TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA KF OCH F — MHA 081
12 OKTOBER 2018

Lösningar

Tid och plats: 8.30—12.30 i SB–huset. Lärare besöker salen ca 9.30 samt 11.30

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.
2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.
3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.
Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.
4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset, 15/10. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2018) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

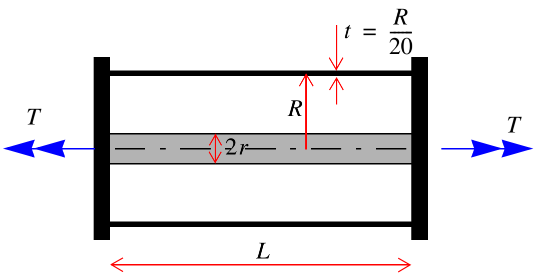
För att få poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

Resultatlista: Anslås 19/10 2018 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 25/10.

Granskning: Tisdag 23/10 $12^{\underline{30}}$–$13^{\underline{30}}$ på inst. (plan 3 i norra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

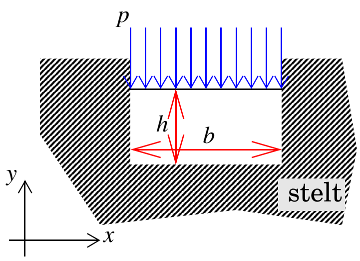


Axelkonstruktionen i figuren består av en central massiv axel med radien r och ett omgivande tunnväggigt rör med medelradie R och godtjocklek $t = \frac{R}{20}$. Delarna är tillverkade av ett lineärt elastiskt material med skjuvmodul G, och de är förenade med gavlar som kan betraktas som stela.

a: Bestäm radieförhållandet R/r så att snittmomenten i rör och axel blir lika stora, då konstruktionen belastas med ett vridande moment T. (3p)

b: Vilken del kommer först att plasticera då vridmomentet T successivt ökar, om $R = \frac{3r}{2}$? (2p)

2.



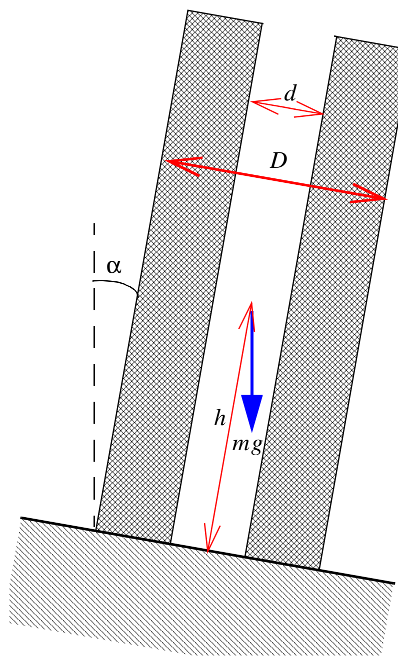
En kloss av ett lineärt elastiskt material, elasticitetsmodul E och tvärkontraktionstal $\nu > 0$, passar exakt in i en ränna i ett material som i jämförelse kan betraktas som stelt. Tvärsnittet i ett (x, y)–plan har bredd b och höjd h; klossen kan utvidgas utan motstånd i z–led. Friktion mellan klossen och omgivande material kan försummas. Beräkna

a: klossens nedtryckning (y–led) (3p)

b: och effektivspänningen enligt Trescas hypotes (2p)

då klossen belastas med ett tryck p enligt figuren.

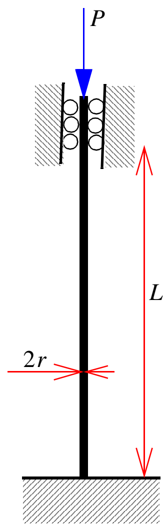
3.



Betrakta en enkel modell av lutande tornet i Pisa (*Torre pendente di Pisa*): en tjockväggig cylinder med ytter– och innerdimater D respektive d, som belastas av sin egentyngd mg. En kritisk lutning α är då dragspänningar uppträder någonstans i väggen. Beräkna denna vinkel (uttryckt i givna storheter). Det räcker med att undersöka ett tänkt snitt genom cylindern närmast marken. Egentyngden kan ansättas i tyngdpunkten, som ligger på avståndet h från markplanet, mätt längs cylinderns centrumlinje. (5p)

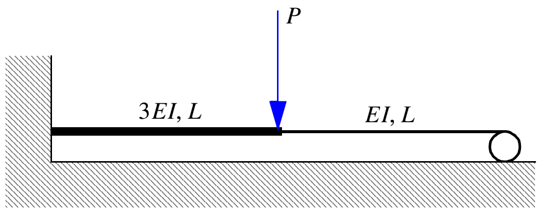
4.

