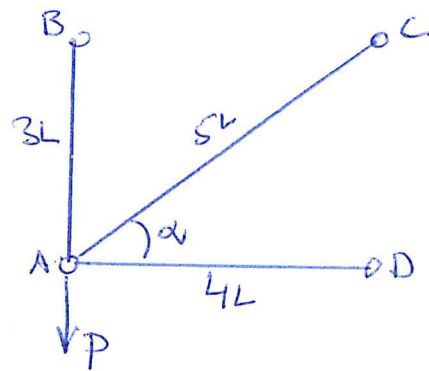
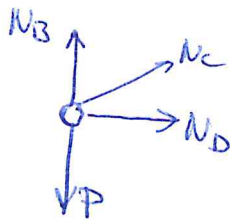




$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

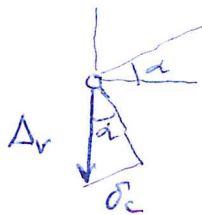
Jämvikt: A: (dragkraft i stång positiv)



$$\rightarrow: N_D + N_C \cos \alpha = 0 \quad , \quad \frac{4}{5} N_C + N_D = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow: N_B + N_C \sin \alpha - P = 0 \quad \frac{3}{5} N_C + N_B = P \quad (2)$$

Betrakta en förföringning Δ_v nedåt av knut A.

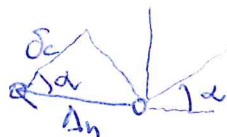


Stångförlängningen $\delta_i = \frac{N_i L_i}{EA}$ (Lundh 2-14) beräknas som komponenten av Δ_v parallellt stången.

$$\delta_B = \Delta_v = \frac{N_B \cdot 3L}{EA}, \quad N_B = \frac{EA}{3L} \Delta_v$$

$$\delta_C = \Delta_v \sin \alpha, \quad \Delta_v = \frac{\delta_C}{\sin \alpha} = \frac{N_C \cdot 5L}{\frac{3}{5} EA}, \quad N_C = \frac{3EA}{25L} \Delta_v$$

En förföringning Δ_h åt vänster ger p.s.s



$$\delta_D = \Delta_h = \frac{N_D \cdot 4L}{EA}, \quad N_D = \frac{EA}{4L} \Delta_h$$

$$\delta_C = \Delta_h \cos \alpha, \quad \Delta_h = \frac{\delta_C}{\cos \alpha} = \frac{N_C \cdot 5L}{\frac{4}{5} EA}, \quad N_C = \frac{4EA}{25L} \Delta_h$$

Då knut A försöks, får vi alltså
stängkrafterna

$$N_B = \frac{EA}{L} \cdot \frac{1}{3} \Delta_v$$

$$N_C = \frac{EA}{L} \left(\frac{3}{25} \Delta_v + \frac{4}{25} \Delta_h \right)$$

$$N_D = \frac{EA}{L} \cdot \frac{1}{4} \Delta_h$$

Insättning i jämviktskr (1) & (2) ger

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{16}{125} \right) \Delta_h + \frac{12}{125} \Delta_v = 0$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{9}{125} \right) \Delta_v + \frac{12}{125} \Delta_h = \frac{PL}{EA}$$

med lösningen $\Delta_v = \frac{21PL}{8EA}$ (nedåt) och

$$\Delta_h = \frac{2PL}{3EA} \text{ (höger)}$$

```

clear all

% MHA081 2020-10-09 #2

% Given spänningstensor [MPa]
S = [ 20  50  -5;
      50 -25 -50;
      -5 -50  20];
tau_tol = 80; % max tillåten skjuvspänning [MPa]

sig_x = 20;

% max skjuvspänning fås som radien i den största av Mohrs
% cirklar (= halva skillnaden mellan största och minsta
% egenvärdet till S)
sig_i = eig(S);
tau_max = (max(sig_i) - min(sig_i))/2;

% öka sig_x med 1 [MPa] tills dess att tau_max >= tau_tol
inc = 1;
while tau_max < tau_tol
    S(1,1) = S(1,1) + inc;
    sig_i = eig(S);
    tau_max = (max(sig_i) - min(sig_i))/2;
end
diary on
fprintf('\nsigma_x kan ökas med %4.0f [MPa]\n', S(1,1)-sig_x);
diary off

