TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA KF OCH F — MHA 081
11 OKTOBER 2019

Lösningar

Tid och plats: 8.30—12.30 i M–huset. Lärare besöker salen ca 9.30 samt 11.30

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.
2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.
3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.
Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.
4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset, 14/10. Se även kurshemsidan på Canvas.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2019) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

För att få poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

Resultatlista: Anslås 22/10 2019 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 25/10.

Granskning: Torsdag 24/10 $12^{\underline{30}}$–$13^{\underline{30}}$ på inst. (plan 3 i norra trapphuset, nya M–huset).

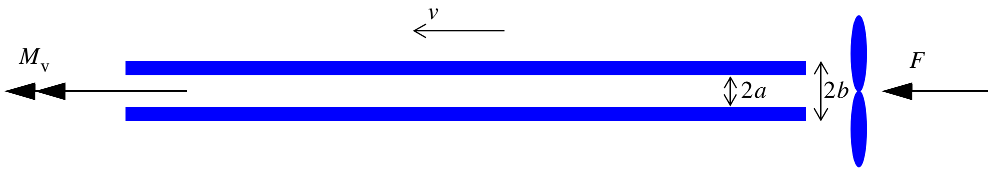
Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

En propelleraxel drivs av en motor med effekten $P = 12\ \mathrm{MW}$ vid varvtalet $n = 115\ \mathrm{varv/min}$. Axeln har ett cirkulärt håltvärsnitt med yttre diameter $2b = 0{,}50\ \mathrm{m}$; hålets radie betecknas a.

a: Bestäm maximal hålradie a om största skjuvspänningen får vara $\tau_{\max} = 50\ \mathrm{MPa}$ (2p)

b: Vid propellern omvandlas den roterande rörelsen till en framdrivningskraft F, som vid givna förhållanden ger fartyget en hastighet $v = 10\ \mathrm{m/s}$ (ca. 20 knop). Propellerns verkningsgrad är $\eta = 0{,}7$, dvs kraftens effekt är 70% av den som motorn för in i axeln. Hur stor är säkerheten mot plasticering enligt von Mises hypotes om $a = 165\ \mathrm{mm}$ och axelmaterialets sträckgräns vid enaxligt drag är $\sigma_s = 435\ \mathrm{MPa}$? (3p)



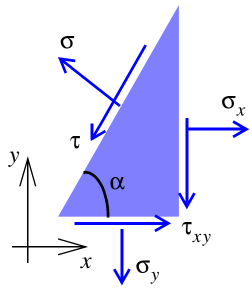
2.

En elastisk kropp, $E = 225\ \mathrm{GPa}$ och $\nu = 0{,}3$, är belastad i ett plan så att spänningarna i en punkt har beräknats till $\sigma_x = -40\ \mathrm{MPa}$, $\sigma_y = 120\ \mathrm{MPa}$ och $\tau_{xy} = 80\sqrt{3}\ \mathrm{MPa}$. Plant töjningstillstånd antas råda.

a: Beräkna normalspänningen σ_z; (x, y, z är ett Cartesiskt koordinatsystem). (1p)

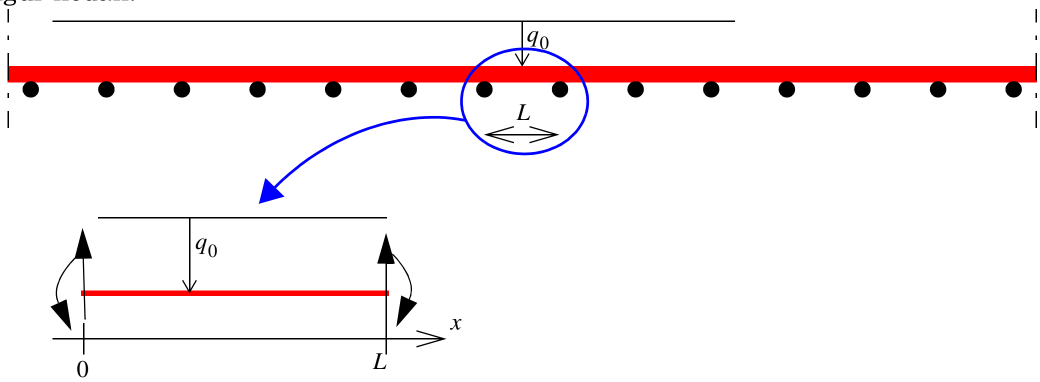
b: Beräkna normalspänningen σ och tangentialspänningen τ på en yta som lutar $\alpha = 60°$ mot positiva x–axeln (figur). (2p)

c: Bestäm största skjuvspänningen i punkten. (2p)



