TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F OCH KF — MHA 081

7 JUNI 2019

Lösningar

Tid och plats: 14.00—18.00 i SB. Lärare besöker salen ca 15.00 samt 16.30

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Studentlitteratur.

2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset, 10/6. Se även Canvas–sidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2019) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

För att få poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

Resultatlista: Anslås **senast** 17/6 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast vecka 25.

Granskning: Tisdag 18/6 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt torsdag 5/9 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i norra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

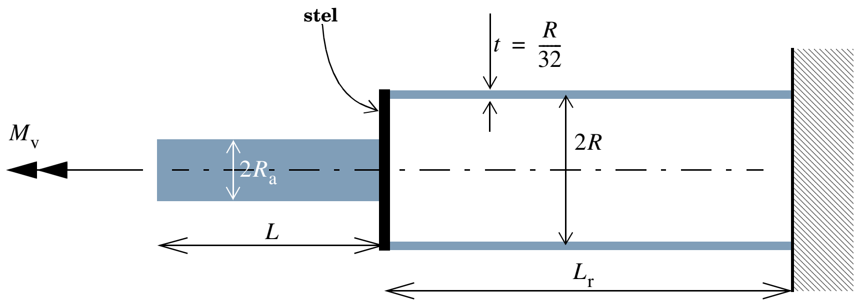
1.

En axel med massivt cirkulärt tvärsnitt, radie R_a och längd L, sammanfogas med ett rör med radien R och längd L_r. Rörets godstjocklek är $t = \frac{R}{32}$ och det kan betraktas som tunnväggigt. Materialet i båda delarna är lineärt elastiskt med skjuvmodul G och sträckgräns σ_s vid enaxlig dragning. Konstruktionen belastas med ett vidande moment enligt figuren och deformationerna i fogen mellan de två delarna kan försummas.

a: Bestäm axelradien R_a, uttryckt i R, så att begynnande plasticering i de båda delarna fås vid samma vridmoment M_v, enligt Trescas hypotes. (2p)

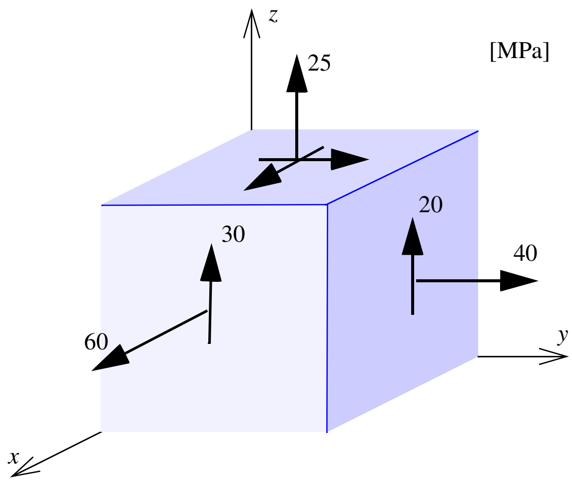
b: Hur ändras den beräknade radien R_a om materialet istället antas beskrivas av von Mises hypotes? (1p)

c: Beräkna längden L_r så att röret och axeln vrids lika mycket i fallet att $R_a = \frac{R}{2}$ (2p)



2.

Figuren visar spänningstillståndet i en punkt, i en belastad lineärt elastisk kropp. Materialets elasticitetsmodul är $E = 200\ \text{GPa}$, tvärkontraktionstalet är $\nu = 0{,}3$ och sträckgränsen $\sigma_s = 360\ \text{MPa}$.



a: Bestäm normal– och skjuvspänningen på planet med normalen $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\end{bmatrix}^T$ (1p)

b: Hur stor är säkerheten mot plasticering enligt Trescas hypotes? (3p)

