TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA KF OCH F — MHA 081

1 JUNI 2018

Lösningar

Tid och plats: 14.00—18.00 i M–huset. Lärare besöker salen ca 15.00 samt 16.30

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Studentlitteratur.
2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.
3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.
Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.
4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset, 4/6. Se även PingPong–sidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2018) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

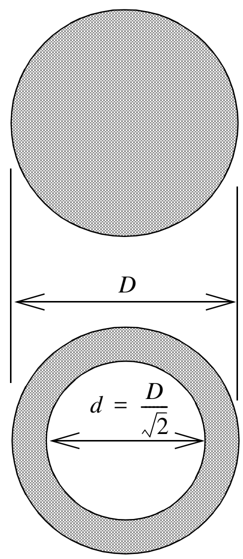
För att få poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

Resultatlista: Anslås **senast** 14/6 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 15/6.

Granskning: Fredag 15/6 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt tisdag 4/9 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i norra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

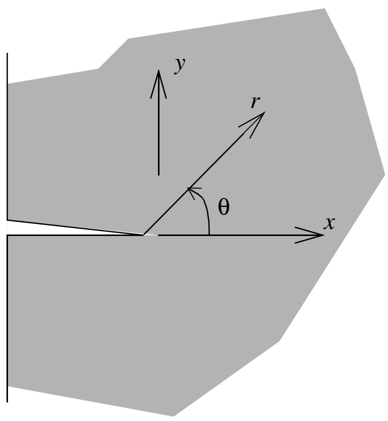


En maskin–axel ska överföra effekten $P = 1\ \mathrm{MW}$ vid varvtalet $n = 230\ \mathrm{varv/min}$. Axelmaterialet är lineärt elastiskt med sträckgränsen $\sigma_s = 500\ \mathrm{MPa}$.

a: Bestäm diametern D om axeln ska ha ett massivt cirkulärt tvärsnitt och säkerheten mot plasticering enligt Trescas flythypotes ska vara 4 (3p)

b: För att halvera vikten bestämmer man sig för att borra upp ett centralt placerat hål med diameter $d = \frac{D}{\sqrt{2}}$. Med hur många procent kan man då förvänta sig att maximal skjuvspänning ökar? (2p)

2.



Betrakta en skiva i (x, y)–planet med en kantspricka, enligt figuren. För en viss typ av belastning blir spänningarna nära sprickspetsen

$$\tau_{xz} = \frac{-C}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2} \qquad \tau_{yz} = \frac{C}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}$$

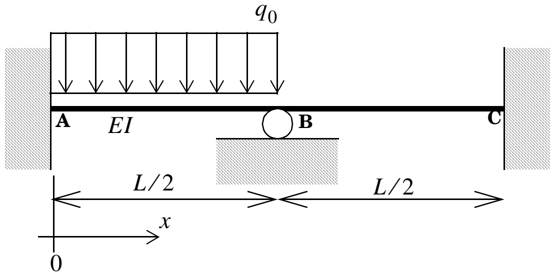
och övriga spänningskomponenter noll ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$), enligt lineär elasticitetsteori; här är (r, θ) polära koordinater med origo i sprickspetsen och C är en integrationskonstant som beror av skivans geometri och hur belastningen läggs på.

a: Beräkna huvudspänningarna nära sprickspetsen. (2p)

b: Bestäm det område kring sprickspetsen som plasticerar enligt von Mises hypotes, dvs bestäm det område inom vilket $\sigma_e \geq \sigma_s$ där σ_e är effektivspänningen enligt von Mises och σ_s är materialets sträckgräns vid enaxlig dragning. (2p)

c: Antag att man istället använder Trescas hypotes för att uppskatta plastiska zonens storlek — skulle man då få ett större eller mindre områden än vad von Mises anger? Motivera ditt svar eller gör en beräkning. (1p)

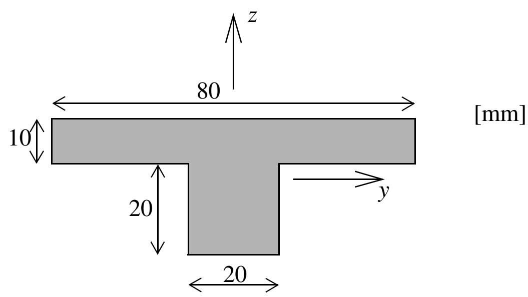
3.