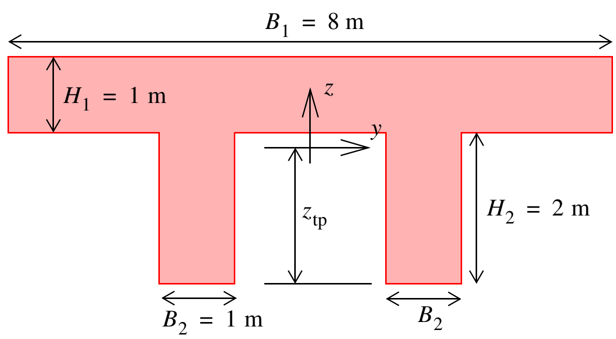
3.

En lång brobana vilar på ett stort antal stöd så att en serie spann med längden L bildas. Belastningen utgörs av egentyngden som kan antas jämnt fördelad med intesiteten q_0 (kraft/längd) enligt figur nedan.



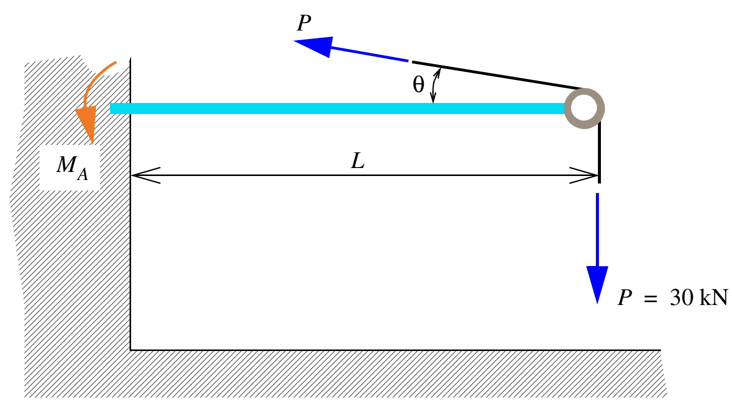
a: Bestäm snittmomentet $M(x)$ i ett spann och ange speciellt det största moment. Om $w(x)$ betecknar balkens transversalförskjutning är det här rimligt att göra antagandet att rotationen $\frac{dw}{dx}$ är noll vid stöden. (2p)

b: Brobanans tvärsnitt visas i figuren. Om materialet är betong har vi $q_0 = 268\ \text{kN/m}$. Hur lång får spannlängden L vara om maximalt böjande moment i spannet är $|M|_{max} = 0{,}083 q_0 L^2$ och största tillåtna spänning är $|\sigma|_{max} = 5\ \text{MPa}$? (3p)

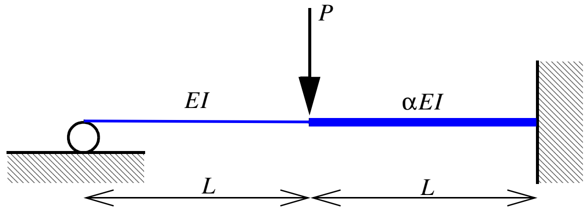


4.

En konsolbalk med längd $L = 5$ m belastas i sin fria ände av en lina som löper över en trissa enligt figuren. Linkraften är $P = 30\ \text{kN}$ och vinkeln $\theta = 10°$. Balkmaterialets elasticitetsmodul är $E = 210\ \text{GPa}$ och tvärsnittets areatröghetsmoment är $I = 330{,}9 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^4$. Beräkna inspänningsmomentet M_A med hänsyn tagen till axialkraften i konsolen. Vinkeln θ får antas oförändrad då konsolen böjs. (5p)



5.



En balk med längden $2L$ är fast inspänd i sin högra ände och vilar på en rullagring vid vänstra änden. Mitt på spannet verkar en vertikal punktlast P. Vänster halva av balken har böjstyvheten EI medan högra halvan har styvheten αEI, där $\alpha > 0$ är ett dimensionslöst tal.

a: Bestäm inspänningsmomentet uttryckt i P, L och α (4p)

b: Sätt $\alpha = 1$ och kontrollera resultatet i a mot något elementarfall. (1p)

Lösning 1a: Det vridande momentet blir $M_v = \dfrac{30P}{\pi n} = 996{,}45\ \text{kNm}$ (Lundh 6–1). Maximal skjuvspänning blir (Lundh 6–14) $\tau_{max} = \dfrac{2M_v b}{\pi(b^4 - a^4)}$, så $a^4 = b^4 - \dfrac{2M_v b}{\pi\tau_{max}} \approx 734{,}46 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^4$; $a \approx 165\ \text{mm}$

Lösning 1b: Kraftens effekt är Fv och är given till $\eta = 70\%$ av tillförd effekt P; $F = \dfrac{\eta P}{v} = 840\ \text{kN}$.

