Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

6 APRIL 2016

Tid och plats: 8.30—12.30 i M–huset. Lärare besöker salen 9.30 samt 11.00

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.

2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler 7/4. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2015) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

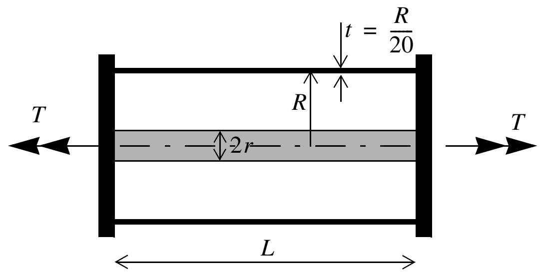
För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

Resultatlista: Anslås senast 11/4 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast vecka 16.

Granskning: Tisdag 12/4 $12^{\underline{30}}$–$13^{\underline{30}}$ samt torsdag 14/4 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i nya M–huset)

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

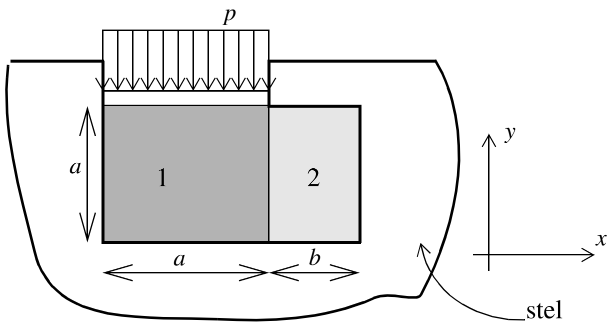


Axelkonstruktionen i figuren består av en central massiv axel med radien r och ett omgivande tunnväggigt rör med medelradie R och godtjocklek $t = \frac{R}{20}$. Delarna är tillverkade av ett lineärt elastiskt material med skjuvmodul G, och de är förenade med gavlar som kan betraktas som stela.

a: Bestäm radieförhållandet R/r så att snittmomenten i rör och axel blir lika stora, då konstruktionen belastas med ett vridande moment T. (3p)

b: Vilken del kommer först att plasticera då vridmomentet T successivt ökar, om $R = \frac{3r}{2}$? (2p)

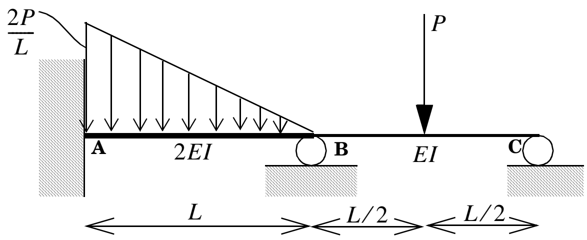
2.



En packning består av två delar med olika material enligt figuren. Vid montering uppstår ett kontakttryck p på övre ytan av packningsdel ‘1’ — delen ‘2’ pressas då mot anliggande stålytor så att tätning uppstår. Stålet är mycket styvare än packningen och kan betraktas som oändligt styvt. Packningsmaterial är lineärt elastiska och fria att utvidga sig i z–led; friktionen mellan de olika kontaktytorna kan försummas. Bestäm normalspänningarna i de båda packningsdelarna ($\sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \sigma_{x2}, \sigma_{y2}$). (5p)

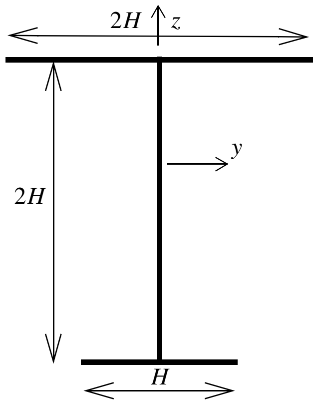
Data: $a = 2b = 20$ mm , $p = 100$ MPa , $E_1 = E_2/3 = 10$ GPa , $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}4$

3.



