TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F OCH KF — MHA 081

4 JUNI 2020

Lösningar

Tid och plats:	14.00—18.30 på distans via Canvas och Zoom. Lärare närvarande via Zoom
Hjälpmedel:	Inga restriktioner, men tentamen ska genomföras enskilt.
Lärare:	Peter Möller, tel 031 772 1505, peter.moller@chalmers.se
Lösningar:	Publiseras på Canvas–sidan 5/6
Poängbedömning:	Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2020) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

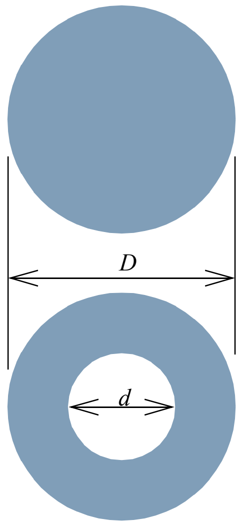
För att få poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

Resultatlista:	Beräknas vara klar 19/6 och läggs ut på Canvas. Resultaten läggs in i Ladok under vecka 26.
Granskning:	Via mejl efter överenskommelse

Ordinarie tentamenstid 14–18 har förlängts med 30 minuter för att ge tid att skanna och skicka in lösningsförslagen på Canvas. Kontrollera nogrant ljus och kontrast, så att dina dokument är läsbara. Använd helst pdf; undvik bildfiler (jpg, png, bmp etc). Om det skulle krångla med Canvas–inlämning kan du mejla som en nödlösning.

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

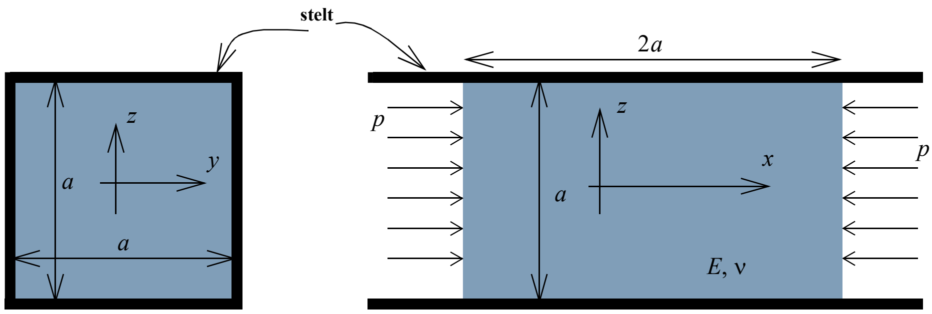
1.



En axel med längd $L = 10\ \text{m}$ har ett massivt cirkulärt tvärsnitt med diameter D. Materialet är lineärt elastiskt med skjuvmodulen $G = 80\ \text{GPa}$ och sträckgränsen vid ren skjuvning $\tau_s = 200\ \text{MPa}$. Vid varvtalet $n = 235\ \text{rpm}$ (varv/minut) överförs effekten $P = 4\ \text{MW}$ och säkerheten mot plasticering är då $s = 5$. Man vill minska på axelmassan genom att borra ur ett centralt hål med diameter d — hur mycket kan vikten minskas på detta sätt om säkerheten mot plasticering kan tillåtas minska till $s = 4$?

2.

En plugg av ett lineärt elastiskt material, elasticitetsmodul E och tvärkontraktionstal $\nu > 0$, har ett kvadratiskt tvärsnitt med sidlängd a. Pluggen har längd $2a$ och den passar exakt in i ett fyrkantsrör av ett material som är avsevärt styvare (än pluggen).



a: Beräkna kontakttrycket mellan kropparna då pluggen utsätts för ett tryck p i x–led enligt figuren. All friktion kan försummas. (3p)

b: Beräkna relativa volymsförändringen $\frac{\Delta V}{V}$ ($V = 2a^3$ är den odeformerade/obelastade kroppens volym). (1p)

c: Kontrollera ditt beräkningsresultat i b–uppgiften genom att sätta $\nu = 0{,}5$ (1p)

3.