En pelare med längden $L = 1{,}0\ \mathrm{m}$ är infäst enligt figuren och belastas med en tryckande axialkraft P. Pelaren ska ha ett massivt cirkulärt tvärsnitt med radie r. Bestäm radien så att materialet plasticerar samtidigt som pelaren blir instabil, om materialet är lineärt elastiskt med elasticitets modul $E = 200\ \mathrm{GPa}$ och sträckgräns $\sigma_s = 200\ \mathrm{MPa}$. (5p)



5.

Beräkna samtliga stödreaktioner (krafter och moment) för den nedan visade balkstrukturen. Balkens längd är $2L$ och på dess mittpunkt angriper en vertikal kraft P. Vänstra änden är fast inspänd och i höger ände är vertikalförskjutning förhindrad. Böjstyvheten hos den vänstra halvan är 3 ggr större än för den högra halvan. (5p)



Lösning 1a: Vi har trivialt att $2M_v = T$, där M_v är snittmomentet i respektive del. Vridningsvinkeln för axeln är $\varphi_{\text{axel}} = \dfrac{2M_vL}{\pi G r^4}$ (Lundh 6–11,12); vinkeln för röret är $\varphi_{\text{rör}} = \dfrac{10M_vL}{\pi G R^4}$ (Lundh 6–6).

Dessa vridningsvinklar måste vara lika stora eftersom gavlarna är stela:

$$\varphi_{\text{axel}} = \varphi_{\text{rör}} \Rightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^4 = 5 \Rightarrow \frac{R}{r} = \sqrt{\sqrt{5}} \approx 1{,}5$$

Lösning 1b: Skjuvspänningen i röret (konstant pga tunnväggighet) fås enligt Lundh 6–4 som

$$\tau_{\text{rör}} = \frac{M_{v,\text{rör}}}{2\pi R^2 \dfrac{R}{20}} = \frac{10M_{v,\text{rör}}}{\pi\left(\dfrac{3}{2}r\right)^3} = \frac{80M_{v,\text{rör}}}{27\pi r^3}$$

Lundh 6–14 ger maximal skjuvspänning i axeln: $\tau_{\text{axel}} = \dfrac{2M_{v,\text{axel}}}{\pi r^3}$

Eftersom $R = \dfrac{3r}{2}$ vet vi från deluppgift a att $M_{v,\text{axel}} \approx M_{v,\text{rör}}$, så skjuvspänningen i röret är större än största skjuvspänningen i axeln — röret plasticerar först.

Lösning 2a: Enligt förutsättningarna har vi $\sigma_y = -p$ och $\sigma_z = 0$. Kompatibilitet kräver att $\varepsilon_x = 0$.

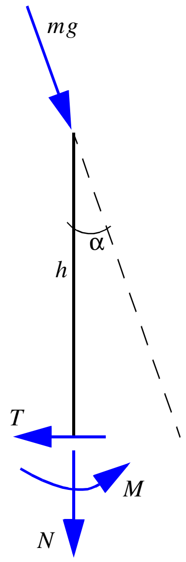
Vi har då (Lundh ekv 10–7) $0 = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$, varur $\sigma_x = -\nu p$. Hoptryckningen blir då

$$-\varepsilon_y h = \frac{-h}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) = \frac{ph(1-\nu^2)}{E}$$

Lösning 2b: Trescaspänningen σ_e fås som skillnaden mellan största och minsta huvudspänningen. Eftersom vi inte har några skjuvspänningar, är normalspänningarna också huvudpänningar. Med $0 < \nu < \frac{1}{2}$ är dessa i storleksordning $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -\nu p$ och $\sigma_3 = -p$; vi har då

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = p$$

Lösning 3: I tornets botten får vi en nornalkraft $N = -mg\cos\alpha$ samt ett böjande moment $M = mgh\sin\alpha$ (tvärkraften $T = mg\sin\alpha$ påverkar inte normalspänningen σ). Normalspänningen beräknas enl Lundh ekv 7–26