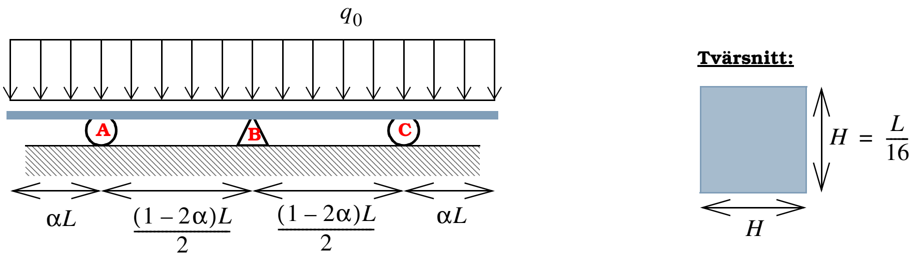
c: Beräkna relativa volymsförändringen $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ (1p)

3.

En balk med längd L belastas av sin egentyngd q_0 (kraft/längd) och ska lagras symmetriskt på tre stöd enligt figuren nedan.

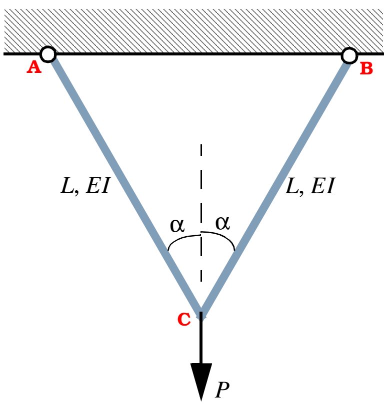
a: Bestäm stödplaceringen, dvs det dimensionslösa talet α, så att de vertikala stödreaktionerna blir lika vid alla stöd: $V_A = V_B = V_C = \frac{q_0 L}{3}$ (3p)

b: Betrakta nu fallet $\alpha = 0$. Beräkna maximala skjuvspänningen i det tvärsnitt där tvärkraften är störst. Balken har ett massivt kvadratiskt tvärsnitt med kantlängd $H = \frac{L}{16}$ (2p)



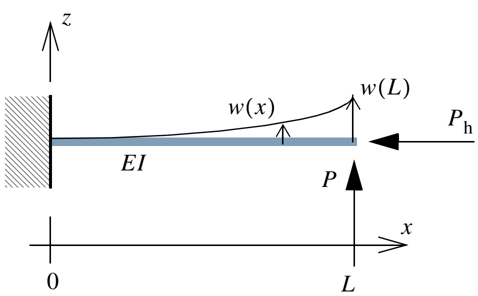
4.

Två balkar, båda med längd L och böjstyvhet EI, har sammanfogats till en V–formad ram med inre öppningsvinkel $2\alpha = \frac{\pi}{3}$ radianer; (**ABC** bildar en liksidig triangel). Konstruktionen är ledat infäst (momentfritt) i punkterna **A** och **B** enligt figuren. Beräkna de horisontella stödreaktionerna då en vertikal kraft P belastar ramhörnet **C**. (5p)



5.

Då en konsol med konstant böjstyvhet EI och längd L belastas med en transversalkraft P i sin fria ände, blir förskjutningen av kraftens angreppspunkt $w(L) = \frac{PL^3}{3EI}$. Om sedan en tryckande kraft P_h anbringas ökar transversalförskjutningen. Med hur många procent ökar $w(L)$ då P_h ökar från 0 till $\frac{P_{kr}}{4}$? Här är P_{kr} den kritiska lasten med avseende på stabilitet. (5p)



Lösning 1a: Snittmomentet i båda delarna är M_v. Skjuvspänningen i röret är (Lundh (6–4))

$\tau_{rör} = \frac{M_v}{2\pi R^2 t} = \frac{16M_v}{\pi R^3}$; maximal skjuvspänning i axeln fås på mantelytan och är (Lundh (6–14))

$\tau_{axel} = \frac{2M_v}{\pi R_a^3}$. Plasticering fås då skjuvspänningen når något kritiskt värde, eftersom inga andra spänningar uppträder; delar plasticerar samtidigt om $\tau_{rör} = \tau_{axel} \Rightarrow R_a = \frac{R}{2}$

Lösning 1b: Val av flythypotes påverkar vid vilket värde på skjuvspänningen som plasticering inträder, men påverkar inte skjuvspänningens storlek, så radieförhållandet som gör att båda delarna plasticerar samtidigt ändras inte.

