TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA KF OCH F — MHA 081

6 OKTOBER 2017

Lösningar

Tid och plats: 8.30—12.30 i M–huset. Lärare besöker salen ca 9.30 samt 11.30

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.

2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset, 9/10. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2017) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

För att få poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

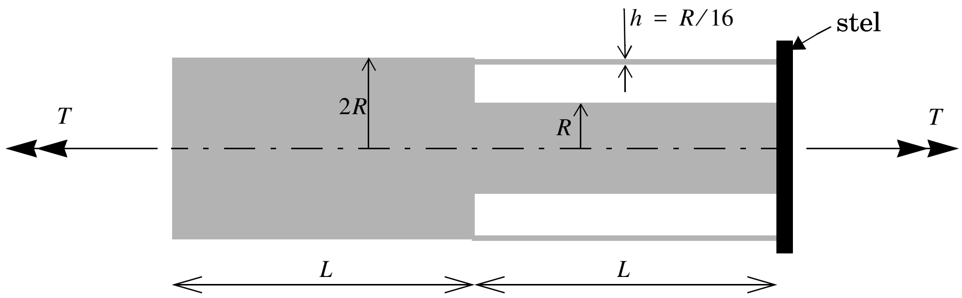
Resultatlista: Anslås 16/10 2017 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 20/10.

Granskning: Onsdag 18/10 $12^{\underline{30}}$–$13^{\underline{30}}$ på inst. (plan 3 i norra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

En axelkonstruktion består av två delar, vardera med längd L. Den vänstra halvan har ett massivt cirkulärt tvärsnitt med radie $2R$; höger del utgörs av ett tunnväggigt rör, medeleradie $2R$ och godstjocklek $h = \frac{R}{16}$, samt av en centralt placerad cirkulär massiv axel med radie R. De två delarna i den högra halvan är i axellängden sammanfogade med en skiva som kan betraktas som stel. Axelmaterialet är lineärt elastiskt–idealplastiskt med skjuvmodul G och sträckgräns τ_s vid ren skjuvning. Bestäm det vridmoment $T = T_s$ som ger begynnande plasticering. (5p)

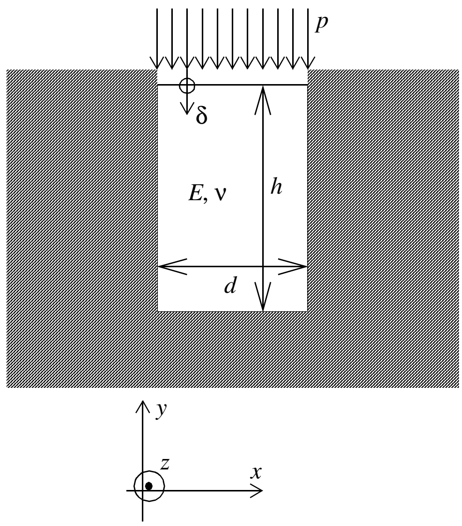


2.

En cylindrisk plugg av ett lineärt elastiskt material, elasticitetsmodul E och tvärkontraktionstal ν, har höjd h och diameter d. Pluggen passar exakt in i ett hål i en kropp som kan betraktas som stel jämfört med pluggen. Den fria ytan belastas med ett tryck p.

a: Bestäm spänningarna i pluggen. Antag att alla skjuvspänningar kan försummas och att $\nu \geq 0$ (3p)

b: Visa att då $\nu = \frac{1}{2}$, så blir nedtryckningen $\delta = 0$ (2p)

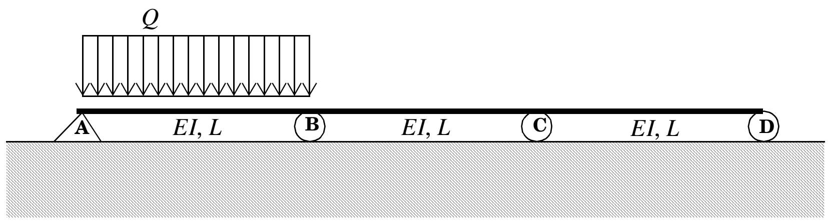


3.