I en punkt i en elastisk kropp har spänningarna beräknats till

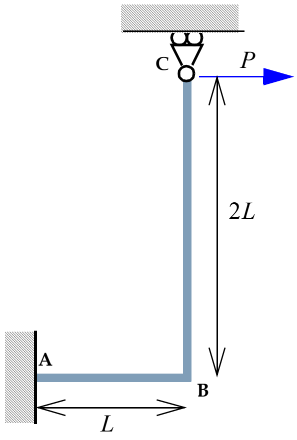
$$\sigma_x = \sigma_y = 37\ \text{MPa} \qquad \sigma_z = 94\ \text{MPa}$$
$$\tau_{xy} = 73\ \text{MPa} \qquad \tau_{xz} = \tau_{zy} = -16\ \text{MPa}$$

a: Beräkna normal– och skjuvspänningen på ytan (genom punkten) med normalen $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ (1p)

b: Vilken är säkerheten mot plasticering (i punkten) enligt Trescas flythypotes om sträckgränsen vid enaxlig dragning är $500\ \text{MPa}$? (3p)

c: Vilken är den största dragspänning som uppträder in någon riktning i punkten? (1p)

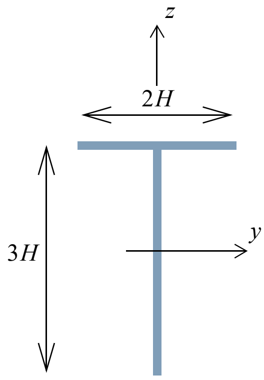
4.



En ram består av en horisontell balk **AB** med längd L samt en vertikal balk **BC** med längd $2L$. Båda delarna har samma böjstyvhet EI. Ramen är fast inspänd vid **A** samt rullagrad så att vertikal förskjutning är förhindrad vid **C**. Den belastas med en horisontell kraft P vid **C**.

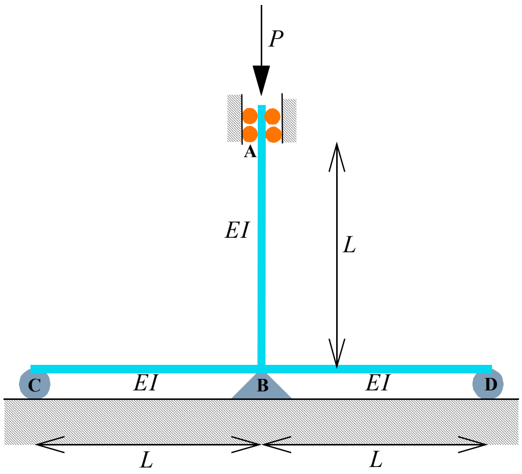
a: Beräkna inspänningsmomentet (vid **A**); skjuv– och axialdeformationer kan försummas i analysen. (2p)

b: Det till beloppet största snittmomentet i delen **AB** är $M_y = 2PL$; i tvärsnittet är normalkraften $N = P$. Bestäm det P som ger plasticering i tvärsnittet om sträckgränsen för materialet är $\sigma_s = 556 \text{ MPa}$. Balkdelen har ett enkelsymmetrikt T–tvärsnitt med dimensioner enligt figuren nedan ($t \ll H$ kan antas). Sätt $L = 33H$ i lösningen och försumma inverkan av skjuvspänningen. (3p)



$H = 50 \text{ mm}$
Godstjocklek $t = 5 \text{ mm}$ $(t \ll H)$

5.



En pelare **AB** med höjd L och konstant böjstyvhet EI är glid–inspänd i sin övre ände **A**, samt är infäst till en balk **CBD** i nedre änden. Balken har längd $2L$ och konstant böjstyvhet EI och vilar på tre stöd, så att två lika långa spann bildas. Pelaren belastas med en tryckande kraft P.

a: Ge, med tydlig motivering, en övre och undre gräns för kritisk last $P = P_{kr}$ med avseende på stabilitet. (2p)

b: Ställ upp randvillkoren som behövs för att ta fram en knäckekvation. (Knäckekvationen behöver inte tas fram) (3p)

Lösning 1: Axelmassan är proportionell mot tvärsnittsytan, $m = \rho LA$. Före urborrningen har vi $A_\mathrm{f} = \frac{\pi D^2}{4}$. Inför ett reellt tal $0 < \alpha < 1$ så att $d = \alpha D$; tvärsnittsytan efter modifiering kan då uttryckas $A_\mathrm{e} = \frac{\pi D^2}{4}(1-\alpha^2)$ och vi har den relativa viktsminskningen $\frac{A_\mathrm{f} - A_\mathrm{e}}{A_\mathrm{f}} = \alpha^2$