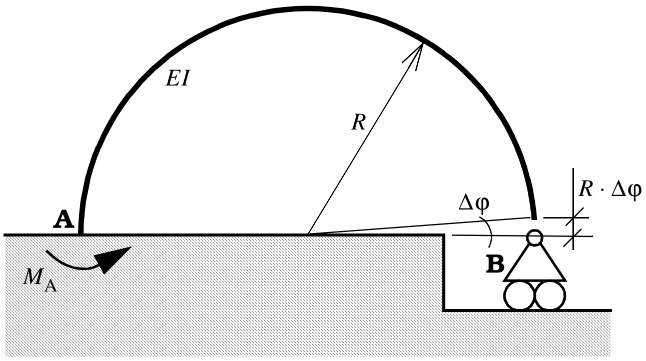
Den lineärt elastiska balken **ABC** är fast inspänd vid **A** och rullagrad vid **B** och **C**, så att två spann med längden L vardera bildas. Delen **AB** har dubbelt så stor böjstyvhet som delen **BC**. Mitt på delen **BC** verkar en nedåt riktad kraft P, medan **AC** belastas med en fördelad last med lineärt varierande intensitet (kraft/längd); största intensiteten är $\frac{2P}{L}$ (se figur).

a: Rita momentdiagrammet för delen **BC** (3p) b: För en viss belastning blir $|M|_{\max} = \dfrac{19PL}{110}$ i delen **BC**. Balken har här ett enkelsymmetriskt I–tvärsnitt med flänsbredder $2H$ och H, samt livhöjd $2H$ (se figur); godtjockleken är t och antas mycket mindre än övriga tvärsnittsdimmensioner ($t \ll H$). Bestäm t så att säkerheten mot plasticering blir $\dfrac{\sigma_s}{|\sigma|_{\max}} = 3$. Data: $P = 50\ \text{kN}$, $\sigma_s = 230\ \text{MPa}$, $L = 2\ \text{m}$ och $H = 100\ \text{mm}$. (2p)



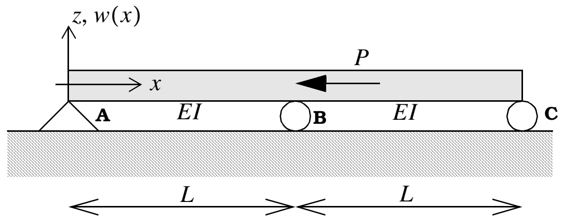
4.

En halvcirkelbåge med krökningsradien R och konstant böjstyvhet EI är fast inspänd vid **A** och ska rullagras vid **B**. Det visar sig att öppnings vinkeln bara är $\pi - \Delta\varphi$ (rad) så ett passningsfel $R \cdot \Delta\varphi \ll R$ uppkommer vid rullstödet **B**. Hur stort blir inspänningsmomentet M_A efter monteringen? (5p)



5.

Axialkraften P är riktad längs balkens medellinje och angriper balken vid mittstödet **B**.



a: Bestäm övre och undre gräns för kritisk last P_{kr} med avseende på elastisk stabilitet. (1p)

b: Den kritiska lasten kan beräknas genom att lösa differentialekvationen

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + n^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,\ x \in (0, L),\ \text{där } n^2 = \frac{P}{EI}.$$

Ange och motivera de randvillkor som då behövs för att bestämma P_{kr}. Randvillkoren ska ges i termer av villkor på funktionen w och dess derivator. (2p)

c: Härled knäckekvationen, dvs en ekvation vars lägsta positiva rot nL, $n = \sqrt{\dfrac{P}{EI}}$, ger kritiska lasten med avseende på elastisk stabilitet. (2p)

Observera att bara delen **AB** är tryckt!