En lineärt elastisk balk **ABC** har konstant böjstyvhet EI och längd L. Balken kan betrakts som fast inspänd i sina båda ändar **A** och **C** samt stöds av ett rullager vid **B**, så att två lika långa spann bildas. Vi betraktar ett lastfall med en fördelad last med konstant intensitet q_0 (kraft/längd) angriper balken i spannet **AB**.

a: Beräkna det böjande momentet $M(x)$ i spannet **AB**. Ange speciellt the till beloppet största momentet. (3p)

b: Låt $q_0 = 9{,}60$ kN/m samt $L = 2$ m och bestäm den till beloppet största normalspänningen i ett snitt där $M = \frac{5q_0L^2}{192}$. Tvärsnittet är enkelsymmetriskt med storlek och form enligt figuren (2p).

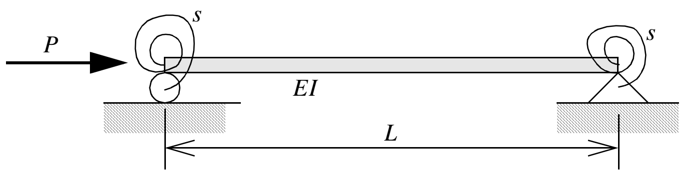


4.

En lineärt elastisk balk med böjstyvheten EI och längden L är elastiskt inspänd med styvheten $s = 2EI/L$ i båda ändar, dvs sambandet mellan infästningsmomentet M_{in} och ändens rotation θ är $M_{\text{in}} = s\theta$. Balken belastas med en axiellt tryckande kraft P enligt figuren.

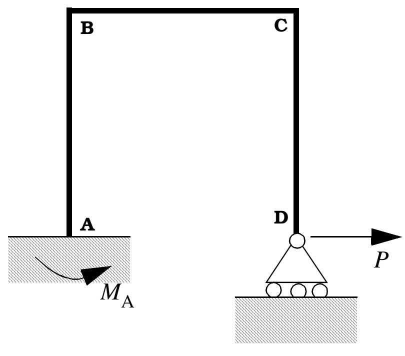
a: Bestäm en övre och undre gräns för elastisk stabilitet (knäcklasten) (1p)

b: Härled knäckekvationen för balken, dvs den ekvation vars lösning ger det kritiska värdet på P (4p)



5.

Ramen **ABCD** består av tre balkar som var och en har längden L och böjstyvheten EI. Konstruktionen är fast inspänd vid **A**; vid **D** är den rullagrad (vertikalförskjutning förhindrad) och belastad med en yttre kraft P. Bestäm inspänningsmomentet M_A vid **A**. (5P)



Lösning 1a: Det vridande momentet är $M_\mathrm{v} = \frac{30P}{\pi n}$ (Lundh 6–1). Tvärsnittsfaktorn blir

$K_\mathrm{a} = \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{D}{2}\right)^4 - 0^4\right) = \frac{\pi D^4}{32}$ (Lundh 6–12). Maximal skjuvspänning blir $\tau_\mathrm{max} = \frac{M_\mathrm{v}\frac{D}{2}}{K_\mathrm{a}} = \frac{\frac{30P}{\pi n}\cdot\frac{D}{2}}{\frac{\pi D^4}{32}} = \frac{480P}{n\pi^2 D^3}$

(Lundh 6–14). Vid ren skjuvning får effektivspänningen enligt Trescas hypotes som $\sigma_\mathrm{e} = 2\tau_\mathrm{max}$.

