TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA KF OCH F — MHA 081

2 JUNI 2017

Lösningar

Tid och plats: 14.00—18.00 i M–huset. Lärare besöker salen ca 15.00 samt 16.30

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Studentlitteratur.

2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset, 7/6. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2017) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

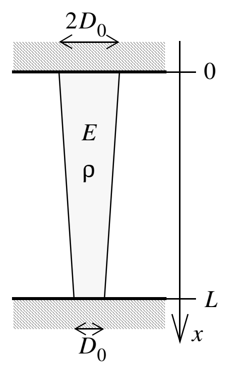
För att få poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

Resultatlista: Anslås **senast** 12/6 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 16/6.

Granskning: Tisdag 13/6 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt tisdag 29/8 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i norra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.



En pelare med ett homogent cirkulärt tvärsnitt har i spänningsfritt tillstånd längden L. Tvärsnittets diameter varierar lineärt från $2D_0$ vid övre infästningen, till D_0 nedre änden. Materialet är lineärt elastiskt med elasticitets modul E och densitet ρ. Pelaren monteras vertikalt mellan två stela plan på avståndet L från varandra enligt figuren. Beräkna normalkraften $N(x)$ i pelaren. (5p)

2.

Spänningarna i en elastisk kropp har i en punkt beräknats till

$$\sigma_x = -90\ \text{MPa} \qquad \sigma_y = -140\ \text{MPa} \qquad \sigma_z = -90\ \text{MPa}$$
$$\tau_{xy} = 40\ \text{MPa} \qquad \tau_{yz} = 40\ \text{MPa} \qquad \tau_{xz} = -10\ \text{MPa}$$

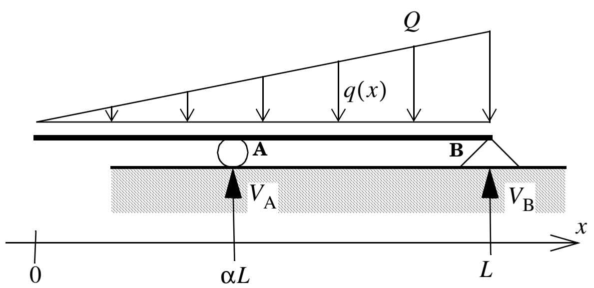
((x, y, z) är ett Cartesiskt högersystem).

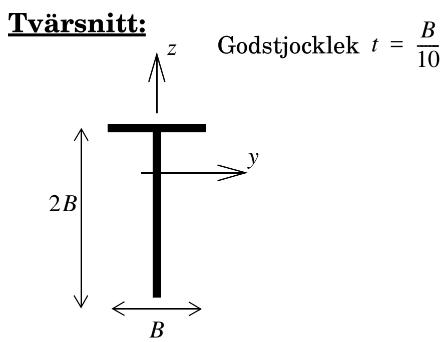
a: Bestäm normal– och skjuvspänning på ytan, genom punkten, med normalen $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$ (2p)

b: Bestäm det största trycket i punkten (3p)

3.

En balk med längd L och böjstyvhet EI belastas med en utbredd last $q(x)$ (kraft/längd); q varierar lineärt från 0 i vänster ände till ett maximum i högra änden. Kraftresultanten Q antas känd. En rullagring **A** är placerad på avståndet αL från vänster ände och längst till höger är balken fixerad till ett fast stöd **B**.