Axialspänningen är då $\sigma = \dfrac{-F}{A} = \dfrac{-F}{\pi(b^2 - a^2)} = -7{,}58\ \text{MPa}$. Skjuvspänningen är enligt a–uppgiften $50\ \text{MPa}$. Effektivspänningen enligt von Mises är då (Lundh 12–8) $\sigma_e = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \approx 86{,}93\ \text{MPa}$.

$s = \dfrac{\sigma_s}{\sigma_e} \approx 5$

Lösning 2a: Plant deformationstillstånd i (x, y)–planet innebär att $\varepsilon_z = 0$; Hookes lag för axialtöjningen (Lundh 10–9) ger då $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 24\ \text{MPa}$

Lösning 2b: Enhetsnormalen till snittytan är $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$. Spänningsvektorn på ytan ges av Lundh 9–28, där spänningstensorn definieras av 9–11 (med $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ eftersom vi har plant töjningstillstånd i (x, y)–planet). Vi får

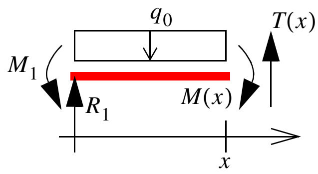
$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{Sn} = \begin{bmatrix} -40 & 80\sqrt{3} & 0 \\ 80\sqrt{3} & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \text{MPa} = \begin{bmatrix} 60\sqrt{3} \\ -60 \\ 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Normalspänningen i $\boldsymbol{n}$–riktningen fås nu som (Lundh 9–29) $\sigma = \boldsymbol{n}^T\boldsymbol{s} = -120\ \text{MPa}$ och skjuvspänningen enligt Lundh 9–30: $\tau = \sqrt{|\boldsymbol{s}|^2 - \sigma^2} = 0$

Lösning 2c: Största skjuvspänningen fås som halva skillnaden mellan största och minsta huvudspänningen. En huvudspänning är $\sigma_z = 24\ \text{MPa}$ eftersom $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Huvudspänningarna i planet fås då enligt Lundh 9–49: $\sigma = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} -120\ \text{MPa} \\ 200\ \text{MPa} \end{cases}$; $\tau_{max} = 160\ \text{MPa}$

Lösning 3a: Utan rotation vid stöden kan balken betraktas som fast inspänd i båda ändar; moment och tvärkraft fås då ur formelsamlingen sid 14: $M_1 = M_2 = \frac{q_0 L^2}{12}$, $R_1 = R_2 = \frac{q_0 L}{2}$.

Snitta nu på ett avstånd x från vänstra stödet. Momentjämvikt kring en axel genom snittet ger $M(x) - M_1 + R_1 x - q_0 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$, så



$$M(x) = \frac{q_0 L^2}{12}\left(1 - 6\frac{x}{L} + 6\left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

I intervalländarna har vi $M(0) = M(L) = \frac{q_0 L^2}{12}$ (som förväntat); lokal extrempunkt vid $\frac{x}{L} = \frac{1}{2}$ där man finner $M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{-q_0 L^2}{24}$. $|M|_{\max} = \frac{q_0 L^2}{12}$

Lösning 3b: Maximal normalspänning fås som $|\sigma|_{\max} = \frac{|M||z|_{\max}}{I_y}$ (Lundh 7–26). För att bestämma $|z|_{\max}$ och areatröghetsmomentet m.a.p tyngdpunktsaxeln y måste vi först hitta tyngpunktsläget i höjdled. Med beteckningar enligt tesens figur har vi statiska momentet m.a.p en horisontell axel η längs tvärsnittets underkant $S_\eta = z_{tp} A = H_1 B_1 \cdot \left(\frac{H_1}{2} + H_2\right) + 2\left(H_2 B_3 \cdot \frac{H_2}{2}\right) = 24\ \mathrm{m}^3$. Med tvärsnittsytan $A = 12\ \mathrm{m}^2$ finner vi $z_{tp} = 2\ \mathrm{m}$

Vi använder nu Steiners sats (Lundh 7–42) för att besräkna areatrögheten för y–axeln genom tvärsnittets tyngdpunkt: $I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + B_1 H_1 \cdot \left(\frac{H_1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{B_2 H_2^3}{12} + B_2 H_2 \cdot \left(\frac{H_2}{2}\right)^2\right) = 8\ \mathrm{m}^4$. Vi har nu