Med $\sigma_\mathrm{e} = \frac{\sigma_\mathrm{s}}{s}$, där $s = 4$ är säkerheten mot plasticering, har vi då $\frac{960P}{n\pi^2 D^3} = \frac{\sigma_\mathrm{s}}{s}$. Vi får då

$$D = \left[\frac{960Ps}{n\pi^2\sigma_\mathrm{s}}\right]^{1/3} \approx 150\text{ mm}$$

Lösning 1b: För den urborrade axeln har vi tvärsnittsfaktorn $K_\mathrm{b} = \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \left(\frac{D}{2\sqrt{2}}\right)^4\right) = \frac{3\pi D^4}{128}$ och

alltså maximal skjuvspänning $\tau_\mathrm{max,b} = \frac{M_\mathrm{v}\frac{D}{2}}{K_\mathrm{b}}$. Med τ_max enligt ovan har vi alltså

$$\frac{\tau_\mathrm{max,b}}{\tau_\mathrm{max}} = \frac{\left(\frac{M_\mathrm{v}\frac{D}{2}}{K_\mathrm{b}}\right)}{\left(\frac{M_\mathrm{v}\frac{D}{2}}{K_\mathrm{a}}\right)} = \frac{K_\mathrm{a}}{K_\mathrm{b}} = \frac{\left(\frac{\pi D^4}{32}\right)}{\left(\frac{3\pi D^4}{128}\right)} = \frac{4}{3}$$

Maximal skjuvspänning ökar alltså med ca 33%

Lösning 2a: Huvudspänningarna fås som egenvärdena till spänningstensorn $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}$

($\boldsymbol{S}^\mathrm{T} = \boldsymbol{S}$) (Lundh ekv 9–6). $\det(\boldsymbol{S} - \sigma\boldsymbol{I}) = 0$ ger $-\sigma^3 + \sigma(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = 0$, som har rötterna

$$\sigma = 0,\ \sigma = \pm\sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{\pm C}{\sqrt{2\pi r}}\sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{\pm C}{\sqrt{2\pi r}}$$

Lösning 2b: Effektivspänningen enligt von Mises beräknas enlig formelsamling sid 20 eller

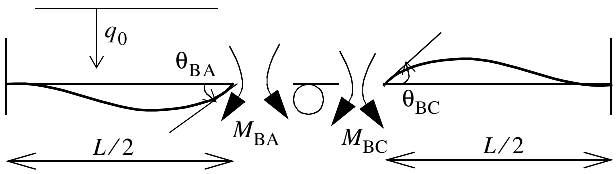
Lundh ekv 12–4; med $\sigma_\mathrm{e} \geq \sigma_\mathrm{s}$ fås $\sqrt{3(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \geq \sigma_\mathrm{s}$. Insättning av givna skjuvspänningar ger

$$\sqrt{\frac{3}{2\pi r}}C\sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2\pi r}}C \geq \sigma_\mathrm{s}$$

Det plasticerade området är alltså cirkelskivan $r \leq \frac{3}{2\pi}\left(\frac{C}{\sigma_\mathrm{s}}\right)^2$, med centrum i sprickspetsen.

Lösning 2c: Tresca är den mer konservativa av de två flythypoteserna och ger en effektivspänning som är minst lika stor von Mises. Den kan därför inte prediktera ett mindre plastiskt område.