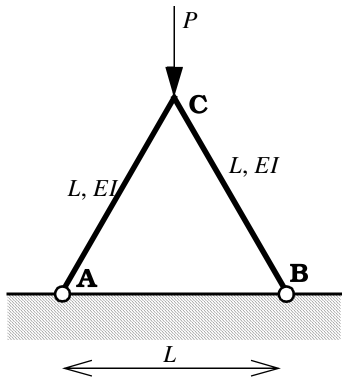
a: Bestäm α ($0 \le \alpha < 1$) så att de två vertikala stödreaktionerna V_A och V_B blir lika stora. (1p)

b: Beräkna det (till beloppet) största böjande momentet i balken för fallet $\alpha = \frac{1}{3}$ (2p)

c: Antag att balken har ett enkelsymmetriskt T–tvärsnitt enligt figuren; bredden är B, höjden $2B$ och godstjockleken $t = \frac{B}{10}$ (tunnväggighet kan användas). Beräkna den till beloppet största normalspänningen σ i ett snitt där det böjande momentet är $M = \frac{QL}{6}(1 - \sqrt{2})$ — ange om detta är en tryck– eller dragspänning, samt var i snittet den uppträder. (2p)

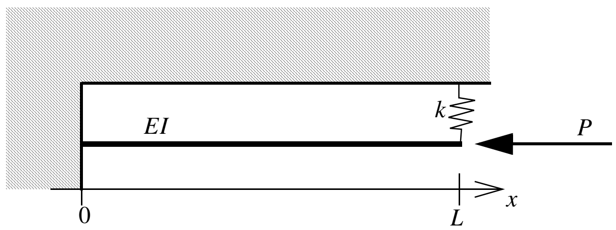
4.

Ramen **ACB** består av två balkar som båda har längd L och böjstyvhet EI. Den är momentfritt lagrad i fasta stöd vid **A** och **B**, där avståndet mellan stödpunkterna är L (**ABC** är en liksidig triangel). Bestäm de horisontella stödreaktionerna som uppkommer då ramen belastas med en vertikal kraft P vid **C**. (5p)



5.

En lineärt elastisk balk med konstant böjstyvhet EI och längd L belastas med en axiellt tryckande kraft P. Balken är fast inspänd i sin vänstra ände, medan den på sin andra sida i transversal led stöds av en lineär fjäder med styvhet k (se figur).



a: Bestäm en övre och undre gräns för den kritiska lasten P_{kr} med avseende på elastisk stabilitet. (1p)

b: Sätt $k = \pi^2 \dfrac{EI}{L^3}$ och härled en knäckekvation, dvs en ekvation vars lägsta positiva rot ger kritisk last. (4p)

Lösning 1: Vi beräknar den axiella förskjutningen $u(x)$ genom att lösa stångens differentialekvation och får sedan normalkraften som $N(x) = EA\dfrac{du}{dx}$ (Formelsamlingen sid 2; Lundh ekv 3–6, 8).

Med $D(x) = D_0\left(2 - \frac{x}{L}\right)$ har vi tvärsnittsytan $A(x) = \dfrac{\pi D_0^2}{4}\left(2 - \frac{x}{L}\right)^2$, så den styrande differentialekvationen blir

$$-\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right] = \frac{\rho g \pi D_0^2}{4}\left(2 - \frac{x}{L}\right)^2$$

Integration 2 ggr ger $u = C_2 + \dfrac{4C_1 L}{\pi E D_0^2\left(2 - \frac{x}{L}\right)} - \dfrac{\rho g L^2}{6E}\left(2 - \frac{x}{L}\right)^2$, där integrationskonstanterna C_1 och C_2

kan bestämmas ur randvillkoren $u(0) = 0$ samt $u(L) = 0$. Man finner $C_1 = \dfrac{-\rho g \pi L D_0^2}{4}$ och sedan

$$N(x) = EA\frac{du}{dx} = C_1 + \frac{\rho g \pi L D_0^2}{12}\left(2 - \frac{x}{L}\right)^3 = \underline{\frac{\rho g \pi L D_0^2}{12}\left[\left(2 - \frac{x}{L}\right)^3 - 3\right]}$$

Lösning 2a: Spänningstensorn (Lundh ekv 9–11) är $S = \begin{bmatrix} -90 & 40 & -10 \\ 40 & -140 & 40 \\ -10 & 40 & -90 \end{bmatrix}$ MPa . Spänningsvektorn på ytan med normalen $n = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ är då (Lundh ekv (9–28) $s = Sn = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -80 \\ 0 \\ 80 \end{bmatrix}$ MPa . Normalspänningen på ytan får som projektionen av s på normalen (Lund 9–29): $\sigma = n^T s = -80$ MPa

Skjuvspänningen fås nu ur Pythagoras sats (Lundh 9–31): $\tau = \sqrt{|s|^2 - \sigma^2} = 0$

(Notera att $\sigma = -80$ MPa är en huvudspänning, eftersom skjuvspänningen på ytan är noll).