Maximal skjuvspänning av det vidande momentet M_v är (Lundh 6–14, 6–12) $\tau_{\max} = \frac{M_\mathrm{v}\frac{D}{2}}{K}$. För den massiva axeln har vi $K_\mathrm{f} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{D}{2}\right)^4 = \frac{\pi D^4}{32}$, medan den urborrade axeln ger $K_\mathrm{e} = \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \left(\frac{\alpha D}{2}\right)^4\right) = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)$.

vi har nu

$$\tau_{\max,\mathrm{f}} = \frac{16 M_\mathrm{v}}{\pi D^3} = \frac{\tau_\mathrm{s}}{5}$$
$$\tau_{\max,\mathrm{e}} = \frac{16 M_\mathrm{v}}{\pi D^3 (1-\alpha^4)} = \frac{\tau_\mathrm{s}}{4}$$

Eftersom virdmomentet bara beror av P och n, men inte på axelns tvärsnitt, har vi alltså $\frac{1-\alpha^4}{4} = \frac{1}{5}$, ur vilket vi löser $\alpha^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0{,}447$. Vikten kan alltså reduceras med ca 45%

Lösning 2a: Med koordinatsystemet enligt tes har vi en tryckspänning i x–led: $\sigma_x = -p$. Eftersom deformationerna hos fyrkantsröret kan försummar, är förlängningen i y– och z–led noll: $a\varepsilon_y = a\varepsilon_z = 0$. Med töjningarna enligt Lundh ekv 10–8,9 (eller formelsamling sid 16) får vi då

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) = \frac{1}{E}(\sigma_y + \nu p - \nu\sigma_z) = 0$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z + \nu p - \nu\sigma_y) = 0$$

Ur dessa två ekvationer löser vi $\sigma_y = \sigma_z = \frac{-\nu p}{1-\nu}$, så kontakttrycket blir $-\sigma_y = -\sigma_z = \frac{\nu p}{1-\nu}$

Lösning 2b: Deformtionen i x–led ger en längdändring $2a\varepsilon_x$, så med $a\varepsilon_y = a\varepsilon_z = 0$ blir den deformerade volymen $V + \Delta V = 2a(1+\varepsilon_x)\cdot a^2$, så $\Delta V = 2a^3\varepsilon_x$ och alltså $\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x$. Töjningen i x–led blir (Lundh 10–7) med de beräknade spänningarna:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) = \frac{-p}{E}\left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu}\right) = \frac{-p(1-\nu-2\nu^2)}{E(1-\nu)}$$

Lösning 2c: Med $\nu = \frac{1}{2}$ får vi $\varepsilon_x = 0$, vilket stämmer med att materialet är inkompressibelt om $\nu = \frac{1}{2}$

Lösning 3a: Vi ställer upp spänningstensorn enligt Lundh 9–6

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 37 & 73 & -16 \\ 73 & 37 & -16 \\ -16 & -16 & 94 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Spänningsvektorn på den givna ytan fås nu (Lundh 9–27) genom $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 36 \\ -36 \\ 0 \end{bmatrix}$ MPa och normalspänningen

på ytan genom att projicera denna på normalen (Lundh 9–29): $\sigma = \boldsymbol{n}^{T}\boldsymbol{s} = -36$ MPa — skjuvspänningen på ytan

fås nu med Pythagoras sats (se Lundh 9–31) $\tau = \sqrt{|\boldsymbol{s}|^2 - \sigma^2} = 0$, dvs $\sigma = -36$ MPa är en huvudspänning.

Lösning 3b: Effektivspänningen enligt Tresca fås som skillnaden mellan största och minsta huvudspänningen (formelsamlingen sid 17). De tre huvudspänningarna ges av egenvärdena till spänningstensorn: $\det(\boldsymbol{S} - \sigma\boldsymbol{I}) = 0$ ger (med siffervärden i MPa)

$$-\sigma^3 + 168\sigma^2 - 2484\sigma - 353808 = 0$$

(alternativt etableras detta mha tensorinvarianterna, se Lundh 9–37, 38). Vi vet att $\sigma = -36$ MPa är en huvudspänning. Division med $\sigma + 36$ leder till faktoriseringen

$$(\sigma + 36)(\sigma^2 - 204\sigma + 9828) = 0$$

Vi hittar de två resterande huvudspänningarna som nollställena till den andra faktorn

$$\sigma = 102 \pm \sqrt{102^2 - 9828} = 102 \pm 24 = \begin{cases} 126 \text{ MPa} \\ 78 \text{ MPa} \end{cases}$$