```

sigma_x kan ökas med 33 [MPa]

Största skjuvspänningen fås som halva skillnaden mellan största och minsta huvudspänningen, där huvudspänningarna fås som egenvärdena till spänningstensor; Lunde 9-35, 89

För det givna spännings tillståndet finner man

$$\sigma_1 = 75 \text{ MPa}, \sigma_2 = 15 \text{ MPa} \text{ och } \sigma_3 = -75 \text{ MPa} \text{ så } \tau_{\max} = 75 \text{ MPa}$$

Genom att successivt öka σ_x (Matlab-kod ovan) finner man att $\tau_{\max} > 80 \text{ MPa}$ då σ_x ökas med 33 MPa

Med konstant böjstyvhet EI har vi $EI w'''' = q(x)$

(Lundh 7-69). Vi modellerar lasten mha

Diracs delta-funktion: $q = P \delta(x - \alpha L)$

Randvillkoren är här $w(0) = w(L) = 0$, $w'(0) = 0$ (ingen rotation, samt $w''(L) = 0$ (ty $M(L) = -EI w''(L) = 0$)).

Randvärdesproblemet är alltså

$$\begin{cases} EI w'''' = P \delta(x - \alpha L) & 0 < x < L \\ w(0) = 0, w'(0) = 0 \\ w(L) = 0, w''(L) = 0 \end{cases}$$

Integrera:

$$EI w''' = P \mathcal{H}(x - \alpha L) + C_1$$

$$EI w'' = P \mathcal{H}(x - \alpha L) \cdot (x - \alpha L) + C_1 x + C_2$$

$$w''(L) = 0: C_2 = -C_1 L - P(1 - \alpha)L$$

$$EI w' = P \mathcal{H}(x - \alpha L) \frac{(x - \alpha L)^2}{2} + C_1 \frac{x^2}{2} - C_1 x L - P x L (1 - \alpha) + C_3$$

$$w'(0) = 0: C_3 = 0$$

$$EI w = P \mathcal{H}(x - \alpha L) \frac{(x - \alpha L)^3}{6} + C_1 \frac{x^3}{6} - C_1 \frac{x^2 L}{2} - \frac{P x^2 L}{2} (1 - \alpha) + C_4$$

$$w(0) = 0: C_4 = 0$$

$$w(L) = 0: \frac{P L^3}{6} (1 - \alpha)^3 - \frac{P L^3}{2} (1 - \alpha) + \frac{C_1 L^3}{6} (1 - 3) = 0$$

$$C_1 = \frac{P}{2} (1 - \alpha)^3 - \frac{3P}{2} (1 - \alpha)$$

$$w(x) = \frac{P}{EI} \left[\mathcal{H}(x - \alpha L) \cdot \frac{L^3}{6} \left(\frac{x}{L} - \alpha \right)^3 + \frac{P L^3}{2} \left((1 - \alpha)^3 - 3(1 - \alpha) \right) \left(\frac{1}{6} \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right) + \frac{P(1 - \alpha)L^3}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] =$$

$$\frac{P L^3}{12 EI} \left(2 \mathcal{H}(x - \alpha L) \left(\frac{x}{L} - \alpha \right)^3 + ((1 - \alpha)^3 - 3(1 - \alpha)) \left(\left| \frac{x}{L} \right|^3 - 3 \left| \frac{x}{L} \right|^2 \right) - 6(1 - \alpha) \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right)$$