$|\sigma|_{\max} = \frac{|M||z|_{\max}}{I_y} = \frac{0{,}083 q_0 L^2 \cdot 2\ [\mathrm{m}]}{8\ [\mathrm{m}^4]} = 5\ \mathrm{MPa}$, som med givet q_0 ger $L \approx 30\ \mathrm{m}$

Lösning 4: Konsoländen belastas av en vertikal kraft $P_v = P(1 - \sin\theta)$ och en tryckande axialkraft $P_h = P\cos\theta$. Låt $n = \sqrt{\frac{P_h}{EI}}$; balken transversalförskjutning är då (Lundh 8–66)

$$w(x) = A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx)$$

där konstanterna beräknas från randvillkoren. Vid inspänningen gäller $w(0) = 0$ och $w'(0) = 0$:

$$A + C = 0 \qquad B + Dn = 0$$

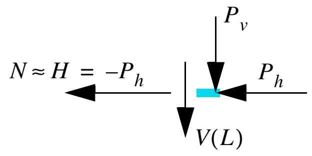
Vid konsoländen är snittmomentet $M = -EIw''$ noll; $w''(L) = 0$ ger

$$C\cos(nL) + D\sin(nL) = 0$$

De tre villkoren ger att $C = -D\tan(nL)$, $A = D\tan(nL)$ samt $B = -Dn$, så vi har nu

$$w(x) = D(\tan(nL) - nx - \tan(nL)\cos(nx) + \sin(nx))$$

Det fjärde randvillkoret fås ur att den vertikala snittkraften vid $x = L$ måste vara i jämvikt med P_v: $V(L) + P_v = 0$. Med $V = T + Nw'$ (Lundh 8–59) och $T = -EIw'''$ (Lundh 8–62) fås $EIw'''(L) + P_h w'(L) = P_v$; efter division med EI skriver vi

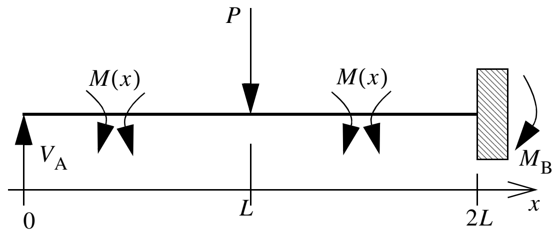


$$w'''(L) + n^2 w'(L) = \frac{P_v}{EI}$$

Ur uttrycket för $w(x)$ finner vi då att $D = \frac{-P_v}{n^3 EI}$ och sedan $w'' = \frac{-P_v}{nEI}(\tan(nL)\cos(nx) - \sin(nx))$. Det sökta momentet fås nu som $M(0) = -EIw''(0) = \frac{P_v L}{(nL)}\tan(nL)$; $nL = \sqrt{\frac{P_h}{EI}}L = 0{,}1031$ ger

$M(0) \approx 1{,}0036 \cdot P_v L \approx 124{,}39$ kNm

<u>Lösning 5a:</u> Vi betraktar stödreaktionen V_A vid rullstödet som en yttre belastning och beräknar den associerade förskjutningen r med Castiglianos 2a sats (Lundh 15–96).



Snittmomentet i balken blir $M(x) = \begin{cases} -V_A x & 0 < x < L \\ -V_A x + P(x - L) & L < x < 2L \end{cases}$; $\frac{dM}{dV_A} = -x$

Med hänsyn tagen till enbart böjdeformationer, $W = \int_0^{2L} \frac{M^2}{2EI}dx$ (Lundh 15–52) har vi då

$$r = \int_0^{2L} \frac{M}{EI(x)}\frac{dM}{dV_A}dx = \int_0^L \frac{V_A x^2}{EI}dx + \int_L^{2L} \frac{(V_A x^2 + Px(L - x))}{\alpha EI}dx$$

$$rEI = L^3\left(\frac{V_A}{3} + \frac{7V_A}{3\alpha} + \frac{3P}{2\alpha} - \frac{7P}{3\alpha}\right)$$

Kompatibilitetsvillkoret $r = 0$ ger då $V_A = \frac{5P}{2(7 + \alpha)}$. Momentjämvikt kring inspänningen ger nu momentet: $M_B = PL - 2V_A L = \frac{2 + \alpha}{7 + \alpha}PL$

<u>Lösning 5b:</u> Med $\alpha = 1$ blir vårt resultat $M_B = \frac{3PL}{8}$. Formelsamlingen sid 13 säger

$M_B = \frac{3(2L)}{16} \cdot P = \frac{3PL}{8}$