Lösning 3a: Sitta på ömse sidor mittstödet. Momentjämvikt för det utsnittade stödet visar att momentet är lika på båda sidor: $M_{\mathrm{BA}} = M_{\mathrm{BC}} = M_{\mathrm{B}}$. De två vinklarna fås ur elementarfall, Formelsamling sid. 12:

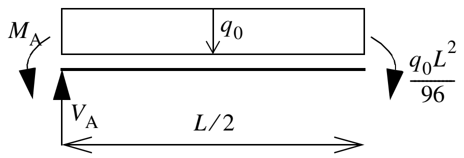


$$\theta_{\mathrm{BA}} = \frac{q_0\left(\frac{L}{2}\right)^3}{48EI} - \frac{M_{\mathrm{B}}\left(\frac{L}{2}\right)}{4EI} = \frac{L}{8EI}\left(\frac{q_0L^2}{48} - M_{\mathrm{B}}\right)$$

$$\theta_{\mathrm{BC}} = \frac{M_{\mathrm{B}}\left(\frac{L}{2}\right)}{4EI} = \frac{L}{8EI}M_{\mathrm{B}}$$

Kompatibilitetsvillkoret $\theta_{\mathrm{BA}} = \theta_{\mathrm{BC}}$ ger nu $M_{\mathrm{B}} = \frac{q_0L^2}{96}$

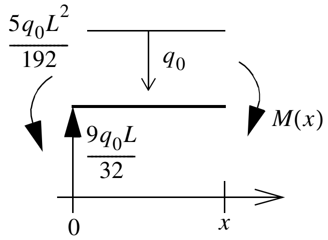
Betrakta nu delen **AB**. Formelsamling sid 12 ger



$$V_{\mathrm{A}} = -\frac{3}{2\left(\frac{L}{2}\right)}\frac{q_0L^2}{96} + \frac{5q_0\left(\frac{L}{2}\right)}{8} = \frac{9q_0L}{32}$$

$$M_{\mathrm{A}} = \frac{-\frac{q_0L^2}{96}}{2} + \frac{q_0\left(\frac{L}{2}\right)^2}{8} = \frac{5q_0L^2}{192}$$

Snitta nu på ett avstånd x från stödet **A**. Momentjämvikt ger



$$M(x) - \frac{5q_0L^2}{192} + \frac{9q_0L}{32}\cdot x - q_0x\cdot\frac{x}{2} = 0$$

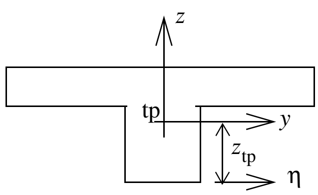
$$\Rightarrow M(x) = \frac{q_0L^2}{192}\left(5 - 54\frac{x}{L} + 96\left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

Vi söker nu $|M|_{\max}$ i intervallet $0 \le x \le \frac{L}{2}$. I ändarna har vi $M(0) = \frac{5q_0L^2}{192}$

respektive $M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q_0L^2}{96}$. Läget för lokal extrempunkt fås ur $\frac{dM}{dx} = 0$: $-54 + 192\frac{x}{L} = 0 \Rightarrow x = \frac{27L}{96}$;

$M\left(\frac{27L}{96}\right) = \frac{-83q_0L^2}{6144} \approx -0{,}0135q_0L^2$. Alltså har vi $|M|_{\max} = M(0) = \frac{5q_0L^2}{192} \approx 0{,}0260q_0L^2$

Lösning 3b: Vi bestämmer först tyngdpunktens läge för tvärsnittet. Statiskt moment med avseende på en axel η (figur) är



$$S = z_{\mathrm{tp}}A = 800\ \mathrm{mm}^2\cdot 25\ \mathrm{mm} + 400\ \mathrm{mm}^2\cdot 10\ \mathrm{mm} = 24\cdot 10^3\mathrm{mm}^3$$

Tvärsnittsarean är $A = 1200\ \mathrm{mm}^2$, så vi finner $z_{\mathrm{tp}} = \frac{24\cdot 10^3\mathrm{mm}^3}{A} = 20\ \mathrm{mm}$.

Den till beloppet största z–koordinaten i tvärsnittet hittar vi då i underkant, där $z = -20\ \mathrm{mm}$.

