TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA KF OCH F — MHA 081
19 AUGUSTI 2020

Lösningar

Tid och plats: 8.30—12.30 via Canvas och Zoom. Lärare närvarande under skrivningstiden.

Hjälpmedel: **N/A**

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505, peter.moller@chalmers.se

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset under vecka 35. Även på Canvas.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2020) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

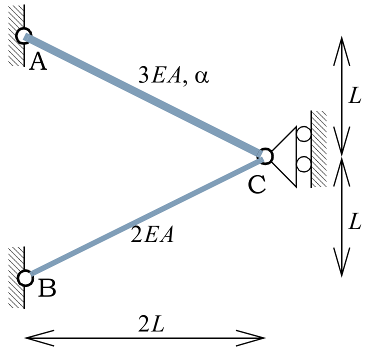
För att få poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

Resultatlista: Anslås 7/9 på samma ställe som lösningarna.

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

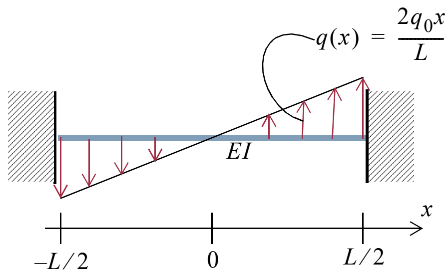
1.

Stångbärverket i figuren består av två stänger, **AC** och **BC**, som båda är ledat infäst till en vägg och där horisontell förskjutning är förhindrad i den gemensamma punkten **C** (se figur). Båda är tillverkade av ett lineärt elastiskt material med elasticitetsmodul E och längdutvidningskoefficient α. Den övre stången (**AC**) har tvärsnittsarea $3A$, medan den undre (**BC**) har tvärsnittsarea $2A$. Vid temperaturen T_0 är stängerna spänningslösa. Bestäm stångkrafterna då **AC** värms till $T = T_0 + \Delta T$. (5p)



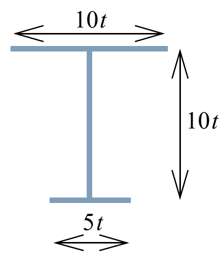
2.

En dubbelsidigt fast inspänd balk, tillverkad av ett lineärt elastiskt material, har konstant böjstyvhet EI och längd L. Den belastas av en utbredd last med intensitet $q(x) = \frac{2q_0x}{L}$ (kraft/längd), med x enligt figuren.



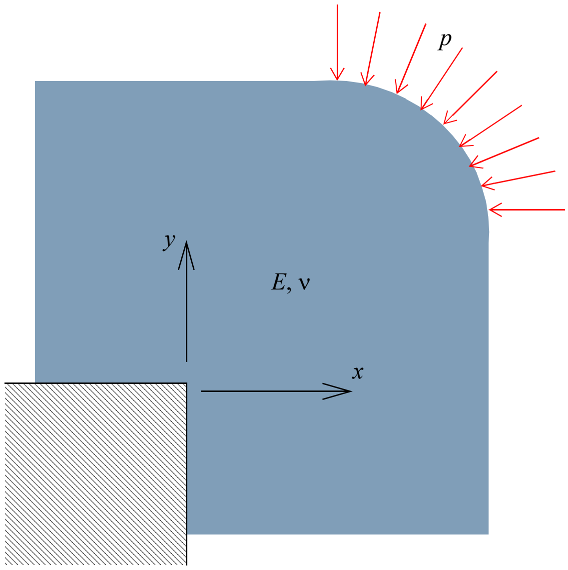
a: Bestäm rotationen vid $x = 0$, dvs $\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$, där $w(x)$ är balkens transversalförskjutning. (2p)

b: Balken har ett enkelsymmetriskt, tunnväggigt, I–tvärsnitt med godstjocklek $t = 10\ \mathrm{mm}$ enligt figuren. Bestäm maximalt värde på q_0 om $L = 3\ \mathrm{m}$ och största tilllåtna böjnormalspänning är $\sigma = 100\ \mathrm{MPa}$. Ledning: största snittmomenten i balken uppträder vid inspänningarna. (3p)



3.

Betrakta det illustrerade elasticitetsproblemet. Materialet är lineärt elastiskt med elasticitetsmodul E och Poissons tal ν. De två kanterna $(x < 0, y = 0)$ samt $(x = 0, y < 0)$ modelleras som fast inspända, och den kvarts–cirkelformade delen uppe till höger belastas med ett tryck p (kraft/yta). Tjockleken t i z–led tänks liten i förhållande till storleken i (x, y)–planet.



