Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

19 AUGUSTI 2015

Tid och plats: 8.30—12.30 i M–huset. Lärare besöker salen ca 9.30 samt 11.30

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.

2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset, 20/8. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2015) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

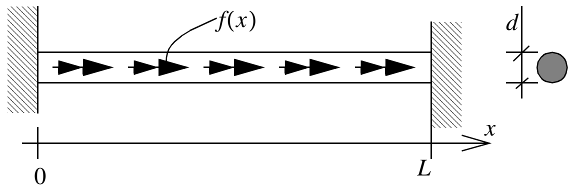
För att få poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

Resultatlista: Anslås 24/8 2015 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 4/9.

Granskning: Tisdag 1/9 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt torsdag 3/9 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i norra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.



En axel av ett lineärt elastiskt material med skjuvmodul G, är fixerad i sina båda ändar. Axelns längd är L och den belastas av ett fördelat vridmoment $f(x) = \frac{f_0 x}{L}$, där f_0 är en given konstant (moment/längd). Bestäm största vridningsvinkeln om axeln har ett massivt cirkulärt tvärsnitt med diameter d. (5p)

2.

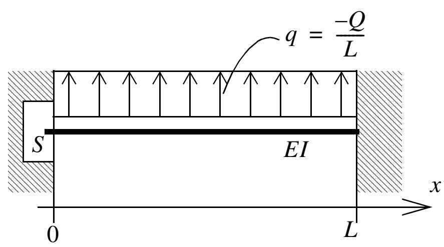
Spänningarna i en punkt i en elastisk kropp har bestämts till $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 46\ \mathrm{MPa}$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 32\ \mathrm{MPa}$, samt $\sigma_z = -20\ \mathrm{MPa}$.

a: Beräkna säkerheten mot plasticering enligt von Mises hypotes, om materialets sträckgräns vid enaxlig dragning är $\sigma_s = 260\ \mathrm{MPa}$ (1p)

b: Bestäm spänningarna på ytan (genom punkten) med normalvektorn $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^T$ (1p)

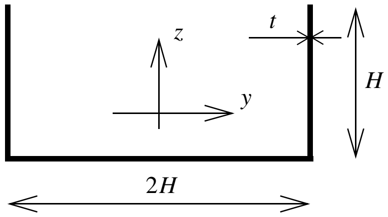
c: Vilken är den största skjuvspänning som uppträder (på något plan) i punkten? (3p)

3.



En lineärt elastisk balk med längd L och konstant böjstyvhet EI belastas med en jämnt fördelad last $q = \frac{-Q}{L}$ (Q är kraftresultanten och minustecknet betyder att kraften är riktad nedåt). Högra änden av balken är stelt infäst, medan den vänstra sidan är elastiskt infäst med styvheten S; dvs infästningsmomentet vid vänster ände är proportionellt mot balken rotation vid $x = 0$, där proportionalitetskonstanten är S. Bestäm snittmomentet $M(x)$ och tvärkraften $T(x)$ i balken för fallet då $S = \frac{EI}{L}$. (5p)

4.

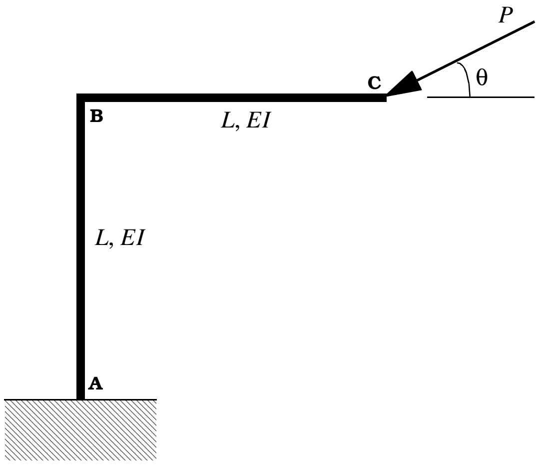


Balken i föregående uppgift har ett U–tvärsnitt med höjden H, bredden $2H$ och godstjocklek t. Låt $L = 50H$, $t = \frac{H}{10}$ och betrakta tvärsnittet som tunnväggigt ($t \ll H$).

a: I ett visst tvärsnitt längs balken har snittmomentet beräknats till $M = \frac{-19QL}{300}$. Bestäm största drag– ($\sigma > 0$ och tryckspänning ($\sigma < 0$) i snittet. Uttryck svaren i Q och H. (3p)

b: I ett annat snitt längs balken, har skjuvspänningen i de vertikal delarna av tvärsnittet beräknats till $\tau(z) = \frac{9Q}{20H^4}(9H^2 - 16z^2)$. Hur stor är tvärkraften i detta tvärsnitt? (Bidraget från den horisontella delen (med bredd $2H$) kan försummas). (2p)

5.



