Institutionen för tillämpad mekanik, Chalmers tekniska högskola

Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA KF OCH F — MHA 081

3 JUNI 2016

Tid och plats: 14.00—18.00 i M–huset. Lärare besöker salen ca 15.00 samt 16.30

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.

2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset, 7/6. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2016) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

För att få poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

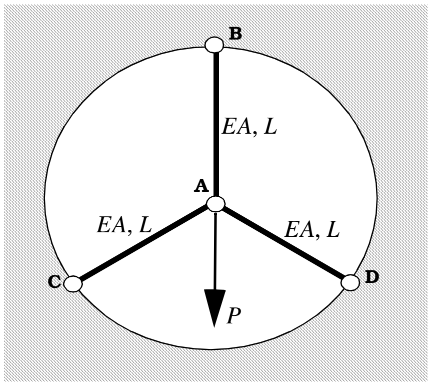
Resultatlista: Anslås **senast** 15/6 2016 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 17/6.

Granskning: Onsdag 15/6 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt tisdag 30/8 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i norra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

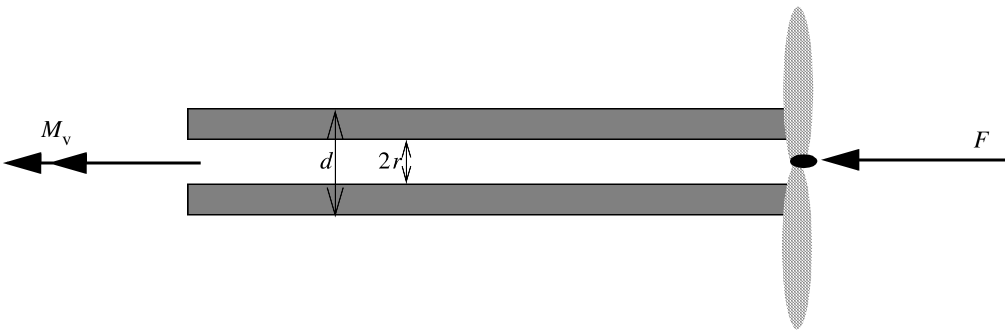
Tre stänger, alla med axialstyvhet EA och längd L, är sammanfogade i en gemensam knut **A** på sådant sätt att vinkeln mellan varje stångpar är $120°$. Stången **AB** är vertikal och i **A** hänger ett föremål med egentyngd P. Beräkna krafterna i stängerna. (5p)



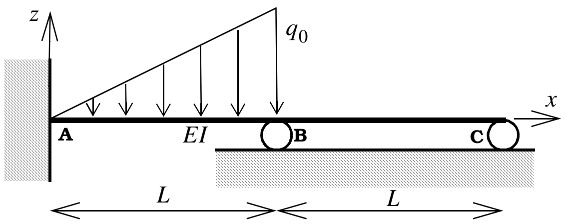
2.

Då fartygsmotorer driver en propelleraxel uppkommer ett vridande moment M_v och propellern omvandlar en del av den överförda effekten till en framdrivningskraft F.

Då Stena Jutlandica färdas i 20 knop är den överförda effekten $P = 12\ \text{MW}$ och axelns varvtal $n = 110\ \text{varv/min}$; framdrivningskraften är då $F = 800\ \text{kN}$, som tillsammans med vridmomentet går igenom axeln. Axeln har ett cirkulärt håltvärsnitt med diameter $d = 500\ \text{mm}$ och hålradie $r = 150\ \text{mm}$. För materialet gäller $E = 201\ \text{GPa}$, $\nu = 0{,}3$ och $\sigma_s = 425\ \text{MPa}$. Beräkna säkerheten mot plasticering, $s = \frac{\sigma_s}{\sigma_e}$, enligt von Mises flythypotes. (5p)

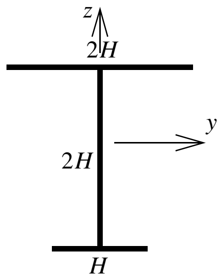


3.



