

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA KF OCH F — MHA 081

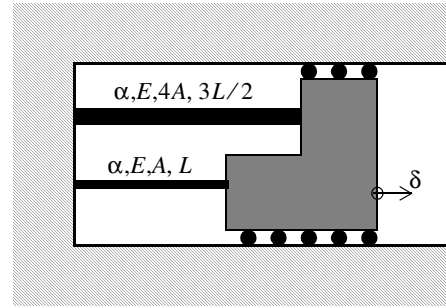
17 AUGUSTI 2016

- Tid och plats: 8.30—12.30 i M-huset. Lärare besöker salen ca 9.30 samt 11.30
- Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.
2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.
3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar. Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.
4. Typgodkänd miniräknare.
- Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505
- Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M-huset, 18/8. Se även kurshemsidan.
- Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (1p 4 2016) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.
- För att få poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.**
- Resultatlista: Anslås 24/8 2016 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 1/9.
- Granskning: Tisdag 30/8 12⁰⁰–13⁰⁰ samt torsdag 1/9 12⁰⁰–13⁰⁰ på inst. (plan 3 i norra trapphuset, nya M-huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

En vagn är rullgrad så att den är lätttröglig i horisontalld. Den hålls på plats med två parallella stänger som är tillverkade av ett lineärt termo-elastiskt material; elasticitetsmodulen är E och längdutvidningskoefficienten α . Ena stängerna har tvärsnittsarea A och längd L ; den andra har tvärsnittsarea $4A$ och längd $\frac{3L}{2}$ (se figur).



Vid en temperatur T_0 är hela konstruktionen spänningslös. Stängerna värms sedan till $T_0 + \Delta T$.

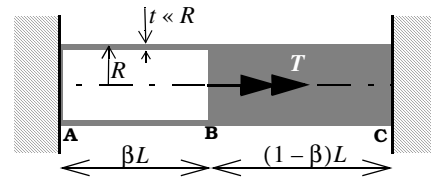
Deformationer hos vagnen försummas i det följande.

a: Bestäm stångkrafterna till följd av temperaturändringen. (3p)

b: Beräkna den resulterande horisontalförskjutningen δ av vagnen. (2p)

2.

En axelkonstruktion **ABC** har längd L och är tillverkad av ett lineärt elastiskt-ideal plastiskt material. Skjuvmodulen är G och sträckgränsen vid ren skjuvning τ_s . Delen **AB** är



ett tunnväggigt rör med radie R , godstjocklek t och längd βL ; delen **BC** är en massiv cylinder med radie R och längd $(1 - \beta)L$. Ett vridande moment T angriper vid **B**, medan ytterändarna **A** och **C** hålls fixerade.

a: Beräkna snittmomenten i de båda axeldelarna. (2p)

b: Bestäm den dimensionslösa parametern β ($0 < \beta < 1$) så att röret **AB** plasticerar samtidigt som begynnande plasticering fås i cylindern **BC**. (3p)

3.

Betrakta en skiva i (x, y) -planet med en kantspricka, enligt figuren. För en viss typ av belastning blir spänningarna nära sprickspetsen

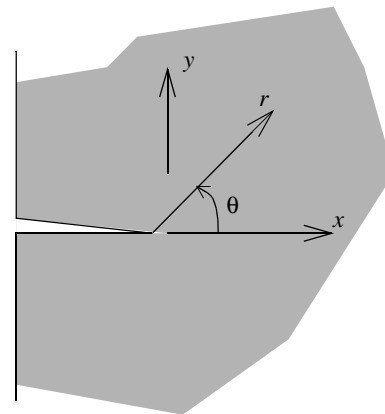
$$\tau_{xz} = \frac{-K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}$$

och övriga spänningskomponenter noll ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$),

enligt lineär elasticitetsteori; här är (r, θ) polära koordinater med origo i sprickspetsen och $K_{III} > 0$ är en integrationskonstant som beror av skivans geometri och hur belastningen läggs på.