En balk **ABCD** med böjstyvhet EI och längd $3L$ vilar på tre stöd, så att tre lika långa spann bildas. Det vänstra spannet, **AB**, belastas med en fördelad last med intensitet $q = \frac{Q}{L}$ (Q är kraftresultanten).

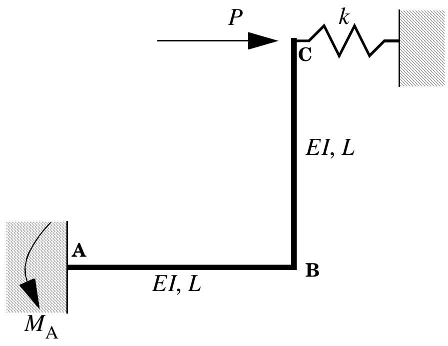
a: Beräkna det böjande momentet i balken vid de inre stöden **B** och **C**. (2p)

b: Beräkna det till beloppet största böjande momentet som uppträder i spannet **AB** och rita momentdiagrammet för hela balken. (3p)



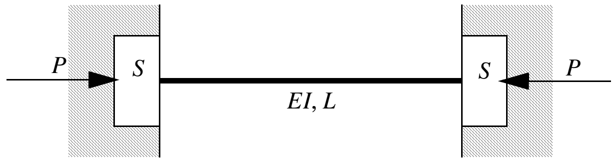
4.

En enkel ram består av en horisontell balk **AB** och en vertikal balk **BC**, enligt figuren. Båda delarna har längd L och böjstyvhet EI. Ramen är fast inspänd vid **A** och stöds av en horisontell fjäder med styvheten $k = \frac{EI}{4L^3}$ vid **C**. Bestäm det inspänningsmoment M_A som uppkommer då ramen belastas med en horisontell kraft P vid **C**. (5p)



5.

En balk med konstant böjstyvhet EI och längd L är elastiskt inspänd mellan två väggar. Inspänningsstyvheten är S, dvs om balken roterar en vinkel θ vid en infästning fås ett mothållande moment $S\theta$. Betrakta fallet att balken utsätts för en tryckande axialkraft $N = -P$

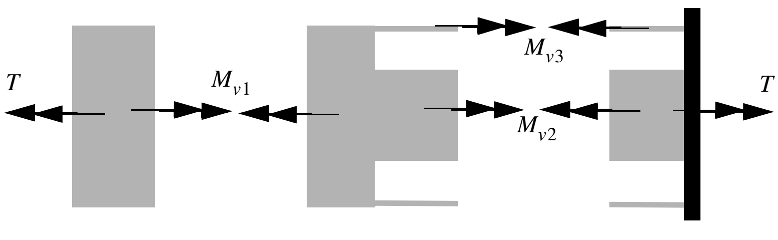


a: Ange, med motivation, en undre och undre gräns för axialkraften med avseende på elastisk instabilitet (1p)

b: Låt $k > 0$ vara ett reellt tal och sätt $S = k\frac{EI}{L}$; härled en knäckekvation, dvs en ekvation vars lägsta positiva rot ger kritisk axialkraft med avseende på stabilitet. (2p)

c: Bestäm styvheten $S = k\frac{EI}{L}$ (bestäm k) så att kritiska kraften blir samma som för Eulers 3e knäckningsfall. (2p)

Lösning 1: Vi måste bestämma snittmomenten i de olika delarna; snitta genom vänster och höger del:



Jämvikt för vänster och höger del ger

$$M_{v1} = T \tag{1}$$

respektive

$$M_{v2} + M_{v3} = T \tag{2}$$

Här är M_{v1} momentet i den vänstra halvan av konstruktionen medan M_{v2} är momentet i den centrala massiva axeln i högra delen; M_{v3} är momentet i det tunnväggiga röret.