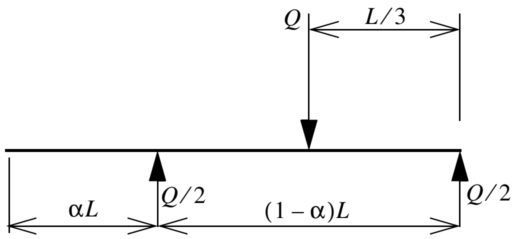
Lösning 2b: Vi söker den minsta (största negativa) huvudspänningen; huvudspänningarna fås som egenvärdena till spänningstensorn. $\det(S - \sigma I) = 0$ ger $\sigma^3 + 320\sigma^2 + 30.000\sigma + 864.000 = 0$ (där alla numeriska värden satts in i MPa. Vi vet att en rot är $\sigma = -80$ MPa — faktorisering ger

$$(\sigma + 80)(\sigma^2 + 240\sigma + 10.800) = 0$$

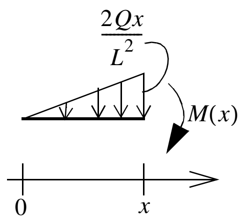
Nollställena till andragradspolynomet är $\sigma = \left(\frac{-240}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-240}{2}\right)^2 - 10.800}\right)$ MPa $= \begin{cases} -60 \text{ MPa} \\ -180 \text{ MPa} \end{cases}$

Största trycket i punkten är alltså 180 MPa

Lösning 3a: Vi har att $q(x) = \frac{x}{L} q_{max}$, där $q_{max} = q(L)$. Villkoret $Q = \int_0^L q dx$ ger att $q_{max} = \frac{2Q}{L}$, så vi har att $q(x) = \frac{2Qx}{L^2}$.

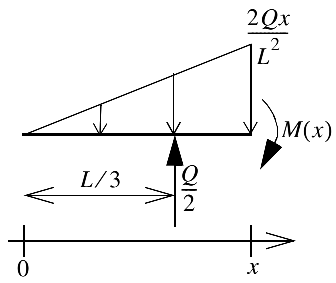


För kraftjämvikt krävs $V_A + V_B = Q$, så villkoret $V_A = V_B$ ger $V_A = V_B = \frac{Q}{2}$. Frilägg nu strukturen med resultanten till den utbredda lasten placerad i fördelningens tyngdpunkt (figur brevid). Momentjämvikt kring högra stödet (**B**) kräver att $\frac{Q}{2} \cdot (1 - \alpha)L - Q \cdot \frac{L}{3} = 0$. Vi finner då $\alpha = 1/3$



Lösning 3b: Snitta någonstans i intervallet $0 < x < L/3$ och betrakta momentjämvikt för den vänstra (enklast) utsnittade biten (i figuren är inte tvärkraften utritad): jämvikt kring x ger $M(x) - \frac{2Qx}{L^2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 0$; $M(x) = \frac{Qx^3}{3L^2}$. I intervallet är det böjande momentet strängt växande från $M(0) = 0$ till ett max $M\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{QL}{81}$

Snitta nu i intervallet $L/3 < x < L$ och betrakta momentjämvikt kring

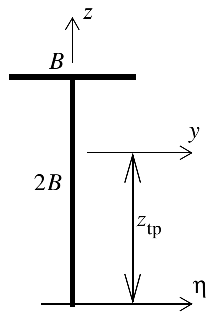


snittet: $M(x) - \frac{2Qx}{L^2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} + \frac{Q}{2} \cdot \left(x - \frac{L}{3}\right) = 0$; $M(x) = \frac{Qx^3}{3L^2} - \frac{Qx}{2} + \frac{QL}{6}$.