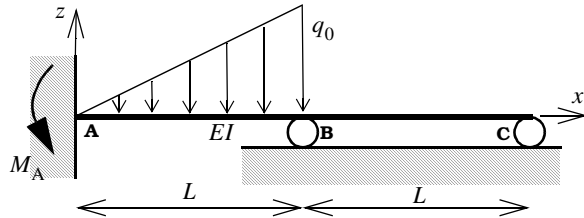
a: Bestäm huvudspänningarna nära sprickspetsen. (2p)

b: Bestäm det område kring sprickspetsen som plasticerar enligt Trescas hypotes, dvs bestäm det område inom vilket $\sigma_e \geq \sigma_s$ där σ_e är effektivspänningen enligt Tresca och σ_s är materialets sträckgräns vid enaxlig dragning. (3p)



4.

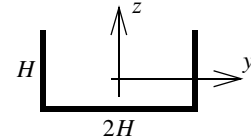
Balken **ABC**, med konstant böjstyvhets EI , är fast inspänd vid **A** och vilar på rullager vid **B** och **C**, så att två spann om vardera längd L bildas. Mellan **A** och **B** verkar en utbredd last vars intensitet (kraft/längd) varierar från 0



vid **A** till q_0 vid **B**; kraftresultanten är alltså $\frac{q_0 L}{2}$.

a: Beräkna inspänningsmomentet M_A (3p)

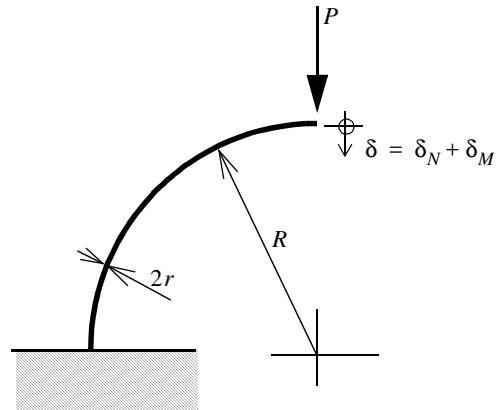
b: Balken har ett U-tvårsnitt med höjd H och bredd $2H$. Godtjockleken är t och tvärsnittet kan betrakas som tunnväggigt ($t \ll H$). Bestäm största drag- och tryckspänning i ett snitt där det böjande momentet är



$$M = \frac{q_0 L^2}{21}. \quad (2p)$$

5.

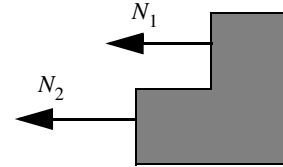
Kvartscirkelbågen i figuren är tillverkad av ett lineärt elastiskt material. Elasticitetsmodulen är E , bågens krökningsradie är R och tvärsnittet är massivt cirkulärt med radie r . Konstruktionen är fast inspänd till grunden och belastas i andra änden av en vertikalt riktad kraft P . Beräkna vertikala förskjutningen δ av kraftens angreppspunkt; hänsyn ska tas till inverkan av normalkraft N och böjande moment M i bågen.



Svara med kvoten $\frac{\delta_N}{\delta_M}$ uttryckt i r och R (där δ_N och δ_M är bidragen till δ från normalkraft respektive böjande moment). (5p)

Lösning 1a: Vi använder här subscript 1 och 2 för övre respektive undre stängen. Frilägg vagnen och ansätt stångkrafterna som positiva i dragningsdragnings. Jämvikt ger

$$N_1 + N_2 = 0 \quad (1)$$



Stångförlängningarna blir (Lundh ekv 2-14, 5-3)

$$\Delta_1 = \frac{N_1 \cdot 3L}{E \cdot 4A} + \alpha \cdot \Delta T \cdot \frac{3L}{2} = \frac{3N_1 L}{8EA} + \frac{3\alpha L \cdot \Delta T}{2} \quad (2)$$

och

$$\Delta_2 = \frac{N_2 L}{EA} + \alpha L \cdot \Delta T \quad (3)$$

Kompatibilitetsvillkoret $\Delta_1 = \Delta_2$ ger då

$$-3N_1 + 8N_2 = 4\alpha EA \cdot \Delta T \quad (4)$$

Ur ekv (1) och (4) fås $N_1 = \frac{-4\alpha EA \cdot \Delta T}{11}$ (tryck) och $N_2 = \frac{4\alpha EA \cdot \Delta T}{11}$ (drag)

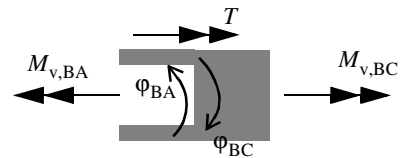
Lösning 1b: Vagnens förskjutning är lika med stängernas förlängningar: $\delta = \Delta_1 = \Delta_2$. Insättning

av N_1 i ekv (2) (eller N_2 i ekv (3)) ger $\delta = \frac{15\alpha L \cdot \Delta T}{11}$

Lösning 2a: Snitta på båda sidor om momentets angreppspunkt; låt $M_{v,BA}$ och $M_{v,BC}$ beteckna de två snittmomenten.