Lösning 1c: Vridningsvinkeln mellan ändarna på röret blir (Lundh (6–6)) $\varphi_{rör} = \frac{M_v L_r}{2\pi G R^3 t} = \frac{16M_v L_r}{\pi G R^4}$, medan motsvarande kvantitet för axeln blir (Lundh (6–11)) $\varphi_{axel} = \frac{2M_v L}{\pi G\left(\frac{R}{2}\right)^4} = \frac{32M_v L}{\pi G R^4}$. De två vridningsvinklarna blir lika om $L_r = 2L$

Lösning 2a: Spänningstensorn är här (Lundh (9–11)) $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 30 \\ 0 & 40 & 20 \\ 30 & 20 & 25 \end{bmatrix}$ [MPa]. Spänningsvektorn på ytan med normalen $\boldsymbol{n}$ fås enligt Lundh (9–28): $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Eftersom $\boldsymbol{s}$ här är en noll–vektor, är normal– och skjuvspänning noll på ytan (Lundh (9–29, 31)): $\sigma = 0$ $\tau = 0$ (Man kan notara att $\sigma = 0$ måste vara en huvudspänning).

Lösning 2b: Den sökta säkerheten fås som $s = \frac{\sigma_s}{\sigma_e}$ där σ_e är effektivspänningen enligt Tresca.

Effektivspänningen beräknas enligt Lundh (12–14), så vi måste först beräkna huvudspänningarna.

Huvudspänningarna fås som egenvärdena till spänningstensorn $\boldsymbol{S}$ (Lundh avs 9.2.4); vi får här

$$\det(\boldsymbol{S} - \sigma\boldsymbol{I}) = 0 \Rightarrow -\sigma^3 + 125\sigma^2 - 3600\sigma = 0$$

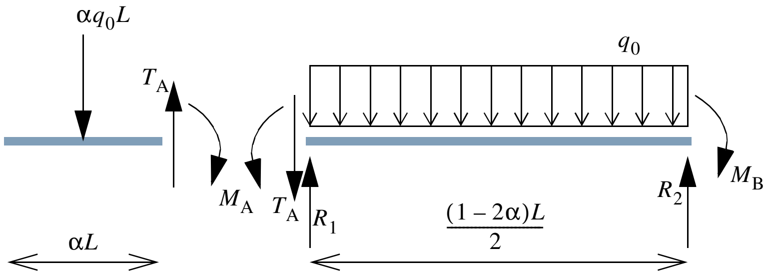
och finner rötterna $\sigma_1 = 80\ \mathrm{MPa}$, $\sigma_2 = 45\ \mathrm{MPa}$ och $\sigma_3 = 0\ \mathrm{MPa}$. Vi har nu $\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = 80\ \mathrm{MPa}$, så

$s = \frac{360}{80} = 4{,}5$

Lösning 2c: Axialtöjningarna beräknas med Hookes lag, Lundh ekv (10–7, 8, 9). Man får

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0{,}25 \cdot 10^{-3}$$

Lösning 3a: Utnyttja symmetrin och betrakta halva balken; rotationen vid **B** måste vara noll, så vi betraktar balken som fast inspänd här. Vi tittar på vänstra halvan:



Jämvikt för den utskjutande delen ger att $T_{\mathrm{A}} = \alpha q_0 L$ och $M_{\mathrm{A}} = \frac{q_0(\alpha L)^2}{2}$. De två stödreaktionerna $R_1 = \frac{\alpha q_0 L}{3}$ och $R_2 = \frac{\alpha q_0 L}{6}$ ($V_{\mathrm{B}} = 2R_2$ får ett lika stort bidrag från högra halvan av balken) hittar vi i formelsamlingen sid 13

$$R_1 = T_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{A}}\frac{3}{2\left(\frac{(1-2\alpha)L}{2}\right)} + q_0\frac{3\left(\frac{(1-2\alpha)L}{2}\right)}{8} = q_0 L\left(\alpha + \frac{3\alpha^2}{2(1-2\alpha)} + \frac{3(1-2\alpha)}{16}\right)$$

$$R_2 = -M_{\mathrm{A}}\frac{3}{2\left(\frac{(1-2\alpha)L}{2}\right)} + q_0\frac{5\left(\frac{(1-2\alpha)L}{2}\right)}{8} = q_0 L\left(\frac{-3\alpha^2}{2(1-2\alpha)} + \frac{5(1-2\alpha)}{16}\right)$$

