TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA KF OCH F — MHA 081
7 OKTOBER 2016

Lösningar

Tid och plats: 8.30—12.30 i M–huset. Lärare besöker salen ca 9.30 samt 11.30

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.

2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset, 10/10. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2016) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

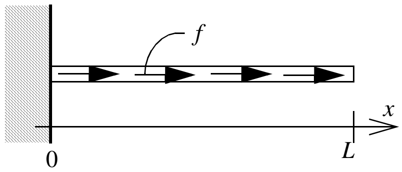
För att få poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

Resultatlista: Anslås 17/10 2016 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 21/10.

Granskning: Onsdag 19/10 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt torsdag 20/10 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i norra trapphuset, nya M–huset).

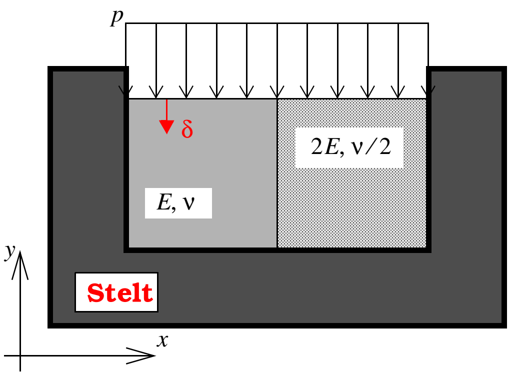
Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.



En stång tillvekad av ett lineärt elastiskt material, elasticitetsmodul E, har längd L och är fixerad i sin vänstra ände. Stången belastas med en friktionslast med konstant intensitet (kraft/längd) f utmed hela sin längd. Bestäm stångens tvärsnittsarea $A(x)$ så att spänningen $\sigma(x)$ varierar lineärt mellan $\sigma(0) = \frac{fL}{A_0}$ vid inspänningen och $\sigma(L) = 0$ vid den fria änden. Här är A_0 tvärsnittsarean vid $x = 0$ (5p)

2.



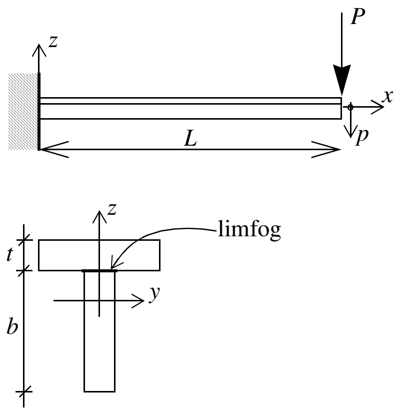
Två kuber med kantlängd h passar i obelastat tillstånd exakt in i en stel ränna. De är tillverkade av lineärt elastiska material med elasticitetsmoduler och tvärkontraktionstal E och ν, respektive $2E$ och $\frac{\nu}{2}$.

Kuberna belastas med ett vertikalt tryck p och är fria att utvidgas i z–led (ut ur papprets plan). Friktion i alla kontaktytor kan försummas.

a: Bestäm kontaktrycket mot sidoväggarna (3p)

b: Beräkna hur mycket, δ, den vänstra kuben trycks ihop (2p)

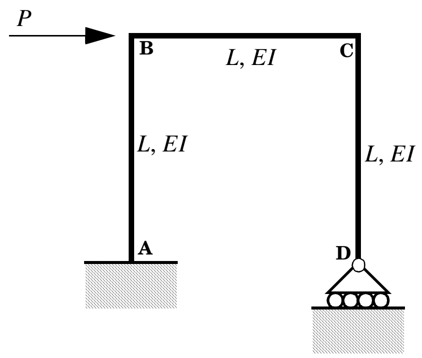
3.



En konsolbalk med längden $L = 1\ \mathrm{m}$ har tillverkats av två brädor som båda har tjockleken $t = 25\ \mathrm{mm}$ och bredden $b = 100\ \mathrm{mm}$. Brädorna har limmats ihop till ett enkelsymmetriskt T–tvärsnitt. Materialets elasticitetsmodul är $E = 12\ \mathrm{GPa}$ och tillåten skjuvspänning i limfogen är $\tau_{\mathrm{till}} = 5\ \mathrm{MPa}$. Hur långt, p, kan konsoländen tryckas ner utan att den tillåtna skjuvspänningen överskrids? (5p)

4.

