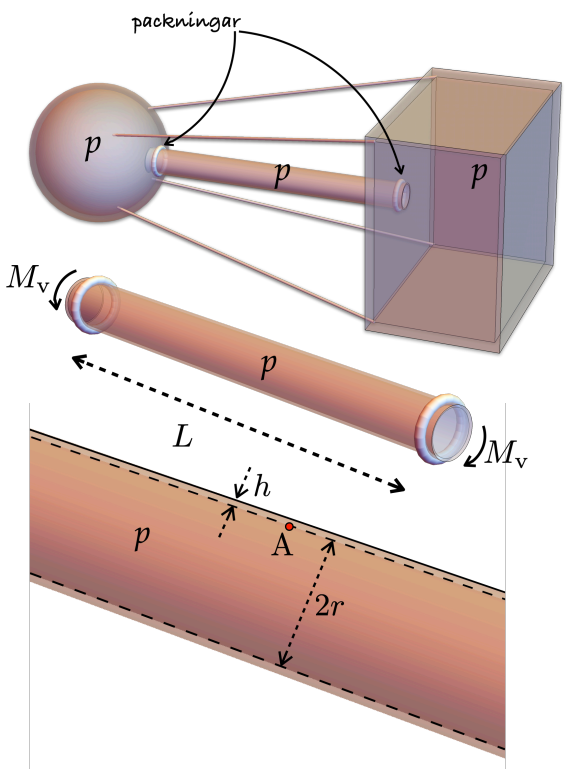
De tre obekanta w_0, $(-\delta)$ och S kan lösas ur dessa tre ekvationer!

$$\text{"}L\text{"} = \tfrac{1}{2}L$$
$$\text{"}p_1\text{"} = w_0$$
$$\text{"}P_1\text{"} = -S$$

	P_1
$R_1 =$	1
$M_1 =$	L
$p_1 =$	$\frac{L^3}{3\,EI}$

Svar: Ekvation (1), (2) och (3) ovan.

3.



Två delar av en rymdstation är förbundna medelst stag och ett trycksatt tunnväggigt rör så som figuren antyder. Rörets båda ändar är öppna, så att trycket i hela stationen inklusive röret är detsamma, nämligen p.

En liten konstruktionsmiss har medfört att röret också utsätts för ett vridande moment M_v (se fig.).

Rörets längd är L, dess radie är r och dess godstjocklek är h (som alltså är $<< r$).

Bestäm spänningstillståndet (uttryckt i form av en spänningsmatris/tensor) för en godtycklig punkt A på <u>innerytan</u> av röret. (Försumma härvid INTE den radiella normalspänningen, och notera att röret är "öppet" i ändarna.) (5p)

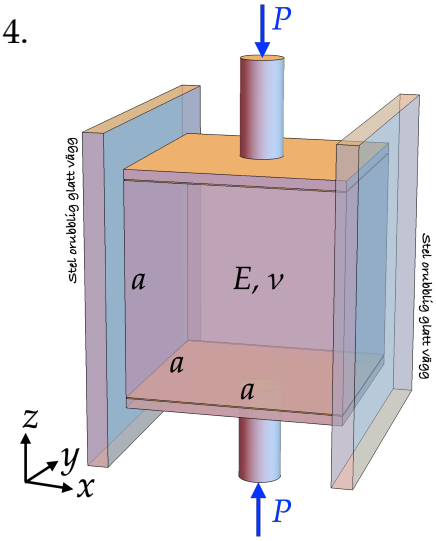
Uttryck spänningsmatrisen i ett cirkulärcylindriskt koordinatsystem $r\ \varphi\ z$.
En av ångpanneformlerna ger ringspänningen. Till skillnad från ångpanneformlerna försummar vi enligt uppgiftstexten INTE den radiella normalspänningen, och, eftersom röret är "öppet" i ändarna, har vi spänningen = 0 i z-led.
Formeln för skjuvspänningen vid vridning av tunnväggigt rör ger sedan $\tau_{\varphi z}$ och $\tau_{z\varphi}$.
(Övriga element noll "av symmetriskäl".)

Svar:

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{pr}{h} & \frac{M_v}{2\pi r^2 h} \\ 0 & \frac{M_v}{2\pi r^2 h} & 0 \end{pmatrix}$$

■

4.



