TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA KF OCH F — MHA 081

21 AUGUSTI 2019

Lösningar

Tid och plats: 8.30—12.30 i M–huset. Lärare besöker salen ca 9.30 samt 11.30

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Studentlitteratur.

2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset, 22/8. Se även kurshemsidan på Canvas.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2019) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

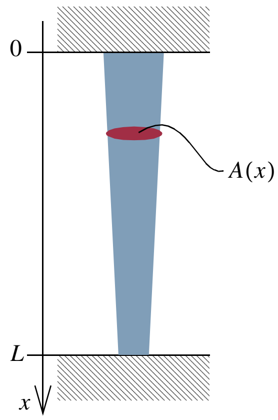
För att få poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

Resultatlista: Anslås 2/9 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 6/9.

Granskning: Torsdag 5/9 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i norra trapphuset, nya M–huset).

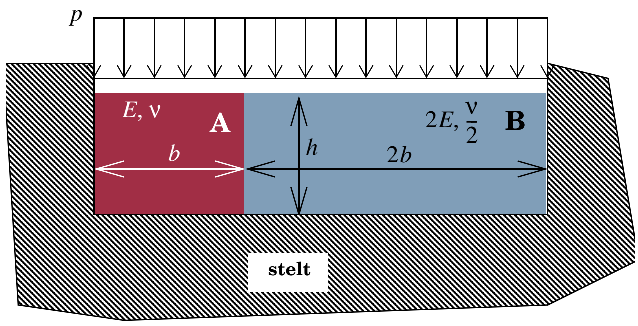
Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.



En pelare av ett lineärt elastiskt material, elasticitetsmodul E och densitet ρ, har längd L i odeformerat tillstånd och en linerärt varierande tvärsnittsyta $A(x) = A_0\left(2 - \frac{x}{L}\right)$. Pelaren monteras vertikalt mellan två stela stöd enligt figuren. Bestäm normalkraften $N(x)$ då pelaren belastas av sin egentyngd ρg (kraft/volym). (5p)

2.



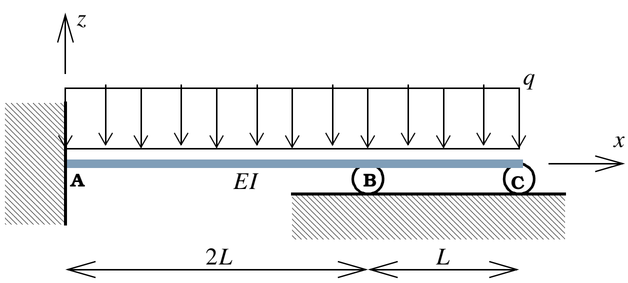
Två klossar, **A** och **B**, med tvärsnitt $b \times h$ respektive $2b \times h$ passar exakt in i en ränna i ett material som kan betraktas som stelt (d.v.s. rännans deformationer kan i det följande försummas). Båda klossarna består av lineärt elastiska material; elasticitetsmodulen och tvärkontraktionstalet är E och ν för **A**, samt $2E$ och $\nu/2$ för **B**. Båda klossarna är fria att längdändras ut ur planet (figur) och friktionen i alla kontaktytor kan försummas. Beräkna det horisontella tryck som uppkommer då klossarnas fria ovanyta belastas med ett tryck p (5p)

3.

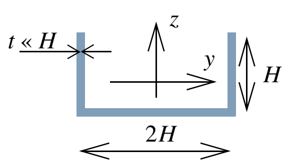
En lineärt elastisk balk **ABC** med konstant böjstyvhet EI är fast inspänd vid **A** och rullagrad vid **B** och **C**. Spannen **AB** och **BC** har längd $2L$ respektive L. Konstruktionen belastas utmed hela sin längd av en nedåtriktad fördelad last med konstant intensitet q (kraft/längd).

a: Beräkna samtliga stödkrafter och stödmoment uttryckta i q och L. (3p)

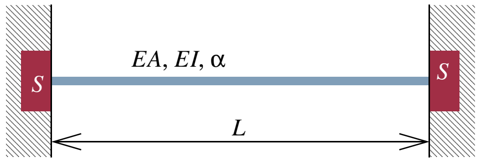
b: Balken har ett enkelsymmetriskt U–tvärsnitt med höjd H, bredd $2H$ och godstjocklek $t \ll H$. Låt $H = 50\text{ mm}$, $t = \frac{H}{10}$, $L = 10H$ och $q = 20\text{ kN/m}$. Hur stor är då säkerheten mot plasticering om största snittmomentet är $M_y = \frac{3qL^2}{8}$ och sträckgränsen vid enaxligt drag är $\sigma_s = 540\text{ MPa}$? Endast axialspänningen p.g.a. böjning behöver beaktas. (2p)



Tvärsnitt



4.