Vi har som väntat $M\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{QL}{81}$ och $M(L) = 0$. För att hitta lokala extremvärden i intervallet sätter vi $\frac{dM}{dx} = 0$; vi hittar punkten $\frac{x}{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

och $M\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right) = \frac{(1-\sqrt{2})QL}{6}$ som är det till beloppet största böjande momentet. $|M|_{\max} = \frac{(\sqrt{2}-1)QL}{6}$

Lösning 3c: Den sökta spänningen beräknas enligt Lundh 7–26. Vi behöver då beräkna areatröghetsmomentet $I = I_y$ med avseende på en y–axel, ortogonal mot lastriktningen, genom tvärsnittets yt–tyngdpunkt. Vi bestämmer först tyngdpunktens läge z_{tp} relativt tvärsnittets underkant (figur). Statiskt moment med avseende på en hjälpaxel η ger $S_\eta = z_{\text{tp}} \cdot A = 2B \cdot Bt + B \cdot 2Bt$, där $A = 3Bt$ är tvärsnittsytan. Vi finner $z_{\text{tp}} = \frac{4B}{3}$.

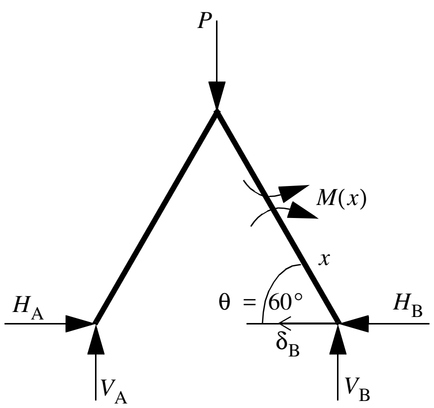


Areatröghetsmomentet fås nu med Steiners sats (Lundh 7–42):

$I_y = \frac{Bt^3}{12} + Bt \cdot (2B - z_{\text{tp}})^2 + \frac{t(2B)^3}{12} + 2Bt \cdot (z_{\text{tp}} - B)^2$ (de två första termeran är flänsens bidrag, de andra två är bidraget från livet). Försummas termen som är kubisk i t har vi $I_y = \frac{2B^4}{15}$

Vi har då (Lundh 7–26) $\sigma = \frac{Mz}{I_y} = \frac{5QL(1-\sqrt{2})z}{4B^4}$. Den till beloppet största spänningen fås för den till beloppet största z koordinaten i tvärsnittet: $\sigma(-z_{\text{tp}}) = \frac{5(\sqrt{2}-1)QL}{3B^3}$ — en dragspänning ($\sigma > 0$) i tvärsnittets underkant ($z = -z_{\text{tp}}$)

Lösning 4: Frilägg strukturen; av symmetriskäl inses att $V_{\text{A}} = V_{\text{B}} = \frac{P}{2}$ (alternaivt erhålls resultatet med vertikal kraftjämvikt samt momentjämvikt). Horisontell jämvikt visar att $H_{\text{A}} = H_{\text{B}}$.



Låt x vara en koordinat från B mot C och snitta vid godtyckligt x. Snittmomentet blir $M(x) = V_{\text{B}} x \cos\theta - H_{\text{B}} x \sin\theta$. Förskjutningen δ_{B} kan då beräknas med Castiglianos 2a sats (Lundh 15–96): $\delta_{\text{B}} = \frac{\partial W_i}{\partial H_{\text{B}}}$, där $W_i = 2\int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$ (Lundh 15–52, med enbart böjdeformation beaktad). Med villkoret $\delta_{\text{B}} = 0$ har vi då