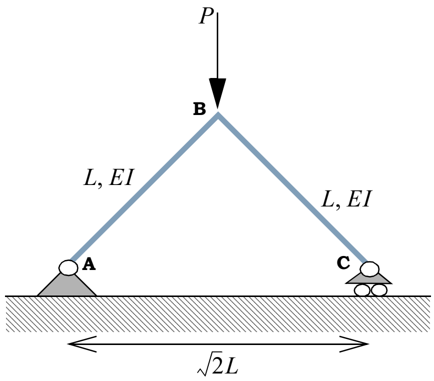
a: För att förenkla analysen vill vi först reducera elasticitetsekvationerna (3D) till ett plant problem (2D). Vilket antagande är lämpligt för att i detta fall göra denna reduktion? Motivera svaret tydligt. (1p)

b: Formulera randvillkoren på den belastade delen av randen. Införda beteckningar ska definieras. (2p)

c: I vilken eller vilka punkter kan man förvänta sig spänningskoncentrationer? Motivera svaret. (2p)

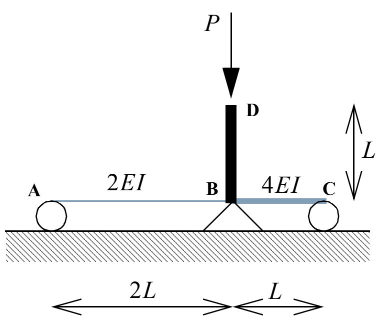
4.

Ramen **ABC** består av två balkar, vardera med längden L och böjstyvheten EI. Vid **B** bildar ramen en rät vinkel och där angriper en vertikalt riktad kraft P; bestäm förskjutningen av stödet vid **C**. Endast böjdeformationer behöver beaktas. (5p)



5.

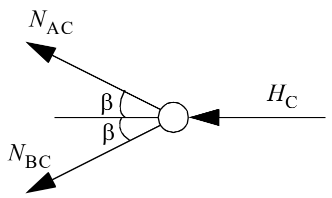
Beräkna kritisk last $P = P_{\mathrm{kr}}$ med avseende på elastisk stabilitet för konstruktionen i figuren. Observera att balkarna i de två spannen, **AB** respektive **BC**, har olika längd och olika böjstyvhet. Flexibiliteten hos pelaren **DB** får försummas (d v s den får betraktas som oändligt styv). (5p)



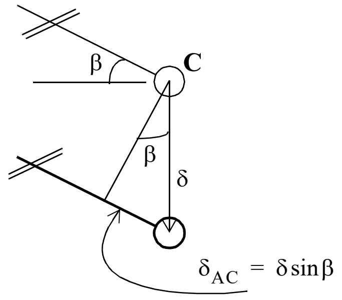
Lösning 1: Frilägg knuten **C** — vertikal jämvikt ger

$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{N_{BC}}{\sqrt{5}} = \frac{N_{AC}}{\sqrt{5}} \tag{1}$$



Om knuten **C** förskjuts ett stycke δ nedåt, förlängs **AC**



$\delta_{AC} = \dfrac{\delta}{\sqrt{5}}$. Kraft–förlängningssambandet för en stång (Lundh ekv 2–14, 5–4)

ger $\delta_{AC} = \dfrac{N_{AC}\cdot\sqrt{5}L}{3EA} + \alpha\cdot\Delta T\cdot\sqrt{5}L$. Ur dessa två samband löser vi

$$\delta = \frac{5N_{AC}L}{3EA} + 5\alpha L\cdot\Delta T \tag{2}$$

Av symmetriskäl ser vi också att **BC** förkortas $\delta_{BC} = \dfrac{-\delta}{\sqrt{5}}$ och 2–14 ger här $\delta_{BC} = \dfrac{N_{BC}\cdot\sqrt{5}L}{2EA}$, så

$$\delta = \frac{-5N_{BC}L}{2EA} \tag{3}$$

Ur (2) och (3) får vi $\dfrac{5L}{EA}\left(\dfrac{1}{3}N_{AC} + \dfrac{1}{2}N_{BC} + \alpha EA\cdot\Delta T\right) = 0$ som med (1) ger $N_{AC} = N_{BC} = -\dfrac{6}{5}\alpha EA\cdot\Delta T$

Lösning 2: Problemet beskrivs av elastiska linjens ekvation. Med konstant böjstyvhet och den givna belastningen blir denna (Lundh 7–69) $w^{iv} = \dfrac{2q_0x}{LEI}$. Man finner alltså

$$w(x) = \frac{q_0L^4}{60EI}\left(\frac{x}{L}\right)^5 + A\left(\frac{x}{L}\right)^3 + B\left(\frac{x}{L}\right)^2 + C\left(\frac{x}{L}\right) + D$$