Ytterligare (lineärt oberoende) jämviktsekvationer finns inte att tillgå; istället använder vi oss av kompatibilitetsvillkoret

$$\varphi_2 = \varphi_3 \tag{3}$$

dvs att vridningsvinkeln för den centrala axeln och det tunnväggiga röret måste vara lika. Hans Lundh ekv 6–11 och 6–6 ger $\varphi_2 = \dfrac{2M_{v2}L}{G\pi R^4}$ respektive $\varphi_3 = \dfrac{M_{v3}L}{G2\pi(2R)^3\left(\frac{R}{16}\right)} = \dfrac{M_{v3}L}{G\pi R^4}$. Insättning i (3) ger

$$2M_{v2} = M_{v3} \tag{4}$$

Ekv (2) och (4) ger $M_{v2} = \frac{T}{3}$ samt $M_{v3} = \frac{2T}{3}$

Hans Lundh ekv 6–19 ger oss nu det snittmoment som ger begynnande plasticering i någon massiv axel. För vänstra delen fås

$$M_{vs1} = T_s = \frac{\pi}{2\cdot 2R}(2R)^4\tau_s = 4\pi R^3\tau_s$$

För den centrala delen av höger del fås

$$M_{vs2} = \frac{T_s}{3} = \frac{\pi}{2\cdot R}R^4\tau_s = \frac{\pi R^3\tau_s}{2} \Rightarrow T_s = \frac{3\pi R^3\tau_s}{2}$$

För det tunnväggiga röret utnyttjar vi enklast Lundh ekv 6–4

$$\tau_s = \frac{M_{vs3}}{2\pi(2R)^2\left(\frac{R}{16}\right)} = \frac{2\cdot\frac{2T_s}{3}}{\pi R^3} \Rightarrow T_s = \frac{3\pi R^3\tau_s}{4}$$

Vi ser att den del som plasticerar först är det tunnväggiga röret; detta sker då $T = T_s = \dfrac{3\pi R^3\tau_s}{4}$

Lösning 2a: Om skjuvspänningarna försummas har vi trivialt att $\sigma_y = -p$. Lundh 10–7,9 ger

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \qquad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

Villkoren $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$ ger då ekvationerna

$$\sigma_x - \nu\sigma_z = -\nu p \qquad \sigma_z - \nu\sigma_x = -\nu p$$

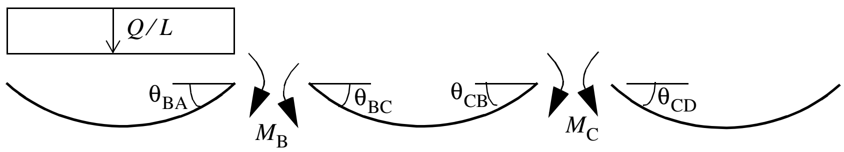
ur vilket vi löser $\sigma_x = \sigma_z = \dfrac{-\nu p}{1-\nu}$

Lösning 2b: Vi ska visa att $\delta = -\varepsilon_y h = 0$ då $\nu = 1/2$, dvs att $\varepsilon_y = 0$. Lundh 10–8 och spänningarna ovan ger

$$E\varepsilon_y = \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) = p\left(-1 + 2\nu\frac{\nu}{1-\nu}\right) = \frac{-p}{1-\nu}(1 - \nu - 2\nu^2)$$

som med $\nu = 1/2$ ger $\varepsilon_y = \frac{-2p}{E}\left(1 - \frac{1}{2} - 2\frac{1}{4}\right) = 0$, dvs $\delta = 0$

Lösning 3a: Strukturen är statiskt obestämd, så de eftefrågade momenten kan inte beräknas med enbart jämviktsvillkor. Snitta på ömse sidor de inre stöden och beräkna vinklarna mha elementarfall (formelsamling sid 9). Eftersom vi inte har något yttre moment verkande på balken, är snittmomentet kontinuerligt och alltså lika på ömse sidor ett snitt.