Lundh 7-65: $M = -EI w''$ ger

$$M(x) = \frac{PL}{12} \left(-12 J(x-a) \left(\frac{x}{L} - a \right) - 6(1-a)^3 - 3(1-a) \right) \left(\frac{x}{L} - 1 \right) + 12(1-a) \Big] =$$

$$\underline{PL \left((1-a) - \frac{4}{2} (1-a)^3 - 3(1-a) \right) \left(\frac{x}{L} - 1 \right) - J(x-a) \left(\frac{x}{L} - a \right)}$$

Med $a = \frac{1}{2}$ fås

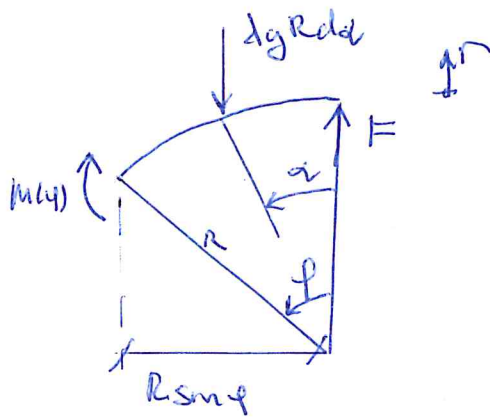
$$M(0) = PL \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \right) (-1) - 0 \right) = \frac{3PL}{16}$$

vilket stämmer med formelsamlingens
elementfall på sid 13

a) Låt $\lambda = \frac{m}{\pi R/2} = \frac{2m}{\pi R}$ vara massan/längdenhet båge.

Egenkyngden över en vinkel $d\alpha$ är då $\lambda \cdot R d\alpha \cdot g$.

Snittavord φ och ställ upp momentjämvikt



$$\rightarrow: M(\varphi) - F \cdot R \sin \varphi + \int_0^\varphi \lambda R^2 g (\sin \varphi - \sin \alpha) d\alpha = 0$$

$$M(\varphi) = F R \sin \varphi - \lambda R^2 g [\varphi \sin \varphi + \cos \varphi]_0^\varphi =$$

$$\underline{\underline{F R \sin \varphi - \frac{2mgR}{\pi} (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1)}}$$

b) Vi beräknar förskjutningen r vid kraften F 's angreppspunkt. Castiglianos 2a sats (Lundh 15-96)

ger $r = \frac{\partial W}{\partial F}$ där den elastiska energin

$$W = \int_0^{\pi/2} \frac{M^2}{2EI} R d\varphi \quad \text{om endast böj deformation beaktas}$$

(Lundh 15-52). Vi har då

$$r = \int_0^{\pi/2} \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial F} R d\varphi \quad \text{och enl. ovan}$$

$$\frac{\partial M}{\partial F} = R \sin \varphi$$

$$\Rightarrow EI \Gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} FR^3 \sin^2 \varphi - \frac{2mgR^3}{\pi} (\varphi \sin^2 \varphi + \cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi) d\varphi$$

$$\frac{EI}{R^3} \Gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \sin^2 \varphi - \frac{2mg}{\pi} (\varphi \sin^2 \varphi + \cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi) d\varphi =$$

$$\frac{\pi F}{4} - \frac{2mg}{\pi} \cdot \frac{\pi^2 - 4}{16}$$

Kompatibilität: $\Gamma = \frac{-F}{k} = \frac{-R^3}{2EI} \cdot F$

$$\Rightarrow -\frac{F}{2} = \frac{\pi F}{4} - \frac{mg}{\pi} \cdot \frac{\pi^2 - 4}{8} \quad F = \frac{2mg \frac{\pi^2 - 4}{\pi(2\pi)}}{0,73mg}$$

a) Transversalförskjutningen vid utböjning av den trygta balken blir (Lundh 8-66)

$$w(x) = A + Bx + C \cos(\ln x) + D \sin(\ln x) \quad h^2 = \frac{P}{EI}$$

Rendvillkoren är här

$$w(L) = w(0) = 0$$

$$w''(0) = 0$$

$$w^u(t) + \frac{\lambda}{L} w^l(t) = 0$$

$$p \rightarrow \sigma \downarrow \quad h(\sigma) = 0 \Rightarrow w^k(\sigma) = 0$$