Eftersom problemet är anti–symmetriskt med avseende på $x = 0$, måste vi ha $B = D = 0$. Randvillkoren $w\left(\dfrac{\pm L}{2}\right) = 0$ och $\left.\dfrac{dw}{dx}\right|_{x = \frac{\pm L}{2}} = 0$, ger ekvationerna $\dfrac{q_0L^4}{1920EI} + \dfrac{A}{8} + \dfrac{C}{2} = 0$ respektive $\dfrac{q_0L^3}{192EI} + \dfrac{3A}{4L} + \dfrac{C}{L} = 0$, med lösningen $A = \dfrac{-q_0L^4}{120EI}$ $\quad C = \dfrac{q_0L^4}{960EI}$. Balkens transversella utböjning blir då

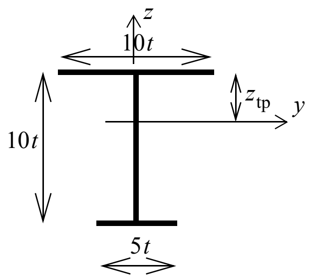
$$w(x) = \frac{q_0L^4}{960EI}\left(16\left(\frac{x}{L}\right)^5 - 8\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)\right) \tag{4}$$

2a: Derivering av ekv (6) ger $\dfrac{dw}{dx} = \dfrac{q_0L^3}{960EI}\left(80\left(\dfrac{x}{L}\right)^4 - 24\left(\dfrac{x}{L}\right)^2 + 1\right)$, så $\left.\dfrac{dw}{dx}\right|_{x=0} = \dfrac{q_0L^3}{960EI}$ (Alternativt: använd elementarfall, formelsamlingen sid 13, med $m_1 = -\left.\dfrac{dw}{dx}\right|_{x=0}$, $W_2 = -q_0$ och balklängden $\dfrac{L}{2}$).

2b: Största spänningen fås som (Lundh 7–26)

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M|_{\max}|z|_{\max}}{I_y} \tag{5}$$

där momentet (M) beror av den sökta q_0. För att bestämma maximal z–koordinat i tvärsnittet och areatröghetsmomentet, måste vi först hitta yttyngdpunkten. Statiskt moment med avseende på en axel längs övre flänsen ger



$z_{\mathrm{tp}}A = 10t^2 \cdot 0 + 10t^2 \cdot 5t + 5t^2 \cdot 10t$, där $A = 25t^2$ är tvärsnittsarean. Vi får

$z_{\mathrm{tp}} = 4t$, så $|z|_{\max} = 6t$ (tvärsnittets underkant).

Areatröghetsmomentet beräknas med Steiners sats (Lundh 7–42)

$$I_y = 10t^2 \cdot z_{\mathrm{tp}}^2 + \frac{t \cdot (10t)^3}{12} + 10t \cdot (5t - z_{\mathrm{tp}})^2 + 5t^2 \cdot (10t - z_{\mathrm{tp}})^2 = \frac{1300t^4}{3}$$

Första och sista termerna är övre respektive undre flänsarnas bidrag; bidraget från flänsarnas areatröghetsmoment med avseende på deras respektive tyngdpunktsaxlar har försummats.

Snittmomentet i balken kan beräknas med ekv (4): $M(x) = -EI\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{q_0L^2}{60}\left(3\frac{x}{L} - 20\left(\frac{x}{L}\right)^3\right)$. Maximalt moment fås i balkändarna: $M\left(\frac{-L}{2}\right) = -M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q_0L^2}{60}$. (Alternativt kan momenten fås från elementarfall; Formelsamlingen sid 14 med $W_1 = q_0$ och $W_2 = -2q_0$ ger rätt inspänningsmoment).

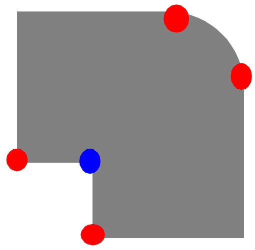
Insättning i ekv (5) ger nu $|\sigma|_{\max} = \dfrac{\frac{q_0L^2}{60} \cdot 6t}{\frac{1300t^4}{3}}$, varur $q_0 = \dfrac{13000\sigma t^3}{3L^2} \approx 48$ kN/m

---

Lösning 3a: Skivans ytor (parallellt (x, y)–planet)är obelastade, så normal– och tangentialspänningarna är noll: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Eftersom skivan är tunn är det rimligt att anta att dessa är noll eller små genom hela tjockleken, dvs att anta plant spänningstillstånd i (x, y)–planet.