En homogen, lätt, elastisk kub av sidan a, med elasticitetsmodulen E och tvärkontraktionstalet ν, är (i obelastat tillstånd) i x-led perfekt inpassad mellan två parallella, glatta, stela och orubbliga väggar som figuren antyder.

I z-led är kubens övre och undre begränsningsytor utsatta för ett jämnt fördelat tryck, orsakat av två krafter av storleken P som visas i figuren.

I y-led är kuben fri att utvidga sig.

Ställ upp lagom många ekvationer för att kunna bestämma normalspänningarna och normaltöjningarna i kuben! (5p)

Du behöver inte lösa ekvationssystemet!

Ur uppgiftstexten får vi direkt att

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 0 & (1) \\ \sigma_y = 0 & (2) \\ \sigma_z = -P/a^2 & (3) \end{cases}$$

Hookes generaliserade lag ger oss

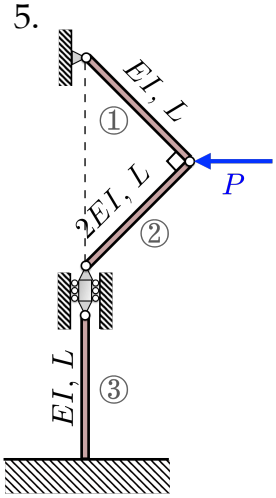
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) & (4) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) & (5) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) & (6) \end{cases}$$

Ur ovanstående sex ekvationer kan vi bestämma de sex obekanta σ_x, σ_y, σ_z och ε_x, ε_y, ε_z.

Svar: Ekvation (1), (2), (3), (4), (5) och (6) ovan.

■

5.



Tre balkar ①, ② och ③, alla av längden L, är sammanfogade med momentfria leder så som figuren visar. Balk ② har en böjstyvhet som är dubbelt så stor som böjstyvheterna hos balk ① och ③.

En punktkraft av storleken P appliceras enligt figuren. Man vill veta vilken av balkarna som knäcks först när P ökas från noll till allt större värden.

a) Bestäm tryckkrafterna i balkarna. (2p)

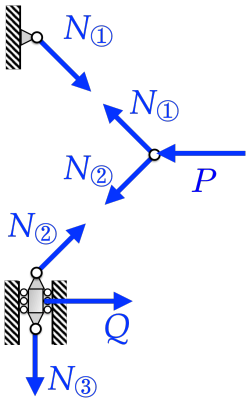
b) Avgör för var och en av balkarna vilket Eulerfall som är tillämpligt. (2p)

c) Bestäm vilken av balkarna som knäcks först. (1p)

a) Frilägg på vanligt vis knutpunkterna och ställ upp jämviktsekvationerna. Observera att var och en av balkarna är ett tvåkraftssystem (jfr mekanikkursen). Resultatet blir att balkarna påverkas av tryckkrafter

$$-N_{①} = -N_{②} = P_{①} = P_{②} = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

$$-N_{③} = P_{③} = \frac{P}{2}$$



b) Se FS! För balkarna ①, ② har vi Eulers 2:a knäckfall, medan för balk ③ har vi Eulers 3:e knäckfall.

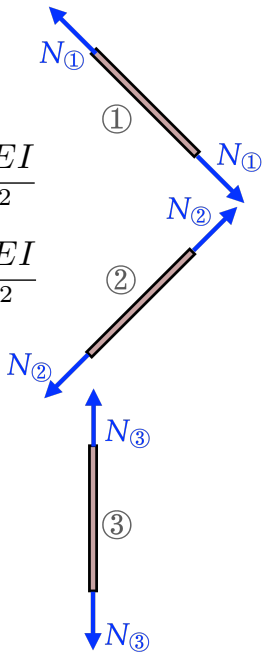
c) Kritiska lasten för var och en av balkarna får vi (enligt a) och b) och FS) till:

Balk ① knäcks då $\dfrac{P}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$ dvs då $P = P_{\text{krit1}} = \sqrt{2} \cdot \dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$

Balk ② knäcks då $\dfrac{P}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi^2 (2EI)}{L^2}$ dvs då $P = P_{\text{krit2}} = 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$

Balk ③ knäcks då $\dfrac{P}{2} = \dfrac{2.05\,\pi^2 EI}{L^2}$ dvs då $P = P_{\text{krit3}} = 4.1 \cdot \dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$

P_{krit1} är minst, så balk ① knäcks först!



■