$w''(L)$
 $\left(\begin{array}{c} \text{---} \square \text{---} \\ \downarrow \end{array} \right) \text{---} w''(L)$
 $M(L) = -EI w''(L)$
 $l(L) = 0$

$$-EI w''(L) - \frac{d}{L} w'(L) = 0$$

Vi söker en icke-trivial lösning som uppfyller randvillkoren,

Derivata 2ggf:

$$w' = B - Cn \sin(\ln x) + Dn \cos(\ln x)$$

$$w'' = -Cn^2 \cos(nx) - Dn^2 \sin(nx)$$

$w(0) = w''(0) = 0$ ger: $A + C = 0, -Cn^2 = 0 \Rightarrow A = C = 0$

$$w(x) = Bx + D \sin(\ln x); \quad w(1) = 0 \Rightarrow B = -\frac{D}{2} \sin(\ln 2)$$

$$W(x) = D \left(-\frac{x}{L} \sin(\ln L) + \sin(\ln x) \right)$$

$$W'(x) = D \left(-\frac{\sin(\ln x)}{L} + n \cos(\ln x) \right)$$

$$w''(x) = D(-n^2 \sin(nx))$$

Villkoret för momentjämvikt vid $x=L$ ger nu

$$D \left(-a \frac{\sin(nL)}{L^2} + \frac{an}{L} \cos(nL) - n^2 \sin(nL) \right) = 0$$

$$-\frac{D_{\text{gas}}(n_L)}{12} \left(\alpha \frac{1}{n_L} \ln(n_L) + (n_L)^2 \ln(n_L) - \alpha n_L \right) = 0$$

icke-trivial lösning kräver alltså

$$f(m) = (a + bm)^2 \tan(m) - am = 0$$

Lagsta positiva roten
ger knäcklasten

b) Med $\alpha = \frac{17}{4}$ söker vi första positiva nollstället till

$$f(nL) = (17 + 4(nL)^2) \tan(nL) - 17nL$$

Vi vet att knäcklasten måste ligga mellan Eulers $2a$ ($S=0$) och $3a$ ($S \rightarrow \infty$) knäckfall, för vilka $nL = \pi$ resp. $nL \approx 4,49$. Med Matlabs

`fzero(@f, [pi 4,49])` finner vi

$$nL \approx 3,85 \approx 1,2255\pi, \text{ s\u00e5}$$

$$(nL)^2 \approx \frac{3\pi^2}{2} = \frac{P_w L^2}{EI} ; \quad \underline{\underline{P_w = \frac{3\pi^2 EI}{2L^2}}}$$

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA KF OCH F — MHA 081

19 AUGUSTI 2020

Lösningar

- Tid och plats: 8.30—12.30 via Canvas och Zoom. Lärare närvarande under skrivningstiden.
- Hjälpmedel: N/A
- Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505, peter.moller@chalmers.se
- Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M-huset under vecka 35. Även på Canvas.
- Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2020) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

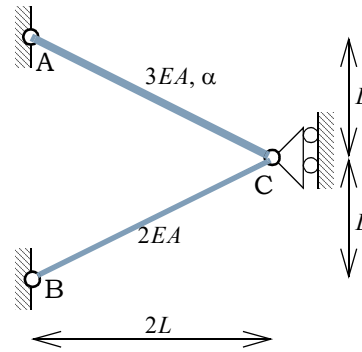
För att få poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

- Resultatlista: Anslås 7/9 på samma ställe som lösningarna.

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

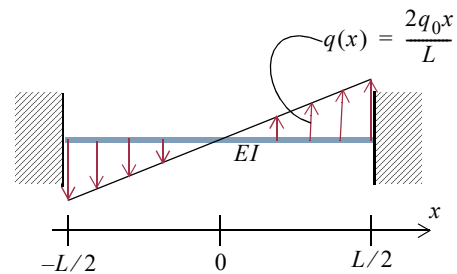
1.