Man finner

$$\theta_{BA} = \frac{(Q/L)L^3}{24EI} - \frac{M_B L}{3EI} \qquad \theta_{BC} = -\frac{M_B L}{3EI} - \frac{M_C L}{6EI}$$

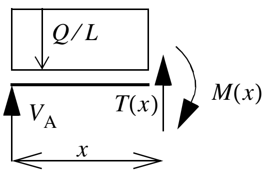
$$\theta_{CB} = -\frac{M_B L}{6EI} - \frac{M_C L}{3EI} \qquad \theta_{CD} = -\frac{M_C L}{3EI}$$

Kompatibilitetsvillkoren $\theta_{BA} + \theta_{BC} = 0$ och $\theta_{CB} + \theta_{CD} = 0$ ger

$$\frac{L}{EI}\left(\frac{QL}{24} - \frac{2M_B}{3} - \frac{M_C}{6}\right) = 0 \qquad \frac{-L}{EI}\left(\frac{M_B}{6} + \frac{2M_c}{3}\right) = 0$$

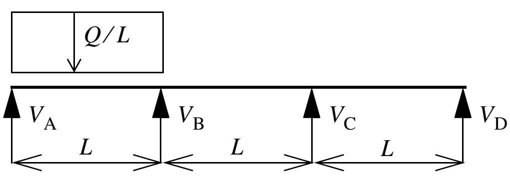
ur vilket $M_B = \frac{QL}{15}$ och $M_c = \frac{-QL}{60}$

Lösning 3b: Snitta på ett avstånd $0 < x < L$ från **A** och ställ upp momentjämvikt kring snittet: $M(x) + V_A x - \frac{Q}{L} \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$;



$$M(x) = QL\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 - V_A\frac{x}{L}\right) \tag{5}$$

Vi söker då stödkraften V_A. Kraftjämvikt för hela bärverket ger

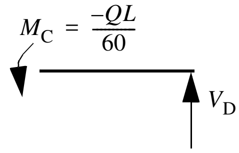


$$Q - (V_A + V_B + V_C + V_D) = 0 \tag{6}$$

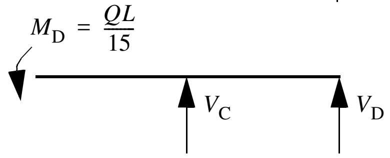
medan momentjämvikt kring **A** kräver

$$Q \cdot \frac{L}{2} - (V_B \cdot L + V_C \cdot 2L + V_D \cdot 3L) = 0 \tag{7}$$

Snitta nu vid **C** och ställ upp momentjämvikt för den högra delen



$$V_D \cdot L + \left(-\frac{QL}{60}\right) = 0 \tag{8}$$



För delen **BCD** får på samma sätt

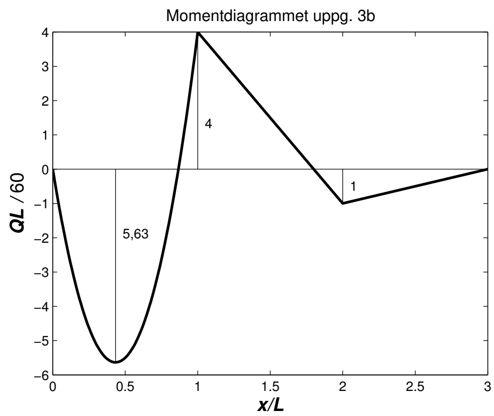
$$V_C \cdot L + V_D \cdot 2L + \frac{QL}{15} = 0 \tag{9}$$

Ur ekv. (6)–(9) finner vi $V_A = \frac{13Q}{30}$ (samt $V_B = \frac{13Q}{20}$, $V_C = \frac{-Q}{10}$ och $V_D = \frac{Q}{60}$); insättning i ekz. (5) ger snittmomentet i delen **AB**

$$M(x) = \frac{QL}{60}\left(30\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 26\frac{x}{L}\right)$$

Extremvärde ($\frac{dM}{dx} = 0$) fås för $\frac{x}{L} = \frac{13}{30}$: $M\left(\frac{13L}{30}\right) \approx 5{,}63 \cdot \frac{QL}{60}$.