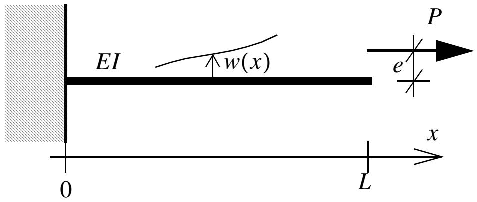
Balken **ABC**, med konstant böjstyvhet EI, är fast inspänd vid **A** och vilar på rullager vid **B** och **C**, så att två spann om vardera längd L bildas. Mellan **A** och **B** verkar en utbredd last vars intensitet (kraft/längd) varierar från 0 vid **A** till q_0 vid **B**; kraftresultanten är alltså $\frac{q_0 L}{2}$.

a: Beräkna det böjande momentet i spannet **BC** (3p)



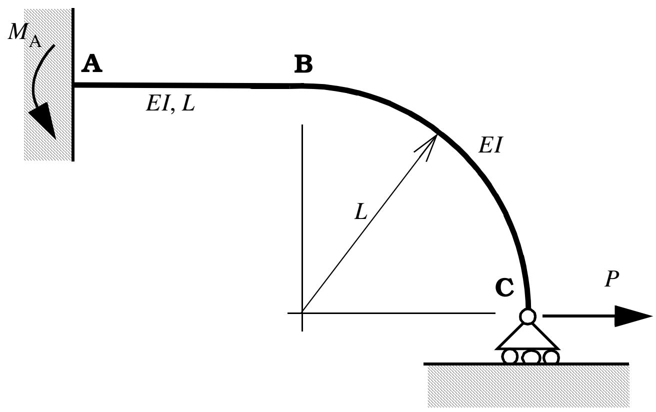
b: Balken har ett enkelsymmetriskt I–tvärsnitt med livhöjd $2H$ och flänsbredder H respektive $2H$. Godtjockleken är t och tvärsnittet kan betrakas som tunnväggigt ($t \ll H$). Bestäm största drag och tryckspänning i ett snitt där det böjande momentet är $M = \frac{3q_0L^2}{140}$. Sätt $L = 20H$ i beräkningarna. (2p)

4.



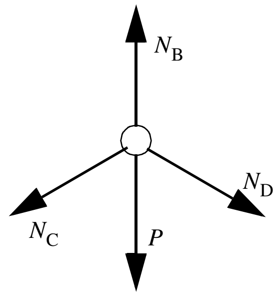
En konsolbalk med längd L och konstant böjstyvhet EI belastas med en dragande axiell kraft P. Kraften är excentrisk, så att dess verkningslinje har avståndet e till balkens medellinje. Avståndet e kan betraktas som litet i förhållande till tvärsnittets höjd. Beräkna balkens utböjningskurva $w(x)$ samt det böjande momentet $M(x)$ med hänsyn tagen till den axialkraften (2a ordningens teori). (5p)

5.



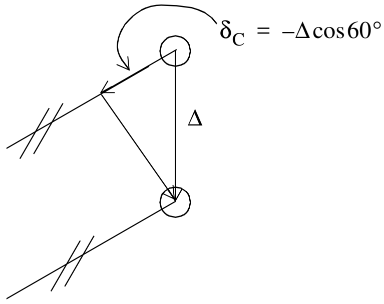
En ramkonstruktion med böjstyvhet EI består av en rak balk **AB** med längd L och en kvartscirkelbåge **BC** med krökningsradie L. Anordningen är fast inspänd vid **A**, medan vertikalförskjutning är förhindrad vid **C**. Bestäm det inspänningsmoment M_A som uppkommer till följd av att en horisontellt riktad kraft P angriper vid **C**. (5p)

Lösning 1: Frilägg knut **A**. Horisontell och vertikal kraftjämvikt ger



$$N_D\cos 30° - N_C\cos 30° = 0$$
$$P - N_B + N_C\cos 60° + N_D\cos 60° = 0 \qquad (1)$$

Låt Δ beteckna knut **A**:s förskjutning; av symmetrin inses att denna sker vertikalt nedåt. Stången **AB**:s förlängning blir då $\delta_B = \Delta$. Om $\Delta \ll L$ antas, blir stången **AC**:s förlängning $\delta_C = -\Delta/2$ (se figur), dvs den förkortas. Vi har då $\Delta = \delta_B = -2\delta_C$ och sätter in sambandet mellan stångförlängning och stångkraft (Lundh ekv 2–14) fås:



$$\frac{N_B L}{EA} = \frac{-2N_C L}{EA} \qquad (2)$$

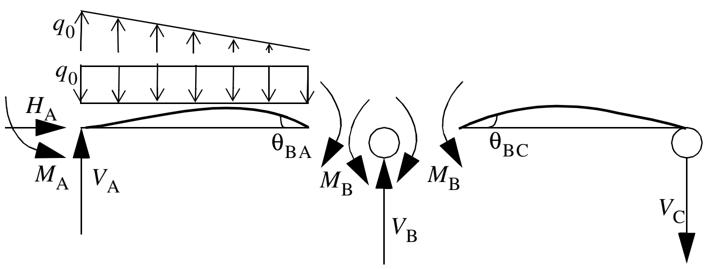
Ur ekv (1) och (2) fås $N_B = \frac{2P}{3}$ $\quad N_C = N_D = \frac{-P}{3}$

