TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA KF OCH F — MHA 081 Lösningar
22 AUGUSTI 2018

Tid och plats: 8.30—12.30 i M–huset. Lärare besöker salen ca 9.30 samt 11.30

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Studentlitteratur.

2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset, 23/8. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2018) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

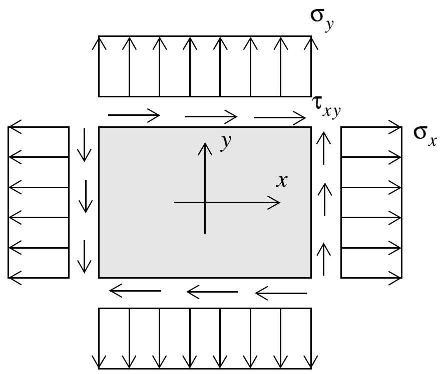
För att få poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

Resultatlista: Anslås 3/9 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 6/9.

Granskning: Tisdag 4/9 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i norra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

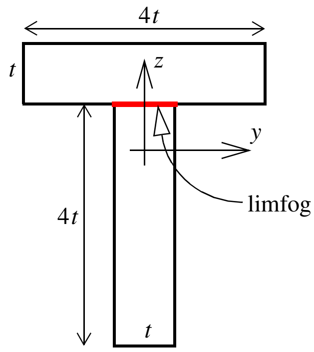


En rektangulär plåt belastas med dragspänningar $\sigma_x = 50\text{ MPa}$ och $\sigma_y = 18\text{ MPa}$; plant spänningstillstånd kan antas.

a: Bestäm den största skjuvspänning τ_{xy} som kan påföras utan att det uppkommer någon tryckspänning, i någon riktning, i xy–planet. (3p)

b: Med σ_x och σ_y enligt ovan, och med $\tau_{xy} = 30\text{ MPa}$, beräkna den största dragspänning som uppkommer i någon riktning. (2p)

2.

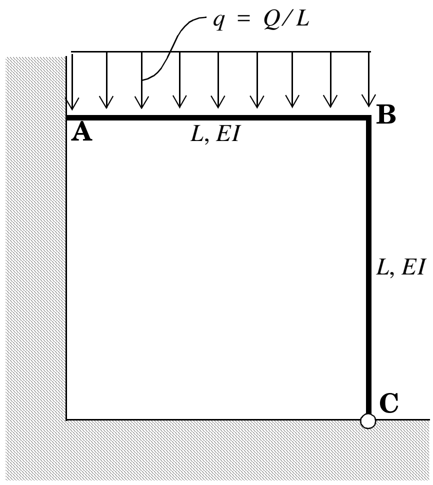


En fritt upplagd balk med längd L belastas av en fördelad last $q(x)$ så att det böjande momentet blir $M(x) = \frac{q_0L^2}{12}\left[3\left(\frac{x}{L}\right) - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4\right]$ för $0 \le x \le L$; här är q_0 (kraft/längd) en bekant lastparameter.

a: Bestäm den till beloppet största tvärkraft T som uppträder i balken. (1p)

b: Balken har tillverkats genom att limma ihop två likadana brädor till ett enkelsymmetriskt T–tvärsnitt. Vardera bräda har tjocklek t och bredd $4t$ (se figur). Sätt $L = 50t$ och beräkna skjuvspänningen i limfogen, i ett tvärsnitt där $|T| = \frac{5q_0L}{12}$ (4p)

3.



En horisontell (**AB**) och vertikal (**BC**) balk har sammanfogats till en ram **ABC** enligt figuren. Ramen är fast inspänd vid **A** och ledat till golvet vid **C**. Båda balkarna har längd L och böjstyvhet EI. Delen **AB** belastas med en vertikal kraft Q fördelad över hela längden; lastintensiteten (kraft/längd) är alltså $q = \frac{Q}{L}$. I det följade kan axialdeformationer försummas.

a: Beräkna det böjande momentet i delen **AB**. Ange speciellt det största momentet. (4p)

b: De två balkarna ska ha massivt cirkulärt tvärsnitt; hur stor måste diametern D vara om $\sigma_{\text{till}} = 100\text{ MPa}$ och det största böjande momentet är $|M|_{\max} = \frac{3qL^2}{28}$, $L = 2{,}85\text{ m}$ samt $Q = 4{,}00\text{ kN}$? (1p)

4.

