Institutionen för tillämpad mekanik, Chalmers tekniska högskola

Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA KF OCH F — MHA 081

16 AUGUSTI 2017

Tid och plats: 8.30—12.30 i M–huset. Lärare besöker salen ca 9.30 samt 11.30

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Studentlitteratur.
2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.
3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.
Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.
4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset, 17/8. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2017) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

För att få poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

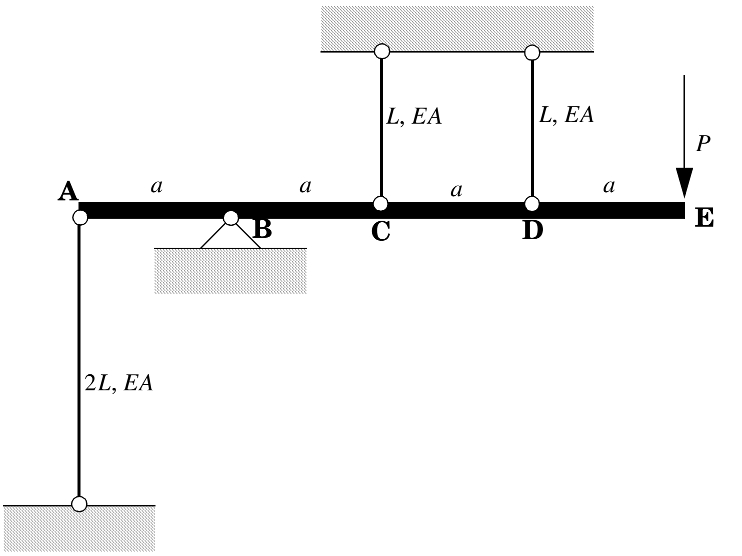
Resultatlista: Anslås 24/8 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 1/9.

Granskning: Måndag 28/8 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt torsdag 31/8 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i norra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

En stel bom **AE**, längd $4a$, är ledat infäst i **B** och hålls i horisontellt läge av tre stänger som fäster i **A**, **C** och **D**. Stängerna är tillvekade av ett lineärt elastiskt/ideal plastiskt material, elasticitetsmodul E och sträckgräns σ_s, och de har alla samma tvärsnittsyta A. En kraft P angriper vid **E** enligt figuren.

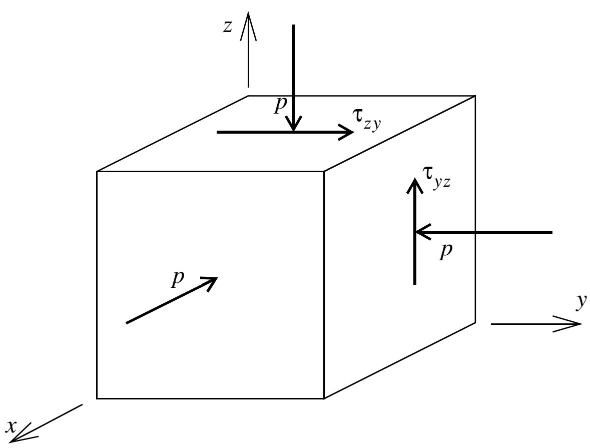


a: Beräkna den kraft $P = P_s$ som ger begynnande plasticering (4p)

b: Hur stor är då den vertikala stödkraften i **B**? (1p)

2.

En punkt i en elastisk kropp är utsatt för ett hydrostatiskt tryck p. Superponerat finns en skjuvspänning $\tau_{yz} > 0$, medan $\tau_{xy} = \tau_{zx} = 0$.

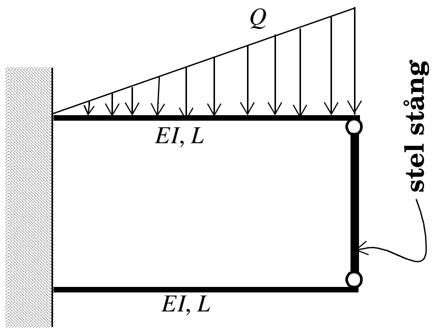


a: Beräkna effektivspänningarna enligt Trescas och von Mises hypoteser (3p)

b: Hur stor kan skjuvspänningen högst vara, om ingen dragspänning får uppkomma i punkten (2p)

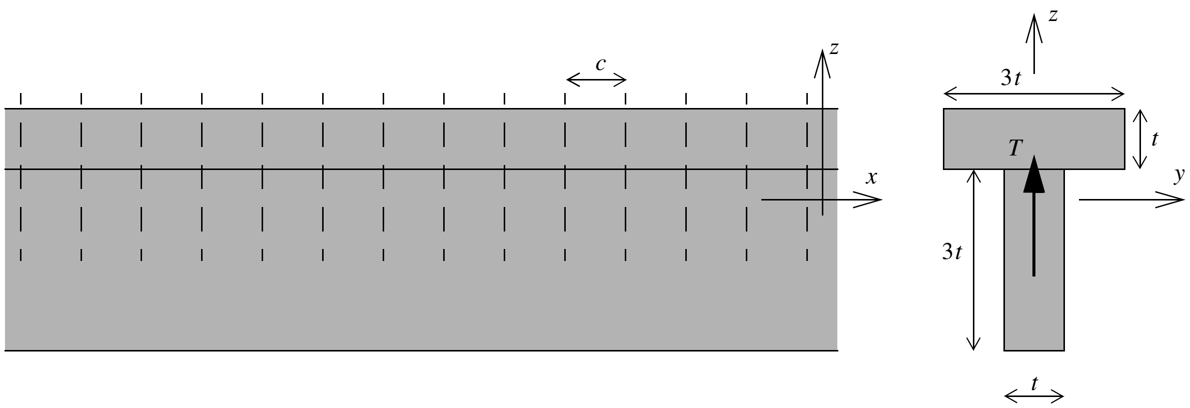
3.