Lösning 1a: Vi har trivialt att $2M_v = T$, där M_v är snittmomentet i respektive del. Vridningsvinkeln för axeln är $\varphi_{\text{axel}} = \dfrac{2M_vL}{\pi G r^4}$ (Lundh 6–11,12); vinkeln för röret är $\varphi_{\text{rör}} = \dfrac{10M_vL}{\pi G R^4}$ (Lundh 6–6).

Dessa vridningsvinklar måste vara lika stora eftersom gavlarna är stela:

$$\varphi_{\text{axel}} = \varphi_{\text{rör}} \Rightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^4 = 5 \Rightarrow \frac{R}{r} = \sqrt{\sqrt{5}} \approx 1{,}5$$

Lösning 1b: Skjuvspänningen i röret (konstant pga tunnväggighet) fås enligt Lundh 6–4 som

$$\tau_{\text{rör}} = \frac{M_{v,\text{rör}}}{2\pi R^2 \frac{R}{20}} = \frac{10M_{v,\text{rör}}}{\pi\left(\frac{3}{2}r\right)^3} = \frac{80M_{v,\text{rör}}}{27\pi r^3}$$

Lundh 6–14 ger maximal skjuvspänning i axeln: $\tau_{\text{axel}} = \dfrac{2M_{v,\text{axel}}}{\pi r^3}$

Eftersom $R = \dfrac{3r}{2}$ vet vi från deluppgift a att $M_{v,\text{axel}} \approx M_{v,\text{rör}}$, så skjuvspänningen i röret är större än största skjuvspänningen i axeln — röret plasticerar först

---

Lösning 2: Jämvikt vid den belastade ytan ger att $\sigma_{y1} = -p = -100\ \text{MPa}$. Jämvikt i gränsskiktet mellan de två materialen visar att

$$\sigma_{x1} = \sigma_{x2} \tag{1}$$

Axialtöjningarna beräknas enligt Lundh 10–25,26 (alt. Formelsamling sid 14, med $\sigma_z = 0$ i båda materialen: $\varepsilon_{x1} = \frac{1}{E_1}(\sigma_{x1} - \nu\sigma_{y1}) = \frac{1}{E_1}(\sigma_{x1} + \nu p)$, $\varepsilon_{x2} = \frac{1}{E_2}(\sigma_{x2} - \nu\sigma_{y2}) = \frac{1}{3E_1}(\sigma_{x1} - \nu\sigma_{y2})$, samt $\varepsilon_{y2} = \frac{1}{E_2}(\sigma_{y2} - \nu\sigma_{x2}) = \frac{1}{3E_1}(\sigma_{y2} - \nu\sigma_{x1})$. Villkoret $a\varepsilon_{y2} = 0$ ger då

$$\sigma_{y1} = \nu\sigma_{x1} \tag{2}$$

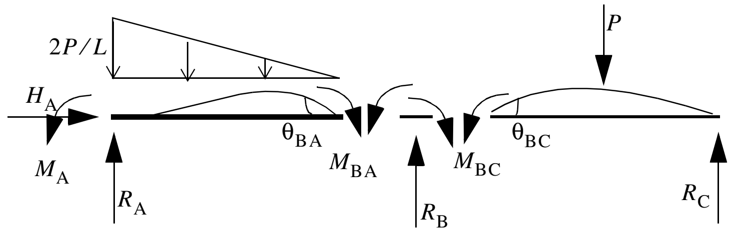
medan villkoret $a\varepsilon_{x1} + b\varepsilon_{x2} = 0$ ger

$$\frac{b}{E_1}\left[2(\sigma_{x1} + \nu p) + \frac{1}{3}(\sigma_{x1} - \nu\sigma_{y2})\right] = 0 \tag{3}$$

där vi utnyttjat att $a = 2b$. Ekvationerna (1), (2) och (3) ger $\sigma_{x1} = \sigma_{x2} = \dfrac{-6\nu p}{7 - \nu^2} \approx -35\ \text{MPa}$ och

$\sigma_{y2} = \dfrac{-6\nu^2 p}{7 - \nu^2} \approx -14\ \text{MPa}$

Lösning 3a: Konstruktionen är statiskt obestämd eftersom vi har 5 stödreaktioner, men bara tillgång till 3 jämviktsekvationer. Vi använder här kraftmetod och elementarfall för lösa uppgiften.