$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Mz}{I} = mg\left(\frac{-\cos\alpha}{A} + \frac{hz\sin\alpha}{I}\right)$$

här är tvärsnittsarean $A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ och areatröhetsmomentet (se formelsamling) $I = \frac{\pi}{4}\left(\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \left(\frac{d}{2}\right)^4\right) = A\frac{D^2 + d^2}{16}$; z är en koordinat i tvärsnittet, med origo i yttyngdpunkten. Vi får störst normalspänning för störst z, dvs för $z = \frac{D}{2}$. Insättning ger nu

$$\sigma = \frac{mg}{A}\left(-\cos\alpha + \frac{8hD\sin\alpha}{D^2 + d^2}\right)$$

Man har här en dragspänning då $\sigma > 0$; gränsfallet $\sigma = 0$ inträffar då $\frac{8hD\sin\alpha}{D^2 + d^2} - \cos\alpha = 0$, dvs då

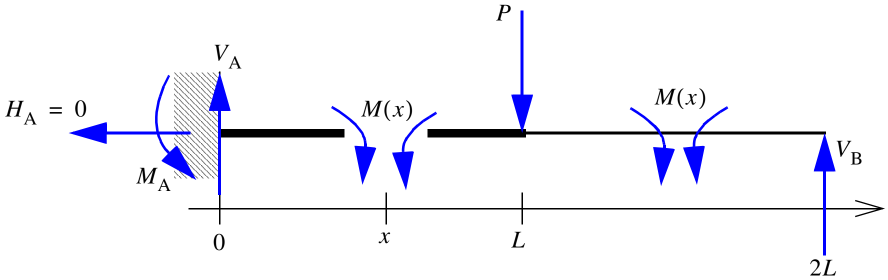
$$\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{D^2 + d^2}{8hD}\right)$$

Lösning 4: Plasticering fås kraften $P = P_s$ är sådan att $\frac{P_s}{A} = \sigma_s$, dvs då $P_s = \pi r^2 \sigma_s$.

Pelaren blir instabil för trycklasten $P = P_{\text{Euler4}} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$ (Lundh 8–48). Med $I = \frac{\pi r^4}{4}$ har vi då kritisk last $P_{kr} = \frac{\pi^3 E r^4}{L^2}$.

Villkoret $P_s = P_{kr}$ ger då $r = \frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{\sigma_s}{E}} = \frac{L}{\sqrt{1000}\pi} \approx 10 \text{ mm}$

Lösning 5: Vi har här fyra obekanta stödreaktioner men bara tre jämviktsekvationer att tillgå, så problemet är statiskt obestämt. Vi inför stödkraften V_B vid rullagringen som statiskt övertalig och beräknar den associerade förskjutningen r_B mha Castiglianos 2a sats (Lundh 15–96); kompatibilitetsvillkoret $r_B = 0$ ger sedan den extra ekvation som behövs.



Lägg ett tänkt snitt mellan inspänningen och den yttre lasten P; momentjämvikt för den högra delen ger då det böjande momentet

$$M(x) = P(L-x) - V_B(2L-x) \qquad 0 < x < L$$

För ett tänkt snitt mellan P och rullstödet fås på samma sätt

$$M(x) = -V_B(2L-x) \qquad L < x < 2L$$

Om endast böjdeformation beaktas har vi då (Lundh 15–52, 96)

$$r_B = \frac{\partial W}{\partial V_B} = \int_0^{2L} \frac{M}{EI(x)} \frac{\partial M}{\partial V_B} dx = \int_0^L \frac{M}{3EI} \frac{\partial M}{\partial V_B} dx + \int_L^{2L} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V_B} dx$$

Insättning ger

$$r_B EI = \frac{1}{3}\left(\int_0^L -P(L-x)(2L-x) - V_B(2L-x)^2 dx\right) + \int_L^{2L} V_B(2L-x)^2 dx$$

Med $r_B = 0$ fås då $0 = \frac{5L^3}{18}(4V_B - P)$, så $V_B = \frac{P}{4}$. Kraft– och momentjämvikt för hela strukturen (figur ovan) ger sedan $V_A = \frac{3P}{4}$ och $M_A = \frac{PL}{2}$ (samt trivialt $H_A = 0$)