Ramen **ABCD** består av tre balkar som alla har längd L och böjstyvhet EI. Den är fast inspänd vid **A**; vid **D** är den rullagrad på sådant sätt att vertikalförskjutning är förhindrad. En horisontell kraft P angriper vi hörnet **B**. Beräkna samtliga stödreaktioner som uppkommer vid **A** och **D**. (5p)

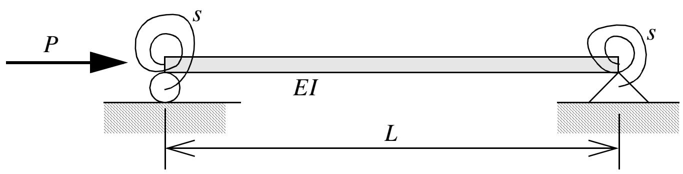


5.

En lineärt elastisk balk med böjstyvheten EI och längden L är elastiskt inspänd med styvheten $s = 2EI/L$ i båda ändar, dvs sambandet mellan infästningsmomentet M_{in} och ändens rotation θ är $M_{\text{in}} = s\theta$. Balken belastas med en axiellt tryckande kraft P enligt figuren.

a: Bestäm en övre och undre gräns för elastisk stabilitet (knäcklasten) (1p)

b: Härled knäckekvationen för balken, dvs den ekvation vars lösning ger det kritiska värdet på P (4p)

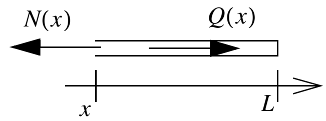


Lösning 1: Vi har givet att

$$\sigma(x) = \frac{fL}{A_0}\left(1 - \frac{x}{L}\right) \tag{1}$$

och stångens differentialekvation $-\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right] = f$ (formelsamling sid 2 eller Lundh ekv 3–7). Vi har också att $\sigma = E\varepsilon = E\frac{du}{dx}$, så vi får $-\frac{d}{dx}[\sigma A] = f$. Insättning av $\sigma(x)$ enligt (1) och utveckling ger då $\frac{dA}{dx} + A\left(\frac{1}{x-L}\right) = \frac{A_0}{x-L}$. Man finner lösningen (se t.ex Beta avsnitt 9.1) $A(x) = \frac{A_0 x + C}{x-L}$. Integrationskonstanten C bestäms av villkoret $A(0) = A_0$: $C = -A_0 L$. Alltså fås $A(x) = A_0$ (konstant)

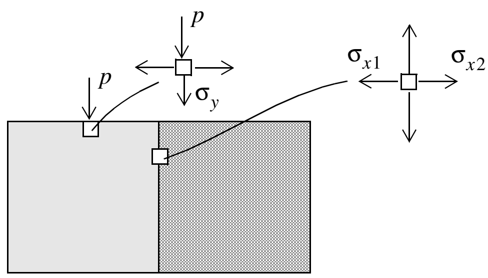
Alternativt: Konstruktionen är statiskt bestämd, så vi kan beräkna snittkrafter med enbart jämvikt. Snitta vid ett godtyckligt x; resultanten av den yttre belastningen på delen till höger om snittet är



$Q = \int_x^L f dx = f(L-x)$. Jämvikt kräver då normalkraften $N(x) = f(L-x)$, så spänningen blir

$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} = \frac{fL}{A(x)}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$; jämförelse med den givna spänningsfunktionen, ekv (1), ger att $A(x) = A_0$

Lösning 2a: I lösningen använder vi subskript 1 och 2 för den vänstra respektive högra kuben, närhelst det är nödvändigt att skilja på någon kvantitet. Jämvikt ger att $\sigma_y = -p$ (i båda kuberna) och att de horisontella normalspänningarna måste uppfylla $\sigma_{x1} = \sigma_{x2}$; de senare betecknas hädanefter med σ_x. Fri expansion i z–led ger att $\sigma_z = 0$. Vi kan nu teckna normaltöjningen i x–led i de båda kuberna: Lundh ekv 10–7 ger



$$\varepsilon_{x1} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) = \frac{1}{E}(\sigma_x + \nu p)$$

$$\varepsilon_{x2} = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right) = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_x}{2} + \frac{\nu p}{4}\right)$$

Totala utvidningen i x–led måste vara noll (kompatibilitet):

$$h(\varepsilon_{x1} + \varepsilon_{x2}) = 0 \Rightarrow \frac{3\sigma_x}{2} + \frac{5\nu p}{4} = 0 \Rightarrow \sigma_x = \frac{-5\nu p}{6}$$

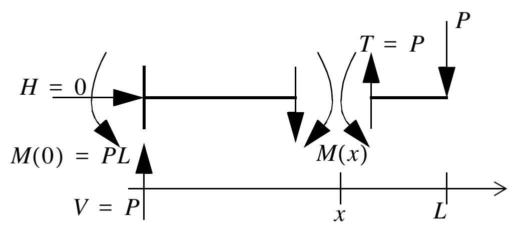
Kontakttrycket mot sidoväggarna är alltså $-\sigma_x = \frac{5\nu p}{6}$