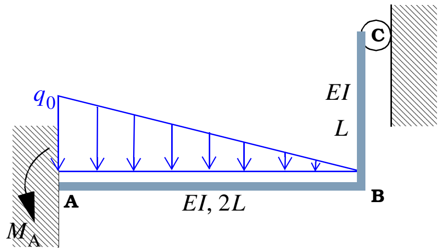
En enkel modell för att analysera fenomenet 'solkurva' består av en balk med längd L, axialstyvhet EA, böjstyvhet EI och materialets längdutvidgningskoefficient α. Balken båda ändar är elastiskt inspända med styvheten S: i båda ändar antas förskjutningen vara noll, men en rotation θ resulterar i ett mothållande moment $M_{\text{insp}} = S\theta$ i infästningen. Vid en temperatur T_0 antas balken vara spänningslös.

a: Beräkna axialkraften i balken vid temperaturen $T = T_0 + \Delta T$ (1p)

b: Ange, med tydlig motivation, en övre och undre gräns för kritiskt värde på ΔT med avseende på elastisk stabilitet (1p)

c: Låt $S = \dfrac{\beta EI}{L}$, där $\beta > 0$ är ett dimensionslöst tal, och härled en knäckekvation. Utnyttja gärna att problemet är symmetriskt. (3p)

5.



En ram består av en horisontell balk **AB** med längd $2L$ och en vertikal balk **BC** med längd L. Båda delarna har böjstyvhet EI och de är stelt sammanfogade vid **B**. Konstruktionen är fast inspänd vid **A** och rullagrad vid **C**. Bestäm inspänningsmomentet M_A då delen **AB** belastas med en fördelad last med lineärt varierande intensitet enligt figuren; intensiteten varierar från q_0 (kraft/längd) vid **A** ner till noll vid **B**. (5p)

Lösning 1: Den styrande differentialekvationen är (Lundh 3–7) $\dfrac{d}{dx}\left[EA(x)\dfrac{du}{dx}\right] = -\rho g A(x)$ där $u(x)$ är axialförskjutningen. Med $A(x)$ enligt tes fås efter integration

$$EA(x)\frac{du}{dx} = C_1 + \frac{\rho g A_0 L}{2}\left(2 - \frac{x}{L}\right)^2$$

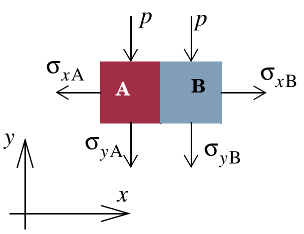
Efter division med axialstyvheten EA och ytterligare en integration hittar vi

$$u(x) = C_2 - \frac{C_1 L}{EA_0}\ln\left(2 - \frac{x}{L}\right) - \frac{\rho g L^2}{4E}\left(2 - \frac{x}{L}\right)^2$$

Randvillkoren $u(0) = 0$ och $u(L) = 0$ ger integrationskonstanterna $C_1 = \dfrac{-3\rho g L A_0}{4\ln 2}$ samt $C_2 = \dfrac{\rho g L^2}{4E}$; vi får nu den sökta normalkraften (Lundh 3–6)

$$N(x) = EA(x)\frac{du}{dx} = C_1 + \frac{\rho g A_0 L}{2}\left(2-\frac{x}{L}\right)^2 = \frac{\rho g L A_0}{4\ln 2}\left(2\left(2-\frac{x}{L}\right)^2\ln 2 - 3\right)$$

<u>Lösning 2:</u> Använd ett koordinatsystem enligt figuren (z–axel ut ur papprets plan). Vi har då att $\sigma_{zA} = \sigma_{zB} = 0$, ty fri expansion i z–led och ingen friktion. Vidare kräver jämvikt att $\sigma_{yA} = \sigma_{yB} = -p$ samt att $\sigma_{xA} = \sigma_{xB}$; fortsättningsvis betecknas de horisontella normalspänningarna σ_x och vi söker det horisontella trycket $-\sigma_x$.



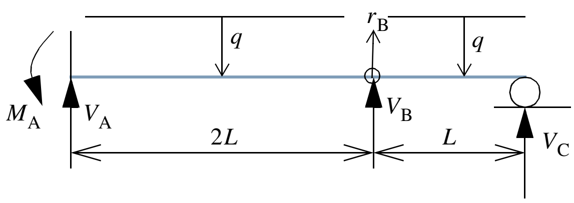
Axialtöjningarna i x–led i de två materialen blir (Lundh 10–7)

$$\varepsilon_{xA} = \frac{1}{E}(\sigma_{xA} - \nu(\sigma_{yA} + \sigma_{zA})) = \frac{1}{E}(\sigma_x + \nu p)$$

$$\varepsilon_{xB} = \frac{1}{2E}\left(\sigma_{xB} - \frac{\nu}{2}(\sigma_{yB} + \sigma_{zB})\right) = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x + \frac{\nu p}{2}\right)$$

Kompatibilitetsvillkoret $b\varepsilon_{xA} + 2b\varepsilon_{xB} = 0$, dvs totala längdändringen i x–led måste vara noll, ger nu att $\sigma_x = \frac{-3\nu p}{4}$ så det efterfrågade trycket är $\frac{3\nu p}{4}$

<u>Lösning 3a:</u> Inför stödkraften vid **B** som en yttre kraft och beräkna den associerade förskjutningen $r_B = r_B(V_B, q)$. Kompatibilitetsvillkoret $r_B = 0$ ger då V_B.