Snitta omedelbart till vänster och höger om stödet vid **B**. Momentjämvikt för det utsnittade stödet ger att $M_{BA} = M_{BC}$; fortsättningsvis betecknar vi snittmomentet med M_B. Från formelsamlingen sid 9 och 11 får vi att vinklarna på ömse sidor stödet **B** blir

$$\theta_{BA} = \frac{M_B \cdot L}{4 \cdot 2EI} - \frac{\frac{2P}{L} \cdot L^3}{120 \cdot 2EI} = \frac{L}{EI}\left(\frac{M_B}{8} - \frac{PL}{120}\right)$$

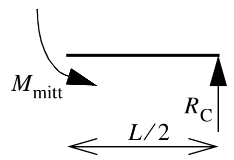
$$\theta_{BC} = \frac{M_B \cdot L}{3EI} - \frac{PL^2}{16EI} = \frac{L}{EI}\left(\frac{M_B}{3} - \frac{PL}{16}\right)$$

Kompatibilitetsvillkoret $\theta_{BA} + \theta_{BC} = 0$ ger nu $M_B = \frac{17PL}{110}$.

Betrakta nu momentjämvikt vid **B** för delen **BC**: $R_C L - P\frac{L}{2} + M_{BC} = 0$. Med $M_{BC} = M_B = \frac{17PL}{110}$ fås

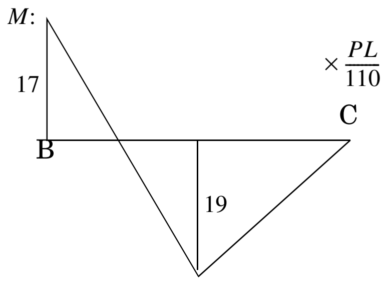
$R_C = \frac{19P}{55}$.

Låt M_{mitt} beteckna snittmomentet mitt på spannet **BC**; snitta omedelbart till höger om kraften P och betrakta momentjämvikt för den högra delen:

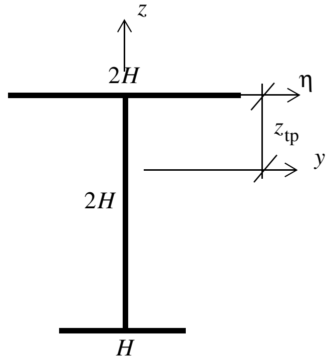


$M_{mitt} + R_C\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow M_{mitt} = \frac{-19PL}{110}$.

Vid den fria änden **C** är snittmomentet 0 eftersom inget yttre moment verkar här. Mellan **C** och mittpunkten måste momentet variera lineärt, eftersom $\frac{d^2M}{dx^2} = -q(x) = 0$; av samma anledning är variationen lineär mellan **B** och mittpunkten. Vi kan nu rita momentdiagramet.



Lösning 3b: Vi har att $|\sigma|_{max} = \frac{|M|_{max}|z|_{max}}{I_y} = \frac{\sigma_s}{3}$. För att hitta $|z|_{max}$ samt beräkna areatröghetsmomentet I_y, måste vi först hitta tvärsnittets yt–tyngdpunkt. Med beteckningar enligt figuren får vi det statiska momentet m.a.p η–axeln $S_\eta = Az_{tp} = Ht \cdot 2H + 2Ht \cdot H + 2Ht \cdot 0$, där $A = 5Ht$ är tvärsnittsytan; vi finner då $z_{tp} = \frac{4}{5}H$, så