Vi har då effektivspänningen $\sigma_e = (126 - (-36))$ MPa $= 162$ MPa så säkerheten mot plasticering enl Tresca är

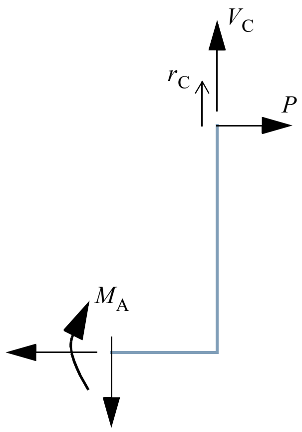
$$s = \frac{\sigma_s}{\sigma_e} \approx 3{,}1$$

(Alternativt: egenvärdena hittas snabbare och säkrare mha Matlab: eig(S))

Lösning 3c: Den största positiva huvudspänningen är den största dragspänningen i punkten: $\sigma_{max} = 126$ MPa

Lösning 4a: Problemet är statiskt obestämt och kan inte lösas med enbart jämvikt. Inför (t.ex) stödkraften V_C som statiskt övertalig (yttre kraft) och beräkna förskjutningen r_c i kraftens riktning; kompatibilitetsvillkoret $r_C = 0$ ger då stödreaktionen uttryckt i P. Det sökta momentet fås sedan med momentjämvikt kring **A**

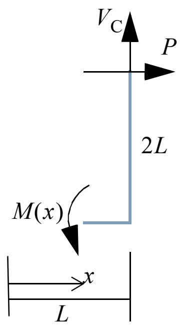
$$M_A = V_c L - 2PL \qquad (1)$$



Vi kan beräkna r_C med Castiglianos 2a sats: $r_c = \dfrac{\partial W_i}{\partial V_C}$ (Lundh 15–96). Om enbart böjdeformation beaktas har vi (Lundg 15–52) $W_i = \int_s \dfrac{M^2}{2EI} ds$, där integrationen ska göras över hela bärverket. Vi har då

$$r_C = \frac{\partial W_i}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial V_C} = \int_s \frac{\partial M}{\partial V_C}\frac{M}{EI} ds$$

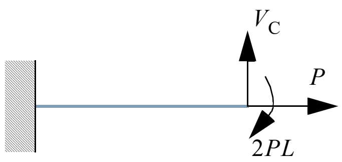
I delen **AB** har vi böjande momentet $M(x) = 2PL - V_C(L-x)$ på avståndet x från infästningen **A**. I ramdelen **BC** ger inte V_C något bidrag till snittmomentet, så här är $\dfrac{\partial M}{\partial V_C} = 0$.



Vi har då $EIr_C = \int_0^L (V_C(L-x)^2 - 2PL(L-x))dx = \dfrac{V_C L^3}{3} - PL^3$ så $r_C = 0 \Rightarrow V_C = 3P$

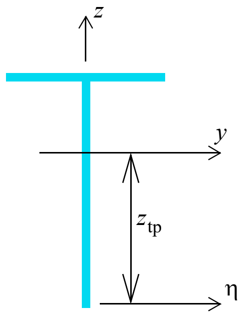
Ur (1) får vi då $M_A = PL$

Alternativt kan vi använda elementarfall (formelsamlingen sid 12) om vi betraktar delen **AB** belastad med snittkrafterna/momentet vid **B**. Förskjutningen vid **B** blir $r_B = V_C \cdot \dfrac{L^3}{3EI} - 2PL \cdot \dfrac{L^2}{2EI}$ (uppåt). Om axialdeformationer försummas gäller att $r_C = r_B$. Kompatibilitetsvillkoret ger V_C som tidigare.