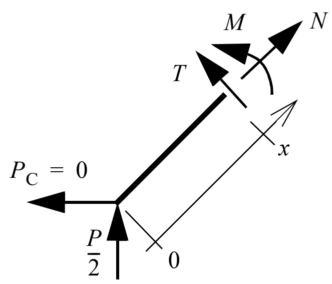
Lösning 3b: Låt $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ vara en utåtriktad enhetsnormal till randen Γ. Kraftkomponenterna i x– och y–led på ett litet segment $\Delta\Gamma$ av den belastade randen är då $\Delta P_x = -p \cdot t \cdot \Delta\Gamma \cdot n_x$ respektive $\Delta P_y = -p \cdot t \cdot \Delta\Gamma \cdot n_y$. Tractionvektorns komponeter $\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{bmatrix}$ är kraften per yt–enhet, vi har då randvillkoren (jämviktsvillkor) $\begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_x \\ \Delta P_y \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{t\Delta\Gamma} = \begin{bmatrix} -pn_x \\ -pn_y \end{bmatrix}$

Lösning 3c: Spänningskoncentrationer uppträder i områden kring punkter där den analytiska lösningen är singulär. I exmeplet har vi en singuär punkt vid det inåtvända (skarpa) hörnet (blå markering) samt i 4 punkter (rött) där randvillkoren ändras abrupt.



Lösning 4: Om vi inför en horisontell kraft $P_C = 0$ vid stödet **C**, kan den sökta förskjutningen beräknas med Castiglianos 2:a sats (Lundh ekv 15–96): $\delta_C = \frac{\partial W}{\partial P_C}$. Här är W den elastiska energin i strukturen; om endast böjdeformation beaktas är (Lundh ekv 15–52) $W = \int_s \frac{M^2}{2EI} ds$, där integrationen är över hela bärverkets längd. Kraft– och momentjämvikt ger stödreaktioner enligt figuren.

Snitta nu mellan **A** och **B**, på ett godtyckligt avstånd x från **A**. Momentjämvikt ger snittmomentet

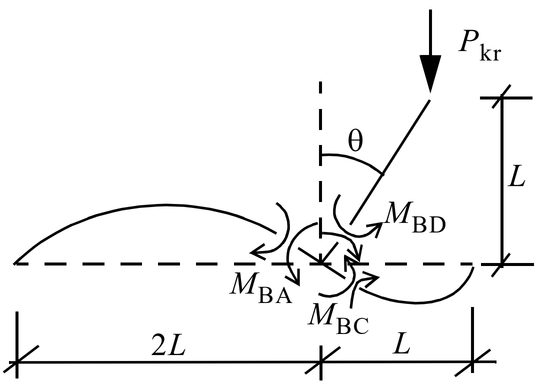


$$M(x) = \frac{Px}{2\sqrt{2}} + \frac{P_C x}{\sqrt{2}} = \frac{Px}{2\sqrt{2}}$$

så $\frac{\partial M}{\partial P_C} = \frac{x}{\sqrt{2}}$. Castiglianos 2:a sats ger nu, med utnyttjande av symmetrin

$$\delta_C = 2\int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_C} dx = \frac{P}{2EI}\int_0^L x^2 dx = \frac{PL^3}{6EI}$$

Lösning 5: Betrakta konstruktionen i utböjt läge; vinkeln θ är liten, d v s vi tittar på konstruktionen just i det läge den knäcker ut. I figuren är endast snittmomenten vid **B** utritade — normal– och tvärkrafter visas ej. Momentjämvikt vid **B** för pelaren **BD** ger ett $M_{BD} = P_{kr}\theta L$ där vi utnyttjat att $\sin\theta \approx \theta$. Elementarfall sid 11 ger $\theta = M_{BA} \cdot \frac{2L}{3 \cdot 2EI}$ samt $\theta = M_{BC} \cdot \frac{L}{3 \cdot 4EI}$ för delarna **AB** respektive **BC**. Detta ger



att $M_{BA} = \frac{3EI}{L} \cdot \theta$ respektive $M_{BC} = \frac{12EI}{L} \cdot \theta$. Momentjämvikt för den utsnittade delen vid **B** ger att $M_{BD} - M_{BA} - M_{BC} = 0$, så att vi får $P_{kr}\theta L - \frac{3EI}{L}\theta - \frac{12EI}{L}\theta = 0$. Ur detta löses $P_{kr} = \frac{15EI}{L^2}$ för $\theta \neq 0$