Stångbärverket i figuren består av två stänger, **AC** och **BC**, som båda är ledat infäst till en vägg och där horisontell förskjutning är förhindrad i den gemensamma punkten **C** (se figur). Båda är tillverkade av ett lineärt elastiskt material med elasticitetsmodul E och längdutvidningskoefficient α . Den övre stängen (**AC**) har tvärsnittsarea $3A$, medan den undre (**BC**) har tvärsnittsarea $2A$. Vid temperaturen T_0 är stängerna spänningslösa. Bestäm stångkrafterna då **AC** värms till $T = T_0 + \Delta T$. (5p)



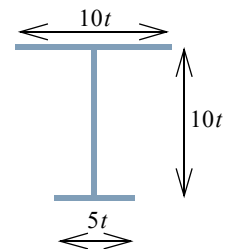
2.

En dubbelsidigt fast inspänd balk, tillverkad av ett lineärt elastiskt material, har konstant böjstyvhets EI och längd L . Den belastas av en utbredd last med intensitet $q(x) = \frac{2q_0x}{L}$ (kraft/längd), med x enligt figuren.



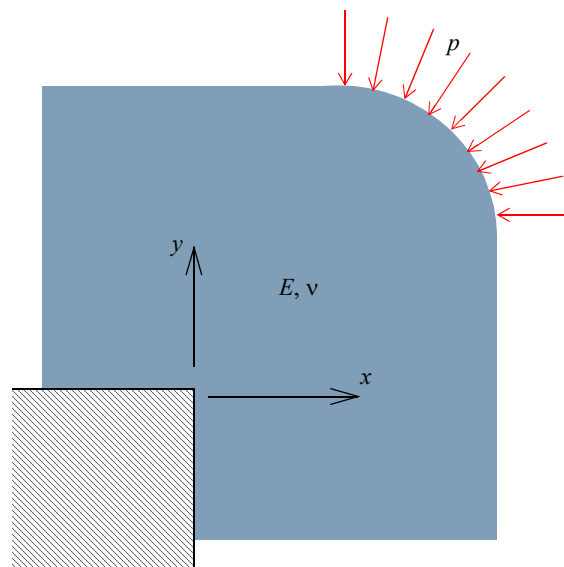
a: Bestäm rotationen vid $x = 0$, dvs $\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0}$, där $w(x)$ är balkens transversalförskjutning. (2p)

b: Balken har ett enkelsymmetriskt, tunnväggigt, I-tvärsnitt med godstjocklek $t = 10 \text{ mm}$ enligt figuren. Bestäm maximalt värde på q_0 om $L = 3 \text{ m}$ och största tillåtna böjnormalspänning är $\sigma = 100 \text{ MPa}$. Ledning: största snittmomenten i balken uppträder vid inspänningarna. (3p)



3.

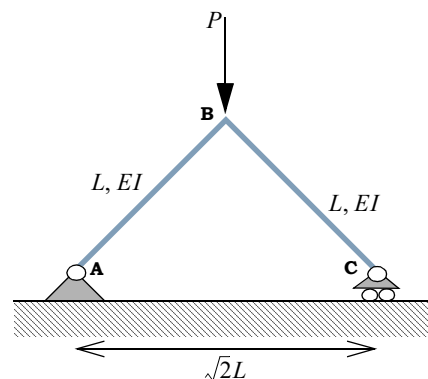
Betrakta det illustrerade elasticitetsproblemet. Materialet är lineärt elastiskt med elasticitetsmodul E och Poissons tal ν . De två kanterna ($x < 0, y = 0$) samt ($x = 0, y < 0$) modelleras som fast inspända, och den kvarts-cirkelformade delen uppe till höger belastas med ett tryck p (kraft/yta). Tjockleken t i z -led tänks liten i förhållande till storleken i (x, y) -planet.