Lösning 2: Vi har en tryckande normalkraft $N = -F$ i axeln, så med tvärsnittasrean $A = \pi\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 - r^2\right)$ fås normalspänningen $\sigma = \frac{N}{A} \approx -6{,}37\ \text{MPa}$

Det vridande momentet fås ur sambandet mellan effekt och axelns vinkelhastighet (Lundh 6–1): $M_v = \frac{30P}{\pi n} \approx 1{,}04\ \text{MNm}$. Största skjuvspänningen i tvärsnittet är då (Lundh 6–14)

$\tau = \dfrac{M_v d}{\pi\left(\left(\frac{d}{2}\right)^4 - r^4\right)} \approx 48{,}76\ \text{MPa}$. Effektivspänningen enligt von Mises flytvillkor blir nu (Lundh 12–4 eller 12–8) $\sigma_e = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \approx 84{,}7\ \text{MPa}$. Man finner $s = \frac{\sigma_s}{\sigma_e} \approx 5$

Lösning 3a: Vi har fem stödreaktioner men kan bara ställa upp tre jämviktsekvationer, så bärverket är statiskt obestämt. Enklast kommer vi åt det sökta snittmomentet M_B genom att dela balken på ömse sidor om stödet **B**; vinklarna θ_{BA} och θ_{BC}



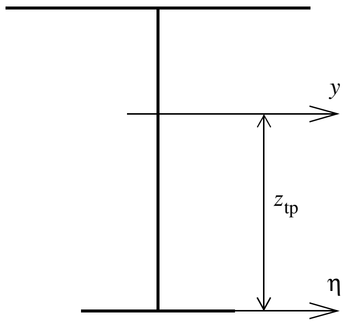
kan nu uttryckas med elementarfall (formelsamling sid 11 respektive 9)

$$\theta_{BA} = \frac{M_B L}{4EI} + \frac{q_0 L^3}{120EI} - \frac{q_0 L^3}{48EI} = \frac{L}{EI}\left(\frac{M_B}{4} - \frac{q_0 L^2}{80}\right)$$

$$\theta_{BC} = \frac{M_B L}{3EI}$$

Kompatibilitetsvillkoret $\theta_{BA} + \theta_{BC} = 0$ ger $\frac{7M_B}{12} - \frac{q_0 L^2}{80} = 0$, så $M_B = \frac{3q_0 L^2}{140}$. Eftersom det inte finns någon belastning på spannet **BC** ($q = 0$) och (Lundh 7–2,3) $\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$, varierar M lineärt här.

Alltså: $M_B = \frac{3q_0 L^2}{140}$, $M_C = 0$ med lineär variation däremellan.



Lösning 3b: De sökta spänningarna beräknas med (Lundh 7–26) $\sigma = \frac{Mz}{I_y}$. För att beräkna areatröghetsmomentet I_y och hitta z–koordinaten, måste vi först hitta tyngdpunktsläget. Inför en hjälpaxel η enligt figuren; statiska momentet map hjälpaxeln är

$$S_\eta = Az_{tp} = 2Ht \cdot 2H + 2Ht \cdot H + Ht \cdot 0 = 6H^2 t$$

Med tvärsnittsytan $A = 5Ht$ hittar vi då $z_{tp} = \frac{6H}{5}$. Areatröghetsmomentet fås nu med Steiners sats (Lundh 7–42)

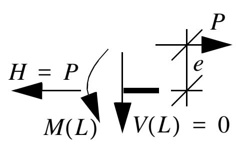
$I_y = 2Ht(2H - z_{tp})^2 + \frac{t(2H)^3}{12} + 2Ht(H - z_{tp})^2 + Htz_{tp}^2 = \frac{52H^3 t}{15}$; första och sista termen (i mellanledet) är bidraget från de två flänsarna och termer som är kubiska i godtjockleken t har försummats.