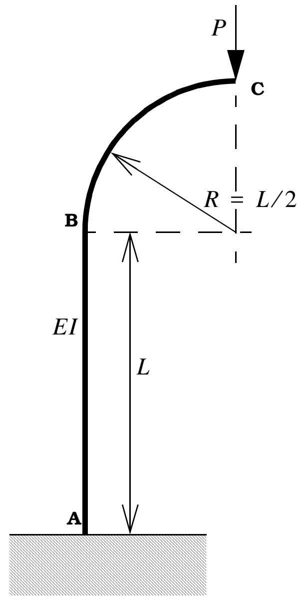
Betrakta återigen konstruktionen i figuren till uppgift 3. Den vertikala stödkraften vid **A** kan beräknas till $\frac{4Q}{7}$.

a: Bestäm en övre och undre gräns för kritisk lastresultant Q_{kr} med avseende på elastisk stabilitet (1p)

b: Härled en knäckekvation, dvs en ekvation vars lägsta positiva rot ger kritisk last Q_{kr} (4p)

5.

En bågkonstruktion består av en vertikal pelare **AB** med höjd L samt en kvartscirkel **BC** med krökningsradie $R = \frac{L}{2}$, där båda delarna har den konstanta böjstyvheten EI. Konstruktionen är fast inspänd vid **A** och belastas med en vertikal kraft P vid **C**. Beräkna rotationen vid **C**. Radien R kan antas vara stor jämfört med karakteristiskt tvärsnittsmått, så endast böjdeformationer behöver beaktas. (5p)



<u>Lösning 1:</u> Största och minsta huvudspänning är största respektive minsta normalspänning som uppträder i någon riktning. Eftersom det råder plant spänningstillstånd i (x, y)–planet, är $\sigma_z = 0$ en huvudspänning; de andra två huvudspänningarna fås ur (Lundh ekv 9–49)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (1)$$

1a: Villkoret här är att minsta huvudspänningen inte får bli negativ. Ekv (1) ger

$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \geq 0$, ur vilket vi löser $\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \leq \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2$. Vi får då

$|\tau_{xy}| \leq \sqrt{\sigma_x \sigma_y} = 30\ \mathrm{MPa}$

1b: Vi söker den största huvudspänningen. Ekv (1) ger $\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 68\ \mathrm{MPa}$

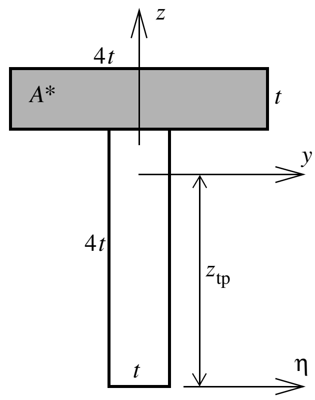
Lösning 2a: Vi har här $T(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{q_0 L}{12}\left[3 - 12\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$. I intervallets ändpunkter har vi då

$T(0) = \frac{q_0 L}{4}$ respektive $T(L) = \frac{-5q_0 L}{12}$. Lokala extremvärden får vi då $\frac{dT}{dx} = q_0\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)\right] = 0$, dvs vid

$x/L = 0$ och $x/L = 2$; $T(0)$ har redan beräknats, medan $x = 2L$ ligger utanför det givna intervallet.

$$|T|_{\max} = \frac{5q_0 L}{12}$$

Lösning 2b: Den sökta spänningen beräknas enligt Lundh ekv (7–48). Vi måste först hitta tvärsnittets yt–tyngdpunkt. Statiska momentet map en hjälpaxel η (figuren) är



$$S_\eta = Az_{\text{tp}} = 4t^2 \cdot \left(\frac{t}{2} + 4t\right) + 4t^2 \cdot 2t = 26t^3$$

Med tvärsnittsytan $A = 8t^2$ finner vi alltså $z_{\text{tp}} = \frac{13t}{4}$.

Areatröghetsmomentet map y–axeln fås med Steiners sats (Lundh ekv (7–42))

$$I_y = \frac{4t \cdot t^3}{12} + 4t^2 \cdot \left(\frac{t}{2} + 4t - z_{\text{tp}}\right)^2 + \frac{t \cdot (4t)^3}{12} + 4t^2 \cdot (z_{\text{tp}} - 2t)^2 = \frac{109t^4}{6}$$

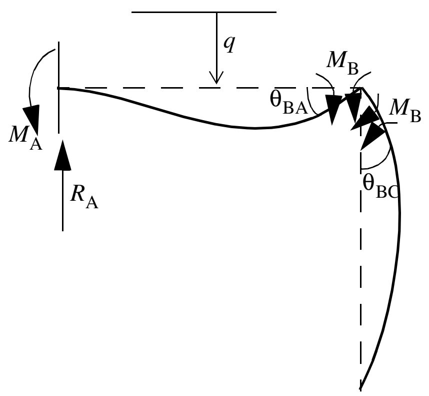
där de två första termerna i mellanledet är bidraget fån flänsen.