Lösning 2b: Den vertikala normaltöjningen i den vänstra kuben blir (Lundh ekv 10–8)

$$\varepsilon_{y1} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) = \frac{1}{E}\left(-p - \nu\left(\frac{-5\nu p}{6} + 0\right)\right) = \frac{-p}{E}\left(1 - \frac{5\nu^2}{6}\right)$$

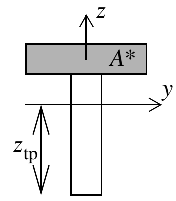
så vi får $\delta = -\varepsilon_{y1} h = \frac{ph}{6E}(6 - 5\nu^2)$

Lösning 3: Vi söker skjuvspänningen i limfogen, dvs i övergången mellan liv och fläns. Denna kan beräknas som (Lundh ekv 7–48) $\tau = \frac{TS_{A^*}}{It}$. Här är tvärkraften $T = P$ konstant längs hela konsolen. Sambandet mellan P och p hämtas enklast ur elementarfall; formelsamlingen sid 10 ger $p = \frac{PL^3}{3EI}$, så $T = P = \frac{3EI}{L^3}p$. Insättning ger $\tau = \frac{3ES_{A^*}}{tL^3}p$, så



$$p_{\text{till}} = \frac{\tau_{\text{till}} t L^3}{3ES_{A^*}} \tag{2}$$

För att beräkna det statiska momentet, av den utsnittade biten, med avseende på tyngdpunktsaxeln ortogonalt tvärkraften, måste vi hitta tyngdpunktens läge. Statiskt moment med avseende på en horisontell axel genom tvärsnittets underkant ger

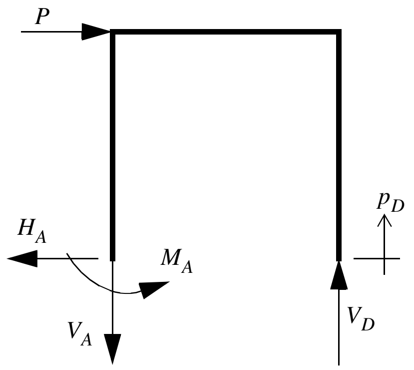


$$z_{\text{tp}}A = (25 \cdot 100\ \text{mm}^2) \cdot \left(100 + \frac{25}{2}\right)\ \text{mm} + (25 \cdot 100\ \text{mm}^2) \cdot \frac{100\ \text{mm}}{2}$$

där $A = 2 \cdot (25 \cdot 100\ \text{mm}^2)$ är tvärsnittsarean; vi finner $z_{\text{tp}} = 81{,}25\ \text{mm}$. Vi får då

$S_{A^*} = \left(\left(100 + \frac{25}{2}\right)\text{mm} - z_{\text{tp}}\right) \cdot A^*$, där $A^* = 25 \cdot 100\ \text{mm}^2$ är den utsnittade areans storlek; vi får

$S_{A^*} = 78{,}125 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3$. Insättning i ekv (3) ger tillsammans med givna data att $p_{\text{till}} \approx 44\ \text{mm}$



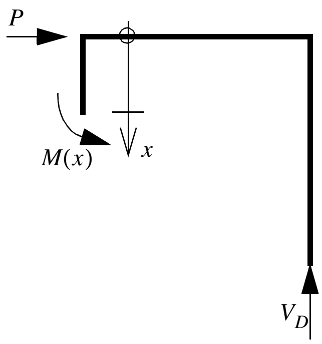
<u>Lösning 4:</u> Frilägg ramen och inför samtliga krafter och moment enligt figuren. Kraft– och momentjämvikt ger då

$$V_A - V_D = 0 \qquad P - H_A = 0 \qquad M_A - PL + V_D L = 0 \tag{3}$$

Vi har alltså 3 obekanta men bara 3 jämviktsekvationer. För att få ytterligare ett samband kan vi beräkna den vertikala förskjutningen p_D av punkten **D**; villkoret $p_D = 0$ ger en extra ekvation som behövs. Vi använder oss här av Castiglianos 2a sats, Lundh ekv 15–96: $p_D = \frac{\partial W}{\partial V_D}$ där (Lundh 15–52)