Insättning, med det givna momentet $M = \frac{3q_0(20H)^2}{140} = \frac{60q_0 H^2}{7}$, ger $\sigma = \frac{225q_0 z}{91Ht}$

Störst dragspänning blir $\sigma_{max} = \sigma\left(z = \frac{4H}{5}\right) = \frac{180q_0}{91t} \approx 1{,}98\frac{q_0}{t}$

Störst tryckspänning är $\sigma_{min} = \sigma(-z_{tp}) = \frac{-270q_0}{91t} \approx -2{,}97\frac{q_0}{t}$

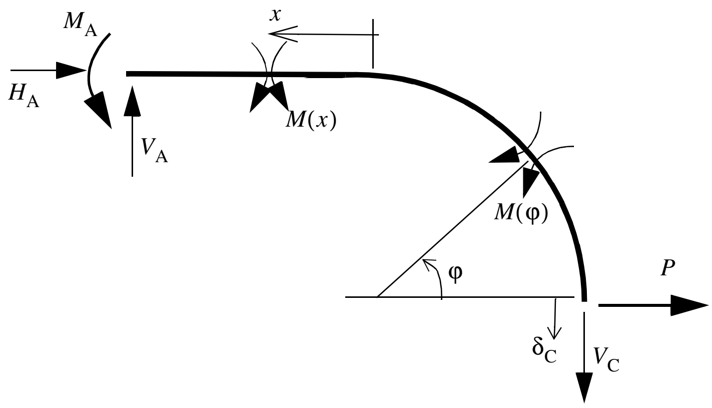
Lösning 4: Utböjningen ges som lösningen till $w^{iv} - n^2 w'' = 0$, där, $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, (Lundh 8–58). När denna är känd kan momentet beräknas som $M = -EIw''$ (Lundh 7–65).



Lösningen är $w = A + Bx + C\cosh(nx) + D\sinh(nx)$, där konstanterna bestäms ur randvillkor. Vid $x = 0$ har vi trivialt att $w(0) = 0$ och $w'(0) = 0$; vid $x = L$ har vi jämviktsvillkoren $V(L) = 0$ samt $M(L) - Pe = 0$. Med sambandet $M = -EIw''$ ger det senare $w''(L) = -n^2 e$. Vi har också (Lundh 8–59) $V = T + Nw'$, så med $T = -EIw'''$ (8–62) och $N \approx H = P$, kan kraftjämvikten skrivas $w'''(L) - n^2 w'(L) = 0$

De fyra villkoren ger $B = D = 0$ och $A = -C = \frac{e}{\cosh(nL)}$. $w(x) = \frac{e(1 - \cosh(nx))}{\cosh(nL)}$ $\quad M(x) = \frac{\cosh(nx)}{\cosh(nL)}Pe$

<u>Lösning 5:</u> Frilägg ramen. Vi har fyra stödreaktioner, men kan bara ställa upp tre jämviktssamband. Inför stödkraften V_C som statiskt övertalig ('bekant' yttre last) och använd Castiglianos 2a sats för att beräkna den associerade förskjutningen $\delta_C = \delta_C(P, V_C)$; villkoret $\delta_C = 0$ ger oss den extra ekvation som behövs.



Snitta genom bågen vid en godtycklig vinkel φ och beräkna snittmomentet:

$M(\varphi) + PL\sin\varphi - V_C L(1 - \cos\varphi) = 0$

$$M(\varphi) = V_C L(1 - \cos\varphi) - PL\sin\varphi \qquad \frac{\partial M}{\partial V_C} = L(1 - \cos\varphi) \tag{3}$$

Momentjämvikt för ett tänkt snitt genom den raka delen: $M(x) + PL - V_C(L + x) = 0$

$$M(x) = V_C(L + x) - PL \qquad \frac{\partial M}{\partial V_C} = L + x \tag{4}$$

Castigliano (Lundh 15–96) ger nu

$$\delta_C = \frac{\partial}{\partial V_C}\int_s \frac{M^2}{2EI}ds = \int_s \frac{\partial M}{\partial V_C}\frac{\partial}{\partial M}\left[\frac{M^2}{2EI}\right]ds = \int_s \frac{\partial M}{\partial V_C}\frac{M}{EI}ds$$

där integrationen ska göras längs hela bärverket; (endast deformation pga böjning har beaktats här). Insättning av ekv (3) och (4) ger

$$\delta_C = \int_0^{\pi/2} (V_C L^2(1 - \cos\varphi)^2 - PL^2(\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi))\frac{L}{EI}d\varphi + \int_0^L \frac{V_C(L + x)^2 - PL(L + x)}{EI}dx =$$

$$\frac{L^3}{EI}\left(\frac{V_C(3\pi - 8)}{4} - \frac{P}{2}\right) + \frac{L^3}{EI}\left(\frac{7V_C}{3} - \frac{3P}{2}\right)$$

så villkoret $\delta_C = 0$ leder till $V_C = \dfrac{24P}{4 + 9\pi}$. Det sökta momentet fås nu ur ekv (4):

$$M_A = M(L) = \frac{24P}{4 + 9\pi} \cdot 2L - PL = \frac{(44 - 9\pi)PL}{4 + 9\pi} \approx 0{,}49PL$$