Areatröghetsmomentet med avseende på y–axeln genom yttyngdpunkten beräknas med Steiners sats (Lundh 7–42)

$$I_y = \frac{80\text{mm} \cdot (10\text{mm})^3}{12} + 800\text{ mm}^2 \cdot (5\text{ mm})^2 + \frac{20\text{ mm} \cdot (20\text{ mm})^3}{12} + 400\text{ mm}^2 \cdot (10\text{ mm})^2 = 80 \cdot 10^{-9}\text{m}^4$$

Den sökta spänningen fås nu enligt Lundh 7–26: $|\sigma|_{\max} = \dfrac{|M|_{\max}|z|_{\max}}{I_y} = \dfrac{\dfrac{5q_0L^2}{192} \cdot 20 \cdot 10^{-3}\text{m}}{80 \cdot 10^{-9}\text{m}^4} = 250\text{ MPa}$

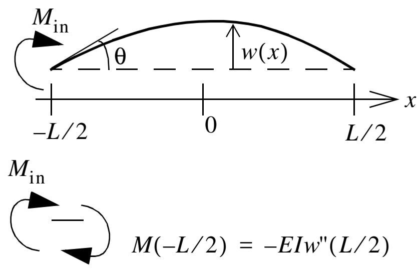
Lösning 4a: Med $s = 0$ kan balkändarna rotera utan motstånd och vi har Eulers 2a knäckfall för vilket den kritiska lasten är $P_{\text{kr}} = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$. Då $s \to \infty$ blir ändarnas rotation förhindrad och vi har Eulers 4e knäckfall, med $P_{\text{kr}} = \dfrac{4\pi^2 EI}{L^2}$. Med $s \neq 0$ men ändligt, måste då $\dfrac{\pi^2 EI}{L^2} < P_{\text{kr}} < \dfrac{4\pi^2 EI}{L^2}$

Lösning 4b: Vid instabilitet ges den transversella utböjningen av

$w(x) = A + Bx + C\cos nx + D\sin nx$, där $n = \sqrt{\dfrac{P}{EI}}$ (Lundh ekv 8–66). Med enbart homogena randvillkor, finns alltid den triviala lösningen $w \equiv 0$ ($A = B = C = D = 0$); knäcklasten fås som det lägsta värdet på P som ger ett n som tillåter en icke–trivial lösning.

Genom att lägga origo i balkens mittpunkt kan vi enkelt utnyttja symmetrin: $w(x) = w(-x) \Rightarrow B = D = 0$. Vi har då

$$w = A + C\cos nx$$
$$w' = -Cn\sin nx$$
$$w'' = -Cn^2\cos nx$$



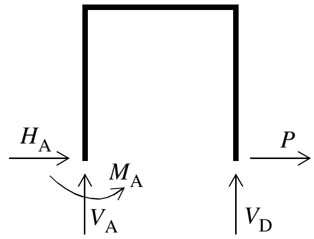
Randvillkoret $w\left(\dfrac{\pm L}{2}\right) = 0$ ger $A = -C\cos\dfrac{nL}{2}$. Momentjämvikt vid $x = \dfrac{-L}{2}$ kräver att $M\left(\dfrac{-L}{2}\right) = -M_{\text{in}}$; med $M(-L/2) = -EIw''(L/2)$ och $M_{\text{in}} = s\theta$, där $\theta = w'\left(\dfrac{-L}{2}\right)$, fås randvillkoret $w''\left(\dfrac{-L}{2}\right) - \dfrac{s}{EI}w'\left(\dfrac{-L}{2}\right) = 0$. Insättning ger

$$-Cn\left(n\cos\frac{nL}{2} + \frac{s}{EI}\sin\frac{nL}{2}\right) = 0$$

Icketriviala lösningar kräver att uttrycket inom parentes är noll. ($s = 0$ ger knäckekvationen $\cos\dfrac{nL}{2} = 0$, med lägsta positiva rot $\dfrac{nL}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ som ger knäcklasten $P_{\text{kr}} = n^2EI = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$ (dvs Eulers andra knäckfall som väntat). $s \to \infty$ ger knäckekvationen $\sin\dfrac{nL}{2} = 0$ som har minsta positiva rot $\dfrac{nL}{2} = \pi$, vilket ger knäcklasten $P_{\text{kr}} = n^2EI = \dfrac{4\pi^2 EI}{L^2}$ (Eulers fjärde knäckfall)).