I delen BCD varierar snittmomentet lineärt eftersom ingen belastning påförs här ($q = 0$ ger att $\frac{d^2M}{dx^2} = 0$ (Lundh ekv (7–2,3)). Vi kan nu rita momentdiagrammet:

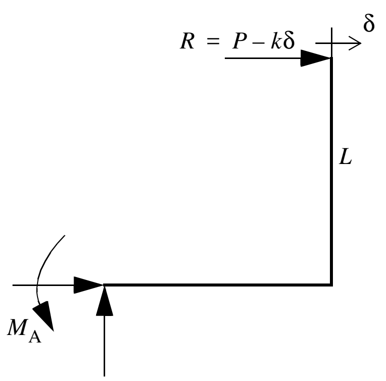


<u>Lösning 4:</u> Låt δ beteckna den horisontella förskjutningen vid **C**; kraftresultanten är då

$$R = P - k\delta \tag{10}$$

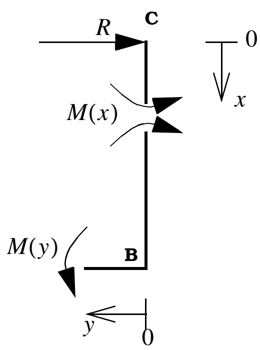
och momentjämvikt kring **A** ger

$$M_A = RL \tag{11}$$



Låt x vara en koordinat från C mot B och y vara en koordinat från B mot A. Snittmomenten i de två delarna är då

$$M(x) = Rx \qquad M(y) = RL$$



Förskjutningen δ kan nu beräknas med Castiglianos 2s sats (Lundh 15–98, 15–43). Om enbart böjdeformation beaktas, har vi

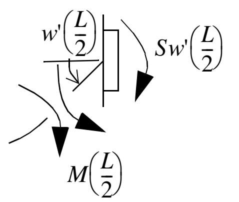
$$\delta = \frac{\partial W}{\partial R} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R}dx + \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R}dy = \frac{1}{EI}\left(\frac{RL^3}{3} + RL^3\right) = \frac{4RL^3}{3EI} \tag{12}$$

Med $k = \frac{EI}{4L^3}$ fås $R = \frac{3P}{4}$ ur ekv. (10) och (12); det sökta momentet fås nu ur (11): $M_A = \frac{3PL}{4}$

Lösning 5a: Med $S \to 0$ och $S \to \infty$ fås en vekare respektive styvare struktur, vilket ger en undre respektive övre gräns för kritisk last. Den undre gränsen svarar då mot Eulers 2a knäckningsfall, medan den övre svarar mot det 4e fallet: $\frac{\pi^2 EI}{L^2} < P_{kr} < \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$ (Lundh 8–27,48)

Lösning 5b: Lösningen till den styrande differentialekvationen är (Lundh 8–66)
$w(x) = A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx)$, där $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$. Om vi lägger origo i balkens mittpunkt har vi symmetrivillkoret $w(x) = w(-x)$, vilket kräver att $B = D = 0$. Vidare har vi att $w\left(\pm\frac{L}{2}\right) = 0$ så $A = -C\cos\left(\frac{nL}{2}\right)$. Vi har då

$$w(x) = C\left(\cos(nx) - \cos\left(\frac{nL}{2}\right)\right) \qquad \frac{dw}{dx} = -Cn\sin(nx) \qquad \frac{d^2w}{dx^2} = -Cn^2\cos(nx)$$



Ytterligare ett randvillkor hittar vi genom att betrakta momentjämvikt vid $x = \frac{L}{2}$ (eller $x = \frac{-L}{2}$): $M\left(\frac{L}{2}\right) - S\frac{dw}{dx}\bigg|_{x=\frac{L}{2}} = 0$. Med $S = k\frac{EI}{L}$ och $M = -EI\frac{d^2w}{dx^2}$ (Lundh 7–65) fås $\frac{d^2w}{dx^2}\bigg|_{x=\frac{L}{2}} + \frac{k}{L}\frac{dw}{dx}\bigg|_{x=\frac{L}{2}} = 0$. Insättning ger

$\frac{-CnL}{L^2\cos\left(\frac{nL}{2}\right)}\left(nL + k\tan\left(\frac{nL}{2}\right)\right) = 0$. Icke–triviala ($C \neq 0$) kräver alltså

$$nL + k\tan\left(\frac{nL}{2}\right) = 0 \tag{13}$$

Lösning 5c: Ur (13) får vi $k = \frac{-nL}{\tan\left(\frac{nL}{2}\right)}$. För Eulers 3e fall har vi (Lundh 8–38) $nL \approx 4{,}4934$, vilket ger

$k \approx 3{,}6$; $S = \frac{kEI}{L} \approx 3{,}6\frac{EI}{L}$