Jämvikt kräver då att

$$T - M_{v,BA} + M_{v,BC} = 0 \quad (5)$$



Vridningsvinklarna omedelbart till vänster och höger om angreppspunkten betecknas φ_{BA} respektive φ_{BC} och sätts positiva i snittmomentens vridningsriktning. Lundh ekv 6-6 och 6-11 ger

$$\varphi_{BA} = \frac{M_{v,BA} \cdot \beta L}{2\pi GR^3 t} \quad \varphi_{BC} = \frac{2M_{v,BC} \cdot (1-\beta)L}{\pi GR^4}$$

Kompatibilitetsvillkoret $\varphi_{BA} + \varphi_{BC} = 0$ leder då till

$$\frac{M_{v,BA} \cdot \beta}{2t} + \frac{2M_{v,BC} \cdot (1-\beta)}{R} = 0 \quad (6)$$

Ur ekv 6-5 och 6-6 fås $M_{v,BA} = \frac{4t(1-\beta)T}{\beta R + 4t(1-\beta)}$ och $M_{v,BC} = \frac{-\beta RT}{\beta R + 4t(1-\beta)}$

Lösning 2b: Skjuvspänningen i röret AB ges av Lundh 6-4

$$\tau_{BA} = \frac{4t(1-\beta)T}{[\beta R + 4t(1-\beta)] \cdot 2\pi R^2 t} = \frac{2(1-\beta)T}{\pi R^2 [\beta R + 4t(1-\beta)]}$$

I cylindern fås maximal skjuvspänning närmast mantelytan; denna ges av Lundh 6-14 som

$$|\tau_{BC}|_{\max} = \frac{2\beta RT \cdot R}{[\beta R + 4t(1-\beta)] \cdot \pi R^4} = \frac{2\beta T}{\pi R^2 [\beta R + 4t(1-\beta)]}$$

Delarna plasticerar samtidigt om de två skjuvspänningarna är lika; detta ger

$$1 - \beta = \beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

Lösning 3a: Huvudspänningarna fås som egenvärdena till spänningstensorn $S =$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

($S^T = S$), Lundh ekv 9–6. $\det(S - \sigma I) = 0$ ger $-\sigma^3 + \sigma(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = 0$, som har rötterna

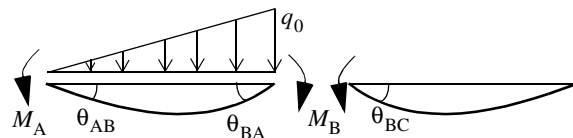
$$\sigma = 0, \sigma = \pm \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{\pm K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{\pm K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}$$

Lösning 3b: Effektivspänningen enligt Tresca fås som skillnaden mellan största och minsta huvudspänningen (formelsamling sid 14 eller Lundh ekv 12–14); med $\sigma_e \geq \sigma_s$ fås

$$\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} - \left(\frac{-K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} K_{III} \geq \sigma_s$$

Det plasticerade området är alltså cirkelskivan $r \leq \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{III}}{\sigma_s}\right)^2$, med centrum i sprickspetsen.

Lösning 4a: Vi har här fem tvång, men bara tillgång till tre jämviktsvillkor, så strukturen är statiskt obestämt. Här löser vi problemet genom att teckna vinklarna θ_{AB} , θ_{BA} samt θ_{BC}



med hjälp av elementarfall; villkoren $\theta_{AB} = 0$ och $\theta_{BA} + \theta_{BC} = 0$ ger oss de två extra ekvationer som behövs. Formelsamlingen sid 9 ger

$$\theta_{AB} = -\frac{M_A L}{3EI} - \frac{M_B L}{6EI} + \frac{7q_0 L^3}{360EI} \quad \theta_{BA} = -\frac{M_A L}{6EI} - \frac{M_B L}{3EI} + \frac{q_0 L^3}{45EI} \quad \theta_{BC} = -\frac{M_B L}{3EI}$$

så

$$\theta_{AB} = 0 \Rightarrow 2M_A + M_B = \frac{7q_0 L^2}{60} \quad (7)$$

och

$$\theta_{BA} + \theta_{BC} = 0 \Rightarrow M_A + 4M_B = \frac{2q_0 L^2}{15} \quad (8)$$