- a: För att förenkla analysen vill vi först reducera elasticitetskvationerna (3D) till ett plant problem (2D). Vilket antagande är lämpligt för att i detta fall göra denna reduktion? Motivera svaret tydligt. (1p)
- b: Formulera randvillkoren på den belastade delen av randen. Införda beteckningar ska definieras. (2p)
- c: I vilken eller vilka punkter kan man förvänta sig spänningskoncentrationer? Motivera svaret. (2p)

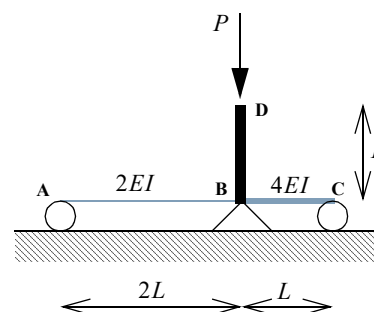
4.

Ramen **ABC** består av två balkar, vardera med längden L och böjstyvheten EI . Vid **B** bildar ramen en rät vinkel och där angriper en vertikalt riktad kraft P ; bestäm förskjutningen av stödet vid **C**. Endast böjdeformationer behöver beaktas. (5p)



5.

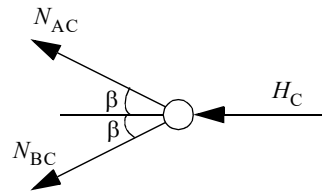
Beräkna kritisk last $P = P_{kr}$ med avseende på elastisk stabilitet för konstruktionen i figuren. Observera att balkarna i de två spannen, **AB** respektive **BC**, har olika längd och olika böjstyvheter. Flexibiliteten hos pelaren **DB** får försummas (d v s den får betraktas som oändligt styv). (5p)



Lösning 1: Frilägg knuten C — vertikal jämvikt ger

$$\frac{N_{BC}}{\sqrt{5}} = \frac{N_{AC}}{\sqrt{5}}$$

(1)



$$\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

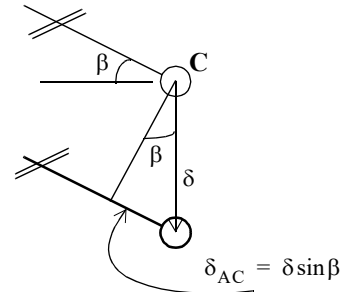
Om knuten C förskjuts ett stycke δ nedåt, förlängs AC

$$\delta_{AC} = \frac{\delta}{\sqrt{5}} \cdot \text{Kraft-förlängningssambandet för en stång (Lundh ekv 2-14, 5-4)}$$

$$\text{ger } \delta_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot \sqrt{5}L}{3EA} + \alpha \cdot \Delta T \cdot \sqrt{5}L. \text{ Ur dessa två samband löser vi}$$

$$\delta = \frac{5N_{AC}L}{3EA} + 5\alpha L \cdot \Delta T$$

(2)



Av symmetriskäl ser vi också att BC förkortas $\delta_{BC} = -\frac{\delta}{\sqrt{5}}$ och 2-14 ger här $\delta_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot \sqrt{5}L}{2EA}$, så

$$\delta = \frac{-5N_{BC}L}{2EA} \quad (3)$$

Ur (2) och (3) får vi $\frac{5L}{EA} \left(\frac{1}{3}N_{AC} + \frac{1}{2}N_{BC} + \alpha EA \cdot \Delta T \right) = 0$ som med (1) ger $N_{AC} = N_{BC} = -\frac{6}{5}\alpha EA \cdot \Delta T$

Lösning 2: Problemet beskrivs av elastiska linjens ekvation. Med konstant böjstyvhets och den givna belastningen

blir denna (Lundh 7-69) $w^{iv} = \frac{2q_0x}{LEI}$. Man finner alltså

$$w(x) = \frac{q_0L^4}{60EI} \left(\frac{x}{L} \right)^5 + A \left(\frac{x}{L} \right)^3 + B \left(\frac{x}{L} \right)^2 + C \left(\frac{x}{L} \right) + D$$