Två lika konsolbalkar har längd L och böjstyvhet EI. Balkarnas fria ändar är sammanfogade med en stång som kan betraktas som stel (‘$EA = \infty$’). Beräkna stångkraften som uppkommer då den ena konsolen belastas med en fördelad last med lineärt varierande intensitet (kraft/längd) enligt figuren; Q betecknar kraftresultanten. (5p)



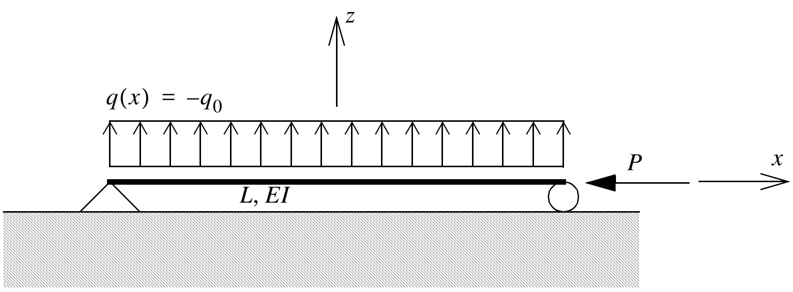
4.

Två brädor med tjocklek t och bredd $3t$ spikar ihop till en balk med enkelsymmetriskt T–tvärsnitt enligt figur nedan. Avståndet mellan spikarna i x–led (balken längsled) betecknas c. Bestäm största tillåtna c om tvärkraften är $T = 340\ \mathrm{N}$ och största tillåtna skjuvkraft i en spik är $120\ \mathrm{N}$ (5p)

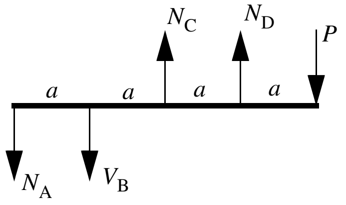


5.

En fritt upplagd balk med längd L och konstant böjstyvhet EI belastas av sin egentyngd $q(x) = -q_0$ (kraft/längd) och en tryckande axiell kraft P. Bestäm det böjande momentet i balken med hänsyn tagen till tryckkraftens inverkan. (5p)



Lösning 1a: Frilägg bommen. Kraftjämvikt ger

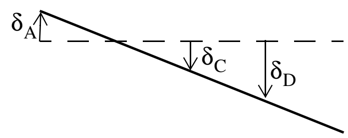


$$V_B = -N_A + N_C + N_D - P \tag{1}$$

Momentjämvikt kring **B** kräver att

$$N_A + N_C + 2N_D = 3P \tag{2}$$

Betrakta bommen i utböjt läge; sambanden mellan stångförlängningarna är $\delta_A = \delta_C$ samt $\delta_D = 2\delta_A$. Med kraft–förlängningssambandet $\delta_i = \dfrac{N_i L_i}{EA}$ (Lundh ekv 2–14) har vi då



$$N_C = 2N_A \qquad N_D = 4N_A \tag{3}$$

Ekv (2) och (3) ger

$$N_A = \frac{3P}{11} \qquad N_C = \frac{6P}{11} \qquad N_D = \frac{12P}{11} \tag{4}$$

Vi ser att stång D plasticerar först: $N_D = \dfrac{12P_s}{11} = \sigma_s A \Rightarrow P_s = \dfrac{11\sigma_s A}{12}$

Lösning 1b: Stångkrafterna (4) insatt i (1) ger $V_B = \dfrac{4P}{11}$; med $P = \dfrac{11\sigma_s A}{12}$ har vi då $V_B = \dfrac{\sigma_s A}{3}$

Lösning 2a: Vi har här att $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$, $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ och $\tau_{yz} > 0$. Effektivspänningen enligt von Mises hypotes fås direkt ut Lundh ekv 12–4: $\sigma_e = \sqrt{3}\tau_{yz}$

Tresca–spänningen, Lundh ekv 12–14, kräver att vi beräknar huvudspänningarna. Eftersom τ_{xy} och τ_{xz} båda är noll, är $\sigma_x = -p$ en huvudspänning. De andra 2 kan beräknas enligt Lundh 9–49

$$\sigma = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} = -p \pm \tau_{yz}$$