$|z|_{max} = |-2H + z_{tp}| = \frac{6H}{5}$

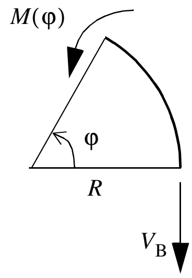
Med Steiners sats får vi nu areatröghetsmomentet

$$I_y = \frac{(2H)^3 t}{12} + 2Ht(H - z_{tp})^2 + Ht(2H - z_{tp})^2 + 2Htz_{tp}^2 = \frac{52H^3 t}{15}$$ (vi har här försummat termer som är kubiska

i t, eftersom $t \ll H$). Insättning ger nu $\frac{19PL \cdot 6H \cdot 15}{110 \cdot 5 \cdot 52H^3 t} = \frac{\sigma_s}{3}$ ur vilket $t = \frac{513PL}{2860H^2\sigma_s} \approx 7{,}8$ mm

---

Lösning 4: Inför stödreaktionen vid **B** (V_B) som statiskt övertalig.



Det böjande momentet $M(\varphi)$ i bågen kan då skrivas

$M(\varphi) = V_B R(1 - \cos\varphi)$. Castiglianos 2a sats ger nu

$$EI \cdot \Delta\varphi \cdot R = \int_0^\pi M\frac{\partial M}{\partial V_B} \cdot R d\varphi = V_B R^3 \int_0^\pi (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi$$, varur

$$V_B = \frac{EI \cdot \Delta\varphi}{R^2 \int_0^\pi (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi} = \frac{EI \cdot \Delta\varphi}{\frac{3\pi}{2}R^2} = \frac{2EI \cdot \Delta\varphi}{3\pi R^2}$$

Det sökta momentet är då $M_A = M(\pi) = V_B(1 - \cos\pi) = 2V_B = \frac{4EI \cdot \Delta\varphi}{3\pi R^2}$

Lösning 5a: Om spannet **BC** tas bort så har vi Eulers 2a knäckfall, medan om $EI \to \infty$ i spannet **BC** så fås 3e knäckfallet. De två ytterligheterna ger en vekare respektive vekare stuktur, så knäcklasten måste ligga däremellan: $\frac{\pi^2 EI}{L^2} < P_{kr} < \frac{2{,}05\pi^2 EI}{L^2}$

Lösning 5b: Vi har trivialt att transversalförskjutningen är noll vid de båda stöden **A** och **B**:

$w(0) = 0 \qquad w(L) = 0$

Vid $x = 0$ är snittmomentet noll; eftersom $M = -EIw''$ har vi då $w''(0) = 0$

Vid $x = L$ kan vi hitta ett samband mellan rotationen $\theta = w'(L)$ och snittmomentet

$M(L) = -EIw'(L)$; formelsamling sid 9 ger $\theta = \frac{ML}{3EI}$, så $w'(L) = \frac{-EIw''(L)L}{3EI}$ eller $w''(L) + \frac{3}{L}w'(L) = 0$

Lösning 5c: Differentialekvationens lösning är $w(x) = A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx)$ (Lundh ekv 8–66). Randvillkoren vid $x = 0$ ger då $A + C = 0$ och $-Cn^2 = 0$, så $A = C = 0$. Villkoret $w(L) = 0$ ger därefter $BL + D\sin(nL) = 0$, varur $B = -D\frac{\sin(nL)}{L}$. Vi har då

$$w = D\left(\sin(nx) - \frac{\sin(nL)}{L}x\right)$$

$$w' = D\left(n\cos(nx) - \frac{\sin(nL)}{L}\right)$$

$$w'' = D(-n^2\sin(nx)))$$

Sista randvillkoret ger nu $D\left(-n^2\sin(nL) + \frac{3n}{L}\cos(nL) - \frac{3}{L^2}\sin(nL)\right) = 0$. Icke–triviala lösningar ($D \neq 0$)

kräver att uttrycket inom parentes är noll: $3nL - (3 + (nL)^2)\tan(nL) = 0$