Eftersom problemet är anti-symmetriskt med avseende på $x = 0$, måste vi ha $B = D = 0$. Randvillkoren

$w\left(\frac{\pm L}{2}\right) = 0$ och $\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=\pm \frac{L}{2}} = 0$, ger ekvationerna $\frac{q_0L^4}{1920EI} + \frac{A}{8} + \frac{C}{2} = 0$ respektive $\frac{q_0L^3}{192EI} + \frac{3A}{4L} + \frac{C}{L} = 0$, med lös-

ningen $A = \frac{-q_0L^4}{120EI}$ $C = \frac{q_0L^4}{960EI}$. Balkens transversella utböjning blir då

$$w(x) = \frac{q_0L^4}{960EI} \left(16 \left(\frac{x}{L} \right)^5 - 8 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right) \right) \quad (4)$$

2a: Derivering av ekv (6) ger $\frac{dw}{dx} = \frac{q_0L^3}{960EI} \left(80 \left(\frac{x}{L} \right)^4 - 24 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 1 \right)$, så $\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = \frac{q_0L^3}{960EI}$ (Alternativt: använd ele-

mentarfall, formelsamlingen sid 13, med $m_1 = -\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0}$, $W_2 = -q_0$ och balklängden $\frac{L}{2}$).

2b: Största spänningen fås som (Lundh 7–26)

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M|_{\max} |z|_{\max}}{I_y} \quad (5)$$

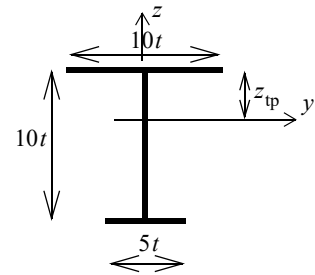
där momentet (M) beror av den sökta q_0 . För att bestämma maximal z -koordinat i tvärsnittet och areatröghetsmomentet, måste vi först hitta yttyngdpunkten. Statiskt moment med avseende på en axel längs övre flänsen ger

$z_{\text{tp}} A = 10t^2 \cdot 0 + 10t^2 \cdot 5t + 5t^2 \cdot 10t$, där $A = 25t^2$ är tvärsnittsarean. Vi får

$z_{\text{tp}} = 4t$, så $|z|_{\max} = 6t$ (tvärsnittets underkant).

Areatröghetsmomentet beräknas med Steiners sats (Lundh 7–42)

$$I_y = 10t^2 \cdot z_{\text{tp}}^2 + \frac{t \cdot (10t)^3}{12} + 10t \cdot (5t - z_{\text{tp}})^2 + 5t^2 \cdot (10t - z_{\text{tp}})^2 = \frac{1300t^4}{3}$$



Första och sista termerna är övre respektive undre flänsarnas bidrag; bidraget från flänsarnas areatröghetsmoment med avseende på deras respektive tyngdpunktsaxlar har försummats.

Snittmomentet i balken kan beräknas med ekv (4): $M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{q_0 L^2}{60} \left(3 \frac{x}{L} - 20 \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right)$. Maximalt moment fås i

balkändarna: $M\left(-\frac{L}{2}\right) = -M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q_0 L^2}{60}$. (Alternativt kan momenten fås från elementarfall; Formelsamlingen sid

14 med $W_1 = q_0$ och $W_2 = -2q_0$ ger rätt inspänningsmoment).

Insättning i ekv (5) ger nu $|\sigma|_{\max} = \frac{\frac{q_0 L^2}{60} \cdot 6t}{\frac{1300t^4}{3}}$, varur $q_0 = \frac{13000\sigma t^3}{3L^2} \approx 48 \text{ kN/m}$

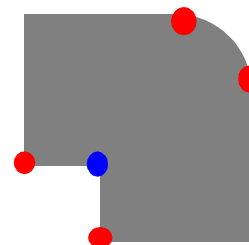
Lösning 3a: Skivans ytor (parallellt (x, y) -planet) är obelastade, så normal- och tangentialspänningarna är noll: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Eftersom skivan är tunn är det rimligt att anta att dessa är noll eller små genom hela tjockleken, dvs att anta plant spänningstillstånd i (x, y) -planet.