Ur ekv (7) och (8) fås $M_A = \frac{q_0 L^2}{21}$ (och $M_B = \frac{3q_0 L^2}{140}$)

Lösning 4b: Spänningen beräknas enligt Lundh 7–26: $\sigma = \frac{Mz}{I_y}$. Vi måste först hitta tvärsnittets

yt-tyngdpunkt. Statiska momentet med avseende på en hjälpxel η längs tvärsnittets undekant

blir $S_\eta = z_{tp} A = 2Ht \cdot 0 + 2 \cdot Ht \cdot \frac{H}{2}$, där $A = 4Ht$ är tvärsnittsarean; vi finner $z_{tp} = \frac{H}{4}$.

Areatröghetsmomentet med avseende på y -axeln beräknas nu med Steiners sats (Lundh 7–42)

$$I_y = \frac{2Ht^3}{12} + 2Ht \cdot z_{\varphi}^2 + 2 \cdot \left(\frac{tH^3}{12} + Ht \cdot \left(\frac{H}{2} - z_{\varphi} \right)^2 \right) \approx \frac{5H^3t}{12}$$

De två första termerna i mellanledet är bidraget från den horisontella delen med area $2Ht$ och t^3 –

termen försummas ($t \ll H$). Insättning ger nu $\sigma = \frac{q_0 L^2}{2I} \cdot z = \frac{4q_0 L^2}{35H^2t} \cdot \frac{z}{H}$ Störst dragspänning ($\sigma > 0$) fås

för $\frac{z}{H} = \frac{3}{4}$: $\sigma_{\max} = \frac{3q_0 L^2}{35H^2t}$ Störst tryckspänning ($\sigma < 0$) fås för $\frac{z}{H} = \frac{-1}{4}$: $\sigma_{\min} = \frac{-q_0 L^2}{35H^2t}$

Lösning 5: Förskjutningen beräknas enklast med Castiglianos 2a sats, Lundh 15–96, 15–52

$$\delta = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^{\pi/4} \left(\frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EI} \right) R d\varphi = \underbrace{\int_0^{\pi/4} \frac{\partial N}{\partial P} \frac{N}{EA} R d\varphi}_0}_{\delta_N} + \underbrace{\int_0^{\pi/4} \frac{\partial M}{\partial P} \frac{M}{EI} R d\varphi}_0}_{\delta_M} \quad (9)$$

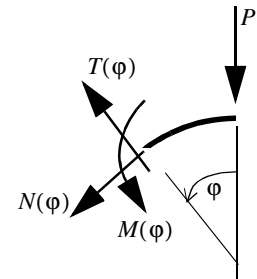
där φ är en vinkelkoordinat längs bågen.

Snitta vid en godtycklig vinkel och ställ upp kraft- och momentjämvikt; man finner

$$N(\varphi) + P \sin \varphi = 0 \Rightarrow N(\varphi) = -P \sin \varphi \quad \frac{\partial N}{\partial P} = -\sin \varphi \quad (10)$$

samt

$$M(\varphi) - PR \sin \varphi = 0 \Rightarrow M(\varphi) = PR \sin \varphi \quad \frac{\partial M}{\partial P} = R \sin \varphi \quad (11)$$



Ekv (10) och (11) insatta i (9) leder till

$$\delta = \frac{PR}{EA} \int_0^{\pi/4} (\sin \varphi)^2 d\varphi + \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\pi/4} (\sin \varphi)^2 d\varphi = \underbrace{\frac{PR}{8EA}(\pi-2)}_{\delta_N} + \underbrace{\frac{PR^3}{8EI}(\pi-2)}_{\delta_M}$$

Med $A = \pi r^2$ och (Formelsamling sid 6) $I = \frac{\pi r^4}{4}$ fås då $\frac{\delta_N}{\delta_M} = \frac{\frac{R}{\pi r^2}}{\frac{4R^3}{\pi r^4}} = \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^2$