Formelsamlingen sid 13 med balklängd $L \to 3L$

och måtten $a = L$ samt $b = 2L$ ger $r_B = \frac{V_B L^2 (2L)^3}{12EI(3L)^2}\left(4-\frac{2}{3}\right) - \frac{qL(3L)^3}{48EI}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{2}{27}\right) = \frac{20V_B L^3}{81} - \frac{5qL^4}{12}$ så

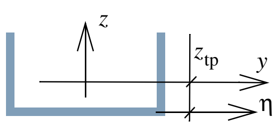
$r_B = 0 \Rightarrow V_B = \frac{27qL}{16}$

Ur samma elementarfall finner vi $V_C = R_1 = \frac{-V_B(2L)^2}{2(3L)^2}\left(3-\frac{2}{3}\right) + \frac{3q\cdot 3L}{8} = \frac{qL}{4}$

Vertikal kraftjämvikt ger $V_A = q\cdot 3L - V_B - V_C = \frac{17qL}{16}$ (alternativt ur elementarfall)

Momentjämvikt kring **A** ger $M_A = q\cdot 3L\cdot\frac{3L}{2} - V_B\cdot 2L - V_C\cdot 3L = \frac{3qL^2}{8}$ (alternativt ur elementarfall)

<u>Lösning 3b:</u> Axialspänningen p.g.a. böjning beräknas enligt Lundh 7–26: $\sigma = \frac{M_y z}{I_y}$. Här mäts z–koordinaten från en y–axel genom tvärsnittets tyngdpunkt och areatröghetsmoment beräknas m.a.p. på denna axel. Vi måste alltså hitta tyngdpunkten. Inför en hjälpaxel η enligt figuren; statiska momentet m.a.p. på hjälpaxeln är $S_\eta = A\cdot z_{tp} = 2\cdot\left(Ht\cdot\frac{H}{2}\right) + 2Ht\cdot 0$. Med tvärsnittsytan $A = 4Ht$ har vi då $z_{tp} = \frac{H}{4}$



Areatröghetsmomentet beräknas med Steiners sats (Lundh 7–42)

$$I_y = 2\cdot\left(\frac{tH^3}{12}+Ht\cdot\left(\frac{H}{2}-z_{\text{tp}}\right)^2\right)+\frac{2Ht^3}{12}+2Ht\cdot z_{\text{tp}}^2 = \frac{5H^3t}{12} = \frac{H^4}{24}$$

där termen som är kubisk i t försummats ($t \ll H$).

Vi har då i snittet $\sigma_{\max} = \frac{M_y z_{\max}}{I_y} = \frac{\frac{3q(10H)^2}{8}\cdot\frac{3H}{4}}{\left(\frac{H^4}{24}\right)} = \frac{675q}{H}$ så säkerheten mot plasticering är

$$s = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\max}} = 2$$

Lösning 4a: Då temperaturen avviker från T_0 uppkommer en normalkraft N i balken. Längdförändringen p.g.a. temperaturen är (Lundh 5–1) $\Delta L_{\text{term}} = \alpha L\cdot\Delta T$ medan den mekaniska längdändringen blir (Lundh 2–14) $\Delta L_{\text{mek}} = \frac{NL}{EA}$. Då längdändring är förhindrad har vi:

$\Delta L_{\text{mek}}+\Delta L_{\text{term}} = 0 \Rightarrow N = -\alpha EA\cdot\Delta T$. Med $\Delta T > 0$ uppkommer alltså en tryckkraft $P = -N = \alpha EA\cdot\Delta T$ i balken.