Snitta nu genom limfogen; den utsnittade delen (flänsen) har area $A^* = 4t^2$ och dess statiska moment map y–axeln är

$$S_{A^*} = A^* \cdot \left(\frac{t}{2} + 4t - z_{\text{tp}}\right) = 5t^3$$

Insättning i Lundh ekv (7–48) ger nu (med $L = 50t$) $\tau = \dfrac{\dfrac{5q_0 \cdot 50t}{12} \cdot 5t^3}{\dfrac{109t^4}{6} \cdot t} = \dfrac{625q_0}{109t}$

Lösning 3a: Betrakta snittmomentet M_B som en yttre belastning. De två vinklarna θ_{BA} och θ_{BC} fås ur elementarfall, formelsamling sid 12 respektive 10



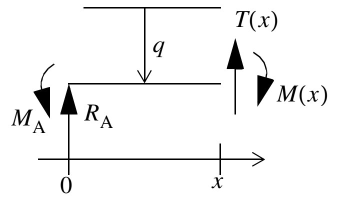
$$\theta_{BA} = \frac{qL^3}{48EI} - \frac{M_B L}{4EI} \qquad \theta_{BC} = \frac{M_B L}{3EI}$$

Kompatibilitetsvillkoret $\theta_{BA} = \theta_{BC}$ ger då $M_B = \frac{qL^2}{28}$

Ur elementarfall fås även stödreaktionerna vid **A**

$$R_A = \frac{5qL}{8} - \frac{3M_B}{2L} = \frac{4qL}{7} \qquad M_A = \frac{qL^2}{8} - \frac{M_B}{2} = \frac{3qL^2}{28}$$

Snitta nu på ett avstånd x från inspänningen vid **A**; momentjämvikt kring en axel genom snittet ger nu



$$M(x) = q \cdot x \cdot \frac{x}{2} - R_A \cdot x + M_A = \frac{qL^2}{28}\left[3 - 16\frac{x}{L} + 14\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

$\frac{dM}{dx} = 0$ ger att vi har ett lokalt extremvärde vid $x/L = 4/7$:

$M\left(\frac{4L}{7}\right) = \frac{-11qL^2}{196}$. Maximalt moment uppträder alltså vid **A** och är $\frac{3qL^2}{28}$

Lösning 3b: Vi beräknar normalspänningen σ enligt Lundh ekv (7–26). För ett massivt cirkulärt tvärsnitt med diameter D har vi $|z|_{max} = \frac{D}{2}$ och (formelsamling sid 7) $I = \frac{\pi D^4}{64}$. Insättning ger

$$|\sigma|_{max} = \frac{\frac{3qL^2}{28} \cdot \frac{D}{2}}{\frac{\pi D^4}{64}} = \frac{24qL^2}{7\pi D^3}$$

Med $|\sigma|_{max} = \sigma_{till}$ och $qL = Q$ fås då $D = \left(\frac{24QL}{7\pi\sigma_{till}}\right)^{1/3} \approx 50$ mm

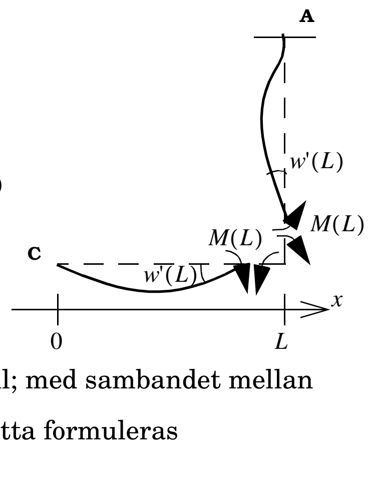
Lösning 4a: Resultanten till den yttre belastningen på delen **AB** är Q. Eftersom stödreaktionen vid **A** är $\frac{4Q}{7}$, blir trycklasten på delen **BC** $Q - \frac{4Q}{7} = \frac{3Q}{7}$.

Om man tänker sig en led mellan de två delarna vid B, fås en vekare struktur där **BC** fungerar som en Euler 2a; en undre gräns för kritisk last är då $\frac{3Q_{kr,undre}}{7} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$.