$$\frac{\partial}{\partial H_B}\left[\int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx\right] = \int_0^L \frac{\partial M}{\partial H_B}\frac{\partial}{\partial M}\left[\frac{M^2}{2EI}\right]dx = \frac{1}{EI}\int_0^L M\frac{\partial M}{\partial H_B}dx = 0$$

$$\int_0^L (V_B x\cos\theta - H_B x\sin\theta)(-x\sin\theta)dx = 0$$

Integration ger $\frac{H_B L^3(\sin\theta)^2}{3} - \frac{V_B L^3\cos\theta\sin\theta}{3} = 0$, dvs $H_B = \frac{V_B}{\tan\theta}$. Med $V_B = \frac{P}{2}$ och $\tan\theta = \sqrt{3}$ har vi då

$H_A = H_B = \frac{P}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}29P$

Lösning 5a: Med $k = 0$ respektive $k \to \infty$ har vi Eulers 1a respektive 3e knäckfall. Då k är ändlig måste kritisk last ligga mellan dessa: $\frac{\pi^2 EI}{4L^2} < P_{kr} < \frac{2{,}05\pi^2 EI}{L^2}$ (alt, med $nL = \sqrt{\frac{P_{kr}}{EI}}L$, $\frac{\pi}{2} < nL < 1{,}43\pi$)

Lösning 5b: Lösningen till den styrande differentialekvationen är (Lundh 8–66)

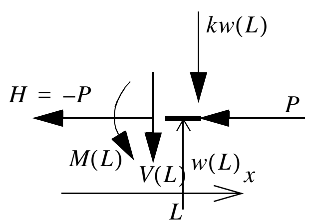
$$w(x) = A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx) \tag{1}$$

där $n^2 = \frac{P}{EI}$. Vid $x = 0$ har vi trivialt randvillkoren

$$w(0) = 0 \qquad w'(0) = 0 \tag{2}$$

men vid $x = L$ är förskjutning och rotation obekanta; snitta ut en tunn lamell vid $x = L$ och sök randvillkor med jämvikt. Momentjämvikt ger att $M(L) = 0$ och eftersom $M = -EIw''$ har vi då

$$w''(L) = 0 \tag{3}$$



Kraftjämvikt kräver att $V(L) + kw(L) = 0$. Vi har (Lundh 8–59) $V = T + Nw'$, där $N \approx H = -P$ och $T = -EIw'''$ (Lundh 8–62), så ekvationen kan skrivas $-EIw'''(L) - Pw'(L) + kw(L) = 0$; efter division med $-EI$ fås det 4e randvillkoret

$$w'''(L) + n^2 w'(L) - \frac{\pi^2}{L^3}w(L) = 0 \tag{4}$$

där vi utnyttjat att $\frac{k}{EI} = \frac{\pi^2}{L^3}$

Ekvationerna (2) och (3) insatta i (1) ger $B = -Dn$ och $A = -C = D\tan(nL)$. Ekv (1) kan då skrivas

$$w(x) = D(\tan(nL) - nx - \tan(nL)\cos(nx) + \sin(nx))$$

Deriveringar ger

$$w'(x) = D(-n + n\tan(nL)\sin(nx) + n\cos(nx))$$
$$w'''(x) = D(-n^3\tan(nL)\sin(nx) - n^3\cos(nx))$$

Ekvation (4) ger då $\frac{D}{L^3}(-(nL)^3 - \pi^2\tan(nL) + \pi^2 nL) = 0$. Med $D = 0$ fås den triviala lösningen $w \equiv 0$.

Icke–triviala lösningar kräver att uttrycket inom parentesen är noll, så vi har knäckekvationen

$$\underline{nL(\pi^2 - (nL)^2) - \pi^2\tan(nL) = 0}$$

(Lägsta positiva roten är $nL = \pi$, så med $k = \pi^2\frac{EI}{L^3}$ fås samma kritiska last som för Eulers 2a

knäckfall: $P_{\mathrm{kr}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$)