Lösning 4b: Med $S = 0$ har vi vekast möjliga struktur och Eulers 2a knäckfall:

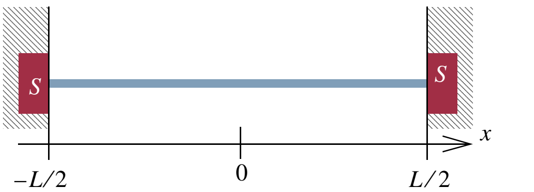
$P_{\text{kr}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \alpha EA\cdot\Delta T_{\text{kr}}$; kritisk temperaturhöjning är då $\Delta T_{\text{kr}} = \frac{\pi^2 I}{\alpha AL^2}$

Styvast möjliga struktur fås då $S\to\infty$, vilket ger Eulers 4e fall: $P_{\text{kr}} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} = \alpha EA\cdot\Delta T_{\text{kr}}$;

$$\Delta T_{\text{kr}} = \frac{4\pi^2 I}{\alpha AL^2}$$

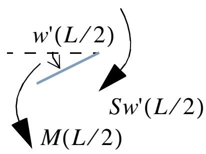
Med $S > 0$ och ändlig, har vi alltså $\frac{\pi^2 I}{\alpha AL^2} < \Delta T_{\text{kr}} < \frac{4\pi^2 I}{\alpha AL^2}$

Lösning 4c: Transversalförskjutningen under inverkan av en trycklast P är (Lundh 8–66)



$$w(x) = A+Bx+C\cos(nx)+D\sin(nx)$$

där $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$. Med valt koordinatsystem (figuren) kan symmetrivillkoret skrivas $w(x) = w(-x)$, så de udda funktionerna måste elimineras, d.v.s vi måste ha $B = D = 0$.



Randvillkor: transversalförskjutningen är noll i båda ändar, d.v.s $w(\pm L/2) = 0$, vilket ger $A = -C\cos\left(\frac{nL}{2}\right)$. Vidare kräver momentjämvikt att $M(L/2)-Sw'(L/2) = 0$ (alternativt $M(-L/2)+Sw'(-L/2) = 0$), som med $M(x) = -EIw''(x)$ (Lundh 7–65) och $S = \frac{\beta EI}{L}$ kan skrivas

$$w''\left(\frac{L}{2}\right)+\frac{\beta}{L}w'\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

Vi har nu

$$w(x) = C\left(\cos(nx) - \cos\left(\frac{nL}{2}\right)\right)$$

$$w'(x) = -Cn\sin(nx)$$

$$w''(x) = -Cn^2\cos(nx)$$

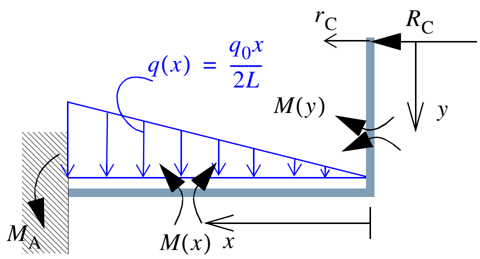
Insättning i momentvillkoret ger då $-Cn^2\left(\cos\left(\frac{nL}{2}\right) + \frac{\beta}{nL}\sin\left(\frac{nL}{2}\right)\right) = 0$, så icke–triviala lösningar ($w \neq 0$)

kräver att $\cos\left(\frac{nL}{2}\right) + \frac{\beta}{nL}\sin\left(\frac{nL}{2}\right) = 0$ (knäckekvationen).

Lösning 5: Ramen är statiskt obestämd, så stödreaktionerna kan inte beräknas med enbart jämvikt. Inför t.ex stödkraften R_C vid rullagret som 'bekant' yttre last. Beräknas den associerade förskjutningen $r_C = r_C(R_C, q)$, kan R_C bestämmas ur villkoret $r_C = 0$; därefter kan det efterfrågade momentet beräknas med momentjämvikt. Här väljer vi att beräkna r_C med Castiglianos 2a sats (Lundh 15–98): $r_C = \frac{\partial W}{\partial R_C}$. Om enbart böjdeformationer beaktas är den elastiska energin (Lundh 15–52) $W = \int_s \frac{M^2}{2EI} ds$, där integrationen görs längs hela ramen. Vi har då

$$r_C = \int_s \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_C} ds = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{2L} \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_C} dx + \int_0^{L} \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_C} dy\right)$$

med x– och y–axlar enligt figuren nedan.



Momentjämvikt kring snitt vid $0 < y < L$ ger $M(y) = R_C y$ med $\frac{\partial M}{\partial R_C} = y$; för ett snitt vid $0 < x < 2L$ fås

$M(x) = R_C L - q(x)\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = R_C L - \frac{q_0 x^3}{12L}$ och $\frac{\partial M}{\partial R_C} = L$. Insättning ger

$$EIr_C = \int_0^{2L}\left(R_C L^2 - \frac{q_0 x^3}{12}\right)dx + \int_0^{L} R_C y^2 dy = \frac{7R_C L^3}{3} - \frac{q_0 L^4}{3}$$

så med $r_C = 0$ fås $R_C = \frac{q_0 L}{7}$

Momentjämvikt kring infästningen **A** ger det sökta momentet: $M_A = q_0 \cdot \frac{2L}{2} \cdot \frac{2L}{3} - R_C \cdot L = \frac{11 q_0 L^2}{21}$