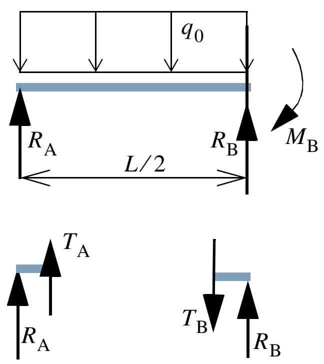
Villkoret $R_1 - 2R_2 = 0$ ger nu

$$q_0 L\left[\alpha + \frac{9\alpha^2}{2(1-2\alpha)} - \frac{7}{16}(1-2\alpha)\right] = 0$$

Efter multiplikation med $\frac{16(1-2\alpha)}{q_0 L}$ erhålls

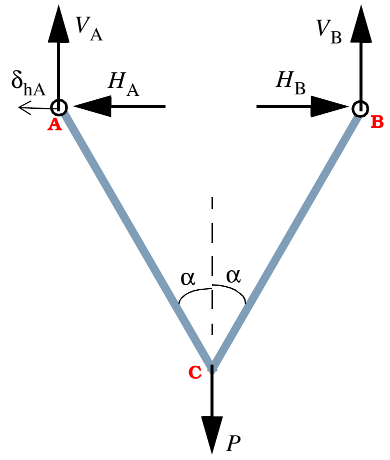
$$12\alpha^2 + 44\alpha - 7 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-11 \pm \sqrt{142}}{6} \approx \begin{cases} 0{,}153 \\ -3{,}82 \end{cases} \quad \therefore \alpha = \frac{\sqrt{142} - 11}{6} \approx 0{,}15$$

Lösning 3b: Med $\alpha = 0$ har vi $R_{\mathrm{A}} = \frac{3q_0 L}{16}$ och $R_{\mathrm{B}} = \frac{5q_0 L}{16}$; tvärkrafterna är alltså $T_{\mathrm{A}} = \frac{-3q_0 L}{16}$ samt $T_{\mathrm{B}} = \frac{5q_0 L}{16}$. Eftersom $\frac{dT}{dx} = -q_0$ (Lundh ekv 7–2) varierar T lineärt så vi har $|T|_{\max} = \frac{5q_0 L}{16}$. Genomsnittliga skjuvspänningen i tvärsnittet med störst tvärkraft är alltså $\bar{\tau} = \frac{|T|_{\max}}{H^2}$; i ett rektangulärt tvärsnitt varierar skjuvspänningen parabolisk med maximalt värde $\frac{3}{2}$ större än det genomsnittliga (Lundh ekv 7–51). Vi får här



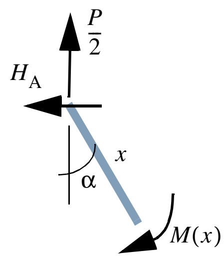
$$\tau_{\max} = \frac{3|T|_{\max}}{2H^2} = \frac{3 \cdot \frac{5q_0L}{16}}{2\left(\frac{L}{16}\right)^2} = 120\frac{q_0}{L}$$

Lösning 4:



Vertikal kraftjämvikt och momentjämvikt ger direkt att $V_A = V_B = \frac{P}{2}$, medan horisontell kraftjämvikt ger $H_A = H_B$. Fler jämviktvillkor finns inte att tillgå (konstruktionen är statiskt obestämd). Betrakta H_A som en bekant yttre belastning och beräkna den associerade förskjutningen med Castiglianos 2a sats (Lundh 15–96): $\delta_{hA} = \frac{\partial W_i}{\partial H_A}$; kompatibilitetsvillkoret $\delta_{hA} = 0$ ger oss då den ytterligare ekvation som behövs. Om enbart böjdeformation beaktas har vi $W_i = \int_s \frac{M^2}{2EI} ds$ (Lundh 15–52), så vi behöver snittmomentet M.