Om böjstyvheten för delen AB tänks vara mycket stor, fås en styvare struktur där BC fungerar som en Euler 3a så en övre gräns är $\frac{3Q_{kr,övre}}{7} = \frac{2{,}05\pi^2 EI}{L^2}$

$$Q_{kr,undre} = 2{,}33\frac{\pi^2 EI}{L^2} < Q_{kr} < 4{,}78\frac{\pi^2 EI}{L^2} = Q_{kr,övre}$$

Lösning 4b: Vi betraktar delen **BC** med en tryckande axialkraft $P = \frac{3Q}{4}$. Med $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ blir transversalförskjutningen



$$w(x) = A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx) \qquad (2)$$

(Lundh ekv (8–66)).

Vi behöver 4 randvillkor — 2 i var ände. Vid den ledade infästningen **C** är transversalförskjutningen förhindrad och snittmomentet är noll; med sambandet mellan snittmoment och förskjutning, $M = -EIw''$ (Lundh ekv (7–65), kan detta formuleras

$$w(0) = 0 \qquad w''(0) = 0 \tag{3}$$

Vid **B** är transversalförskjutningen också noll (axialdeformationerna försummas), så

$$w(L) = 0 \tag{4}$$

Det 4e randvillkoret fås genom att betrakta sambanndet mellan rotation och snittmoment vid **B**. Delen **AB** ger ett mothållande moment då vi har en rotation $w'(L)$ vid **B**. I formelsamlingen sid 12 hittar vi $w'(L) = \frac{M(L)L}{4EI}$; insättning av $M = -EIw''$ ger

$$w''(L) + \frac{4}{L}w'(L) = 0 \tag{5}$$

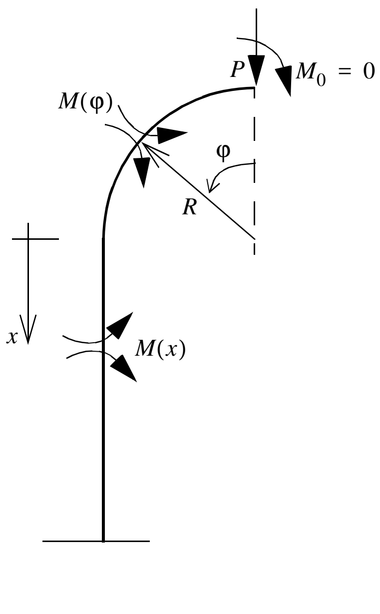
Ekvationerna (2) och (3) ger direkt att $A = C = 0$, varefter (4) kräver att $B = -D\frac{\sin(nL)}{L}$. Transversalförskjutningen (2) blir alltså $w(x) = D\left[\sin(nx) - \frac{x\sin(nL)}{L}\right]$, som insatt i (5) ger

$$D\left[-n^2\sin(nL) + \frac{4n}{L}\cos(nL) - \frac{4}{L^2}\sin(nL)\right] = 0$$

Icke–trivial lösning kräver att uttrycket inom klammerparentesen är noll; multiplikation med $\frac{L^2}{\cos(nL)}$ ger att $(4 + (nL)^2)\tan(nL) - 4nL = 0$ eller $\tan(nL) = \frac{4nL}{4 + (nL)^2}$

<u>Lösning 5:</u> Om vi inför ett yttre moment M_0 vid C, kan den sökta rotationen θ beräknas med Castiglianos 2a sats: $\theta = \frac{\partial W}{\partial M_0}$ (Lundh ekv (15–97)). Den elastiska energin ges av Lundh (15–52); om enbart böjdeformation beaktas har vi $W = \int_s \frac{M^2}{2EI}ds$, där s är en koordinat längs bärverket. Med $\frac{\partial W}{\partial M_0} = \frac{\partial W}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial M_0}$ har vi då

$$\theta = \int_s \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_0}ds \tag{6}$$



Momentjämvikt ger

$$M(\varphi) = M_0 + PR\sin(\varphi) \qquad M(x) = M_0 + PR \text{ så } \frac{\partial M}{\partial M_0} = 1$$

som insatt i (6) och med $M_0 = 0$ ger $\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{PR}{EI}\sin(\varphi) \cdot Rd\varphi + \int_0^L \frac{PR}{EI}dx = \frac{PR^2}{EI} + \frac{PRL}{EI} = \frac{3PL^2}{4EI}$