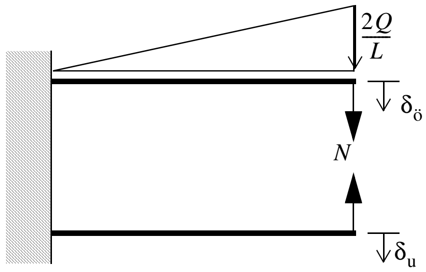
Huvudspänningarna är alltså (i storleksordning)

$$\sigma_1 = \tau_{yz} - p \qquad \sigma_2 = -p \qquad \sigma_3 = -\tau_{yz} - p$$

och effektivspänningen enligt Trescas hypotes $\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{yz}$

Lösning 2b: Största huvudspänningen måste vara icke–positiv dvs $\sigma_1 = \tau_{yz} - p \le 0$ — $\tau_{yz} \le p$

Lösning 3: Låt N beteckna den sökta stångkraften och $q_{\max} = \frac{2Q}{L}$ vara största lastintensiteten (kraft/längd). Konsoländarnas transversalförskjutningar kan beräknas med elementarfall (Formelsamling sid 10). För den övre konsolen fås (med $P_1 = N$, $W_1 = q_{\max}$ och $W_2 = -q_{\max}$)



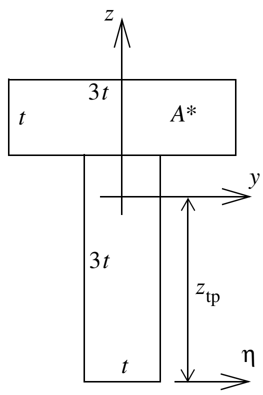
$$\delta_ö = \frac{NL^3}{3EI} + \frac{q_{\max}L^4}{8EI} - \frac{q_{\max}L^4}{30EI} = \frac{L^3}{EI}\left(\frac{N}{3} + \frac{11Q}{60}\right)$$

medan den undre konsolens förskjutning blir

$$\delta_u = \frac{-NL^3}{3EI}$$

Villkoret $\delta_ö = \delta_u$ ger nu att $N = \frac{-11Q}{40}$ (dvs en tryckande kraft)

Lösning 4: Vi behöver beräkna skjuvspänningen τ i livets övergång till flänsen; den beräknas enligt Lundh ekv 7–48). Bestäm först det sammansatta tvärsnittets yt–tyngdpunkt. Statiska momentet map. en hjälpaxel η är



$$S_\eta = Az_{tp} = 3t^2 \cdot \left(3t + \frac{t}{2}\right) + 3t^2 \cdot \frac{3t}{2} = 15t^3$$

där tvärsnitsarean är $A = 6t^2$; vi finner $z_{tp} = \frac{15t^3}{A} = \frac{5t}{2}$.

Flänsarean är $A^* = 3t^2$ och dess statiska moment map. y–axeln genom tyngdpunkten är

$$S_{A^*} = A^* \cdot \left(3t + \frac{t}{2} - z_{tp}\right) = 3t^3$$

Tvärsnittets areatröghetsmoment map. y–axeln fås beräknas med Steiners sats (Lundh ekv 7–42)

$$I_y = \frac{3t \cdot t^3}{12} + 3t^2 \cdot \left(3t + \frac{t}{2} - z_{tp}\right)^2 + \frac{t \cdot (3t)^3}{12} + 3t^2 \cdot \left(z_{tp} - \frac{3t}{2}\right)^2 = \frac{17t^4}{2}$$

(De två första termerna i mellanledet är bidraget från flänsen).
Den sökta skjuvspänningen blir nu

$$\tau = \frac{TS_{A^*}}{I_y t} = \frac{6T}{17t^2}$$

Skjuvkraften som ska tas upp längs en längd c i x–led är alltså $F = \tau \cdot ct = \frac{6Tc}{17t}$. Med $T = 340\ \mathrm{N}$ och $F \le 120\ \mathrm{N}$ finner man $c \le t$

Lösning 5: Momentet kan beräknas som $M(x) = -EI\frac{d^2w}{dx^2}$ (Lundh 7–65). Transversalförskjutningen $w(x)$ är lösningen till $w^{iv} + n^2 w'' = \frac{-q_0}{EI}$ (Lundh 8–63), där $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$. Som partikulärlösning ansätter vi $w = ax^2$ och efter insättning i differentialekvationen finner man $a = \frac{-q_0}{2n^2 EI}$; homogenlösningen ges av Lundh 8–66. Vi har då

$$w(x) = \frac{-q_0 x^2}{2n^2 EI} + A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx)$$

Med origo i balkens mittpunkt har vi symmetrivillkoret $w(x) = w(-x)$, så $B = D = 0$. Med detta insatt får vi efter att derivering

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{q_0}{n^2 EI} - Cn^2\cos(nx)$$

Snittmomentet är noll vid upplagen så vi måste ha att $\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x = \pm\frac{L}{2}} = 0$; detta ger att $C = \frac{-q_0}{n^4 EI\cos\left(\frac{nL}{2}\right)}$.

Vi har då $M(x) = -EI\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{q_0}{n^2} + Cn^2 EI\cos(nx) = \frac{q_0}{n^2}\left(1 - \frac{\cos(nx)}{\cos\left(\frac{nL}{2}\right)}\right)$