Lösning 3b: Låt $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}^T$ vara en utåtriktad enhetsnormal till randen Γ . Kraftkomponenterna i x - och y -led på ett litet segment $\Delta\Gamma$ av den belastade randen är då $\Delta P_x = -p \cdot t \cdot \Delta\Gamma \cdot n_x$ respektive $\Delta P_y = -p \cdot t \cdot \Delta\Gamma \cdot n_y$. Trac-

tionvektorns komponenter $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{bmatrix}$ är kraften per yt-enhet, vi har då randvillkoren (jämviktsvill-

kor) $\begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_x \\ \Delta P_y \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{t \Delta\Gamma} = \begin{bmatrix} -p n_x \\ -p n_y \end{bmatrix}$

Lösning 3c: Spänningskoncentrationer uppträder i områden kring punkter där den analytiska lösningen är singular. I exemplet har vi en singular punkt vid det inåtvända (skarpa) hörnet (blå markering) samt i 4 punkter (rött) där randvillkoren ändras abrupt.



Lösning 4: Om vi inför en horisontell kraft $P_C = 0$ vid stödet C, kan den sökta förskjutningen beräknas med

Castiglianos 2:a sats (Lundh ekv 15–96): $\delta_C = \frac{\partial W}{\partial P_C}$. Här är W den elastiska energin i strukturen; om endast böj-

deformation beaktas är (Lundh ekv 15–52) $W = \int_s \frac{M^2}{2EI} ds$, där integrationen är över hela bärverkets längd. Kraft-

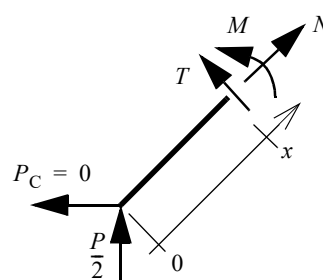
och momentjämvikt ger stödreaktioner enligt figuren.

Snitta nu mellan A och B, på ett godtyckligt avstånd x från A. Momentjämvikt ger snittmomentet

$$M(x) = \frac{Px}{2\sqrt{2}} + \frac{P_C x}{\sqrt{2}} = \frac{Px}{2\sqrt{2}}$$

så $\frac{\partial M}{\partial P_C} = \frac{x}{\sqrt{2}}$. Castiglianos 2:a sats ger nu, med utnyttjande av symmetrin

$$\delta_C = 2 \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_C} dx = \frac{P}{2EI} \int_0^L x^2 dx = \frac{PL^3}{6EI}$$



Lösning 5: Betrakta konstruktionen i utböjt läge; vinkeln θ

är liten, d v s vi tittar på konstruktionen just i det läge den knäcker ut. I figuren är endast snittmomenten vid B utritade

— normal- och tvärkrafter visas ej. Momentjämvikt vid B för pelaren BD ger ett $M_{BD} = P_{kr} \theta L$ där vi utnyttjat att

$\sin \theta \approx \theta$. Elementarfall sid 11 ger $\theta = M_{BA} \cdot \frac{2L}{3 \cdot 2EI}$ samt

$\theta = M_{BC} \cdot \frac{L}{3 \cdot 4EI}$ för delarna AB respektive BC. Detta ger

att $M_{BA} = \frac{3EI}{L} \cdot \theta$ respektive $M_{BC} = \frac{12EI}{L} \cdot \theta$. Momentjämvikt för den utsnittade delen vid B ger att

$M_{BD} - M_{BA} - M_{BC} = 0$, så att vi får $P_{kr} \theta L - \frac{3EI}{L} \theta - \frac{12EI}{L} \theta = 0$. Ur detta löses $P_{kr} = \frac{15EI}{L^2}$ för $\theta \neq 0$