Betrakta delen **AC** och lägg ett snitt på avståndet x från **A** (i figuren är inte tvär– och normalkraft utritat).Momentjämvikt kring en axel genom snittet ger $M(x) = H_A x\cos\alpha - \frac{P}{2}x\sin\alpha$. Med utnyttjande av symmetrin har vi nu

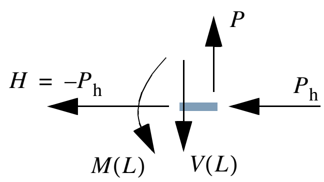


$$\delta_{hA} = \int_s \frac{\partial M}{\partial H_A}\frac{\partial}{\partial M}\left[\frac{M^2}{2EI}\right]ds = 2\int_0^L \frac{\partial M}{\partial H_A}\frac{M}{EI}dx = \frac{2}{EI}\int_0^L \left(H_A(x\cos\alpha)^2 - \frac{P}{2}x^2\sin\alpha\cos\alpha\right)dx = \frac{2L^3}{3EI}\left(H_A(\cos\alpha)^2 - \frac{P}{2}\sin\alpha\cos\alpha\right)$$

så $\delta_{hA} = 0 \Rightarrow H_A = \frac{P\tan\alpha}{2} = \frac{P}{2\sqrt{3}}$

Lösning 5: Konsolens utböjning är (Lundh 8–66) $w(x) = A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx)$, där $n = \sqrt{\frac{P_h}{EI}}$.

De fyra konstanterna bestäms ur randvillkor — två i var ände av balken.



Vid $x = 0$ har vi trivialt att $w(0) = 0$ och $w'(0) = 0$ (ingen förskjutning och ingen rotation vid den fasta inspänningen). Jämvikt vid $x = L$ ger att $M(L) = 0$ samt att $V(L) = P$. Eftersom $M = -EIw''$ (Lundh 7–65) kan momentvillkoret skrivas $w''(L) = 0$. Vidare har vi (Lundh 8–59) att $V = T + Hw'$, som tillsammans med (Lundh 8–62) $T = -EIw'''$ och $H = -P_h$ ger att kraftjämvikten kan skrivas $-EIw'''(L) - P_h w'(L) = P$ eller efter division med $-EI$: $w'''(L) + n^2 w'(L) = \frac{-P}{EI}$. Vi sammanfattar de fyra randvillkoren:

$$w(0) = 0 \ (1) \qquad w'(0) = 0 \ (2) \qquad w''(L) = 0 \ (3) \qquad w'''(L) + n^2 w'(L) = \frac{-P}{EI} \ (4)$$

Ekvationerna (1), (2) och (3) ger $A = -C = D\tan(nL)$ samt $B = -Dn$, så vi får

$$w(x) = D(\tan(nL) - nx - \tan(nL)\cos(nx) + \sin(nx))$$

Villkoret (4) ger nu $-Dn^3 = \frac{-P}{EI}$ så $D = \frac{P}{n^3 EI} = \frac{PL^3}{(nL)^3 EI}$ — vi finner

$$w(L) = \frac{PL^3}{3EI} \cdot \frac{3}{(nL)^3}(\tan(nL) - nL)$$

Kritisk last med avseende på stabilitet är $P_{\mathrm{kr}} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$ (Euler 1), så $P_{\mathrm{h}} = \frac{\pi^2 EI}{16L^2}$ och $nL = \sqrt{\frac{P_{\mathrm{h}} L^2}{EI}} = \frac{\pi}{4}$;

detta ger $\frac{3}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = 1{,}3289$ — utböjningen ökar med ca 33%