Lösning 4b: Vi söker den till beloppet största normalspänningen $|\sigma|_{max}$ och sedan det P som gör att $|\sigma|_{max} = \sigma_s$. Lundh 7–26: $\sigma = \dfrac{N}{A} + \dfrac{M_y z}{I_y} = \dfrac{P}{A} + \dfrac{2PLz}{I_y}$ (2)

Här är $A = 5Ht$ tvärsnittsarean och I_y areatröghetsmomentet map y–axeln genom tvärsnittets tyngdpunkt och $z = 0$ i tyngdpunkten. För att hitta tp–läget inför vi en hjälpaxel η genom tväsrsnittets underkant och parallellt med y. Statiska momentet map hjälpaxeln är då



$$S_\eta = z_{tp}A = 2Ht \cdot 3H + 3Ht \cdot \frac{3H}{2} = \frac{21H^2 t}{2}$$

Vi finner alltså $z_{tp} = \dfrac{21H}{10}$. Areatröghetsmomentet beräknas med Steiners sats (Lundh 7–42):

$$I_y = \underbrace{\frac{2Ht^3}{12} + 2Ht \cdot (3H - z_{tp})^2}_{\text{flänsens bidrag}} + \underbrace{\frac{t(3H)^3}{12} + 3Ht \cdot \left(z_{tp} - \frac{3H}{2}\right)^2}_{\text{livets bidrag}} = \frac{99H^3 t}{20}$$

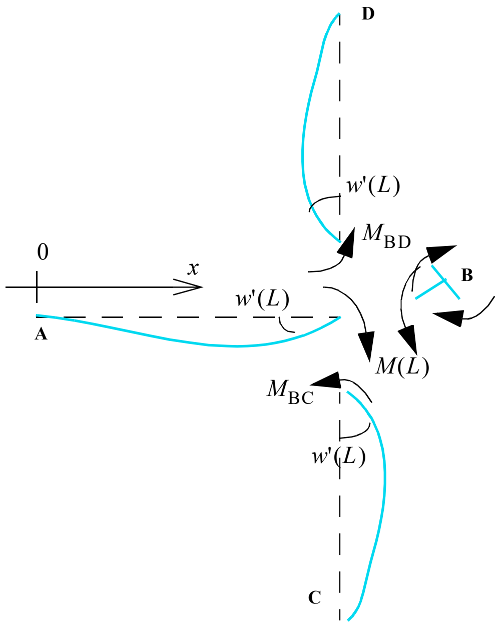
(Här har vi försummat t^3 –termen). Insättning i (2) tillsammans med $L = 33H$ ger nu $\sigma = \frac{P}{Ht}\left(\frac{1}{5} + \frac{40z}{3H}\right)$. Vi tvärsnittets ovankant har vi $z = \frac{9H}{10}$ och får $\sigma = \frac{61P}{5Ht}$; i underkant har vi $z = \frac{-21H}{10}$ och får $\sigma = \frac{-139P}{5Ht}$.

$|\sigma|_{max} = \sigma_s \Rightarrow P = \frac{5Ht\sigma_s}{139} = 5\text{ kN}$

Lösning 5a: Om pelaren **AB** vore ledad till balken **CBD** (alt: om **CBD** har mycket låg böjstyvhet $EI_{CBD} = 0$) har vi Eulers 3e knäckfall med $P_{kr} \approx \frac{2{,}05\pi^2 EI}{L^2}$. Om å andra sidan **CBD** är mycket böjstyv, $EI_{CBD} \to \infty$, så får vi Eulers 4e fall där såväl rotation som förskjutning är förhindrad i båda ändar och med $P_{kr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$. Med $0 < EI_{ABC} = EI < \infty$ hamnar kritisk last mellan dessa båda yttervärden:

$$\frac{2{,}05\pi^2 EI}{L^2} < P_{kr} < \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

Lösning 5b: Lägg en x–axel från **A** mot **B** enligt figuren; vi har då $w(0) = w(L) = 0$ och $w'(L) = 0$, dvs transversell förskjutning är förhindrad vid $x = 0$ och $x = L$ samt rotationen är noll vid $x = 0$.



Det 4e randvillkoret fås ur momentjämvikt för knuten **B**. Elementarfall, formelsamlingen sid 11, ger sambandet mellan rotationen $w'(L)$ och snittmomenten M_{BD} och M_{BC}: $w'(L) = \frac{M_{BC}L}{3EI} = \frac{M_{BD}L}{3EI}$, varur

$M_{BC} = M_{BD} = \frac{3EI}{L}w'(L)$. Momentjämvikt ger att $M(L) - M_{BC} - M_{BD} = 0$, som med sambandet $M = -EIw''$ ger

$w''(L) + \frac{6}{L}w'(L) = 0$