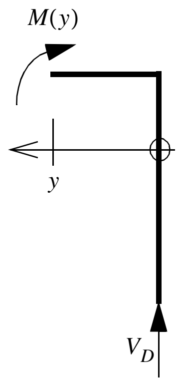
$W = \int_s \frac{M^2}{2EI} ds$ om bara böjdeformation beaktas; koordinaten s går längs hela bärverket. Vi får

$$p_D = \frac{\partial}{\partial V_D}\int_s \frac{M^2}{2EI} ds = \int_s \frac{\partial M}{\partial V_D}\frac{\partial}{\partial M}\left[\frac{M^2}{2EI}\right] ds = \int_s \frac{\partial M}{\partial V_D}\frac{M}{EI} ds \tag{4}$$



Vi söker nu det böjande momentet M längs hela ramen. Snitta genom delan **AB**, på ett godtyckligt avstånd x från **B**. (I figuren ör varken tvärkraft eller normalkraft i snittet utritade); momentjämvikt kring snittet ger

$$M(x) = Px - V_D L \qquad \frac{\partial M}{\partial V_D} = -L \tag{5}$$



Momentjämvikt för att snitt genom delen **BC**, på ett godtyckligt avstånd y från **C**, ger (återigen är varken tvär– och normalkraft utritade)

$$M(y) = V_D y \qquad \frac{\partial M}{\partial V_D} = y \tag{6}$$

I delen CD, slutligen, är det böjande momentet noll; enda snittstorheten är en tryckande normalkraft $N = -V_D$. Insättning av (5) och (6) i (4) ger då

$$p_D = \int_0^L \frac{V_D L^2 - PLx}{EI} dx + \int_0^L \frac{V_D y^2}{EI} dy = \frac{L^3}{EI}\left(\frac{4V_D}{3} - \frac{P}{2}\right)$$

Villkoret $p_D = 0$ ger alltså

$$V_D = \frac{3P}{8} \tag{7}$$

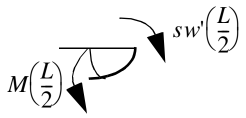
Ur (3) och (7) finner vi $H_A = P \qquad V_A = V_D = \frac{3P}{8} \qquad M_A = \frac{5PL}{8}$

Lösning 5a: Om $s = 0$ så har vi Eulers 2a knäckfall, medan $s \to \infty$ leder till 4e knäckfallet. Med $s > 0$ och ändligt får vi då en knäcklast däremellan: $\frac{\pi^2 EI}{L^2} < P_{\text{kr}} < \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$

Lösning 5b: Lägg en koordinataxel x utmed balken och låt mittpunkten vara origo. Balkens utböjning blir då $w(x) = A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx)$, $\frac{-L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$, där $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ (Lundh ekv 8–66). Integrationskonstanterna bestäms av randvillkoren, men beräkningarna underlättas om man inser att transversalförskjutningen måste vara symmetrisk (första knäckmoden): $w(-x) = w(x)$ kräver att $B = D = 0$. Randvillkoret $w\left(\pm\frac{L}{2}\right) = 0$ ger då att $A = -C\cos\left(\frac{nL}{2}\right)$, så vi har

$$w(x) = C\left(\cos(nx) - \cos\left(\frac{nL}{2}\right)\right)$$

Jämviktsvillkoret $M\left(\frac{L}{2}\right) = s\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x = \frac{L}{2}}$ (alternativt $M\left(\frac{-L}{2}\right) = -s\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x = \frac{-L}{2}}$) till-



sammans med sambandet mellan snittmoment och krökning, $M = -EI\frac{d^2w}{dx^2}$,

ger $\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x = \frac{L}{2}} + \frac{2}{L}\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x = \frac{L}{2}} = 0$, där vi satt $s = \frac{2EI}{L}$. Insättning leder till

$$C\left(-n^2\cos\left(\frac{nL}{2}\right) - \frac{2n}{L}\sin\left(\frac{nL}{2}\right)\right) = 0$$

Icke–triviala lösningar ($C = 0$ leder till $w \equiv 0$) kräver att uttrycket inom parentes är noll; divideras uttrycket med $\frac{-2n\cos\left(\frac{nL}{2}\right)}{L}$, kan knäckekvationen skrivas $\frac{nL}{2} + \tan\left(\frac{nL}{2}\right) = 0$. Knäckkraften fås som $P_{\text{kr}} = (nL)^2\frac{EI}{L^2}$, där nL är lägsta positiva roten till knäckekvationen; från deluppgift **a** vet vi denna rot ska sökas i intervallet $[\pi, 2\pi]$. Numeriskt finner man $\frac{nL}{2} \approx 2{,}028$ så $P_{\text{kr}} \approx 16{,}451\frac{EI}{L^2} \approx \frac{1{,}67\pi^2 EI}{L^2}$