Multiplikation med $\dfrac{EI}{s\cos\dfrac{nL}{2}}$ och insättning av $s = \dfrac{2EI}{L}$ ger oss nu knäckekvationen $\dfrac{nL}{2} + \tan\dfrac{nL}{2} = 0$

(Lägsta positiva roten är $\frac{nL}{2} \approx 2{,}028$, vilket ger knäcklasten $P_{\mathrm{kr}} \approx \frac{4EI \cdot (2,028)^2}{L^2} \approx \frac{1{,}67\,\pi^2 EI}{L^2}$)



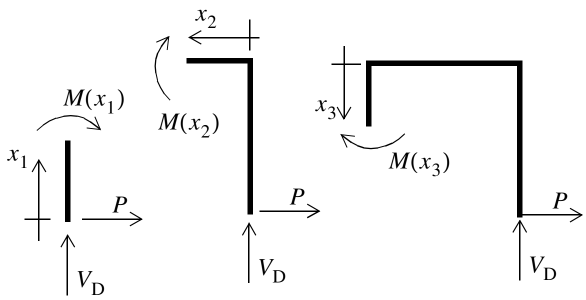
<u>Lösning 5:</u> Vi har 4 obekanta stödreaktioner enligt figuren, så ramen är statiskt obestämd. Momentjämvikt kring **A** ger att

$$M_{\mathrm{A}} = -V_{\mathrm{D}}L \qquad (1)$$

och förskjutningen $\delta_{v\mathrm{D}}$ (vertikalkomponenten vid **D**) kan beräknas enligt Castiglianos 2a sats som

$$\delta_{v\mathrm{D}} = \frac{\partial}{\partial V_{\mathrm{D}}}\int\frac{M^2}{EI}ds = \int\frac{\partial M}{\partial V_{\mathrm{D}}}\frac{\partial}{\partial M}\left[\frac{M^2}{EI}\right]ds = \frac{1}{EI}\int M\frac{\partial M}{\partial V_{\mathrm{D}}}ds \qquad (2)$$

där vi utnyttjat att böjstyvheten EI är konstant och integrationen ska göras längs hela ramen.



Låt x_1 vara en koordinat från **D** mot **C** och snitta genom **CD**. Momentjämvikt ger $M(x_1) = Px_1$ så vi har här $\frac{\partial M}{\partial V_{\mathrm{D}}} = 0$. Analogt får vi för ett snitt mellan **B** och **C** att $M(x_2) = PL + V_{\mathrm{D}}x_2$ och $\frac{\partial M}{\partial V_{\mathrm{D}}} = x_2$, medan ett snitt

genom delen **AB** ger $M(x_3) = P(L - x_3) + V_{\mathrm{D}}L$ och $\frac{\partial M}{\partial V_{\mathrm{D}}} = L$. Insättning i (2) ger nu

$$\delta_{v\mathrm{D}}EI = \int_0^L (M(x_1)\cdot 0)dx_1 + \int_0^L (M(x_2)\cdot x_2)dx_2 + \int_0^L (M(x_3)\cdot L)dx_3 = L^3\left[0 + \left(\frac{P}{2} + \frac{V_{\mathrm{D}}}{3}\right) + \left(V_{\mathrm{D}} + \frac{P}{2}\right)\right]$$

Villkoret $\delta_{v\mathrm{D}} = 0$ ger då att $V_{\mathrm{D}} = \frac{-3P}{4}$ och det eftersökta stödmomentet fås sedan ur (1): $M_{\mathrm{A}} = \frac{3PL}{4}$