En ram består av en vertikal del **AB** och en horisontell del **BC**; båda delarna har samma länd L och böjstyvhet EI. Vid **A** är ramen fast inspänd och vid **C** belastas den av en kraft P vars vekningslinje bildar vinkeln θ mot horisontalplanet. Hitta de vinklar θ som gör förskjutningen av **C** är parallell med kraftens verkningslinje. Endast böjdeformationer behöver beaktas.(5p)

<u>Lösning 1:</u> Med konstant vridstyvhet GK fås vridningsvinkeln som lösningen till $\frac{d^2\varphi}{dx^x} = \frac{-f(x)}{GK}$ (Formelsamling sid 2). Här har vi $f(x) = \frac{f_0 x}{L}$ och tvärsnittsfaktorn $K = \frac{\pi d^4}{32}$ (Formelsamling sid 6), så efter integrationer fås $\varphi(x) = A + Bx - \frac{16 f_0 x^3}{3\pi G d^4 L}$. Randvillkoren $\varphi(0) = 0$ och $\varphi(L) = 0$ ger $A = 0$ respektive $B = \frac{16 f_0 L}{3\pi G d^4}$, så $\varphi(x) = \frac{16 f_0 L^2}{3\pi G d^4}\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$. Vi har då att $\frac{d\varphi}{dx} = 0$ för $\frac{x}{L} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, så

$$\varphi_{max} = \varphi\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = \frac{32 f_0 L^2}{9\sqrt{3}\pi G d^4}$$

Lösning 2a: Effektivspänningen enligt von Mise kan beräknas direkt med de givna spänningarna (Formelsamling sid 14 eller H Lundh ekv 12–4): $\sigma_e = 129{,}8\ \text{MPa}$. Säkerheten mot plasticering blir då $s = \dfrac{\sigma_s}{\sigma_e} = 2{,}0$

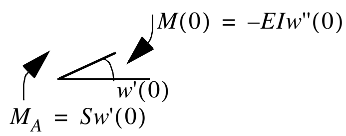
Lösning 2b: Bilda spänningstensorn enligt Lundh ekv 9–6: $S = \begin{bmatrix} 46 & 46 & 32 \\ 46 & 46 & 32 \\ 32 & 32 & -20 \end{bmatrix}\ \text{MPa}$. Spänningsvektorn på ytan med normalen $n = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T / (\sqrt{2})$ är då $s = Sn = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ (Lundh ekv 9–28). Eftersom spänningsvektorn är en noll–vektor, är både normal– och skjuvspänning på ytan noll: $\sigma = \tau = 0$ (Lundh ekv 9–29,31).

Lösning 2c: Den största skjuvspänningen fås som halva skillnaden mellan största och minsta huvudspänningen (Lundh ekv 12–12). Huvudspänningarna fås som egenvärdena till spänningstensorn: $\det(S - \sigma I) = 0$ ger $(-\sigma)(\sigma^2 - 72\sigma - 3888) = 0$. Vi finner $\sigma = 0$ och

$\sigma = (36 \pm \sqrt{36^2 + 3888})\ \text{MPa} = \begin{cases} 108\ \text{MPa} \\ -36\ \text{MPa} \end{cases}$ och får $|\tau|_{max} = \dfrac{108 - (-36)}{2}\ \text{MPa} = 72\ \text{MPa}$

Lösning 3: Vi beräknar här snittmomentet genom $M(x) = -EI\dfrac{d^2w}{dx^2}$ (Lundh ekv 7–65), där w är balkens transversalförskjutning; sedan fås tvärkraften som $T(x) = \dfrac{dM}{dx}$ (Lundh ekv 7–3). Transversalförskjutningen fås genom att lösa elastiska linjens ekvation; med konstant böjstyvhet EI har vi här (Formelsamling sid 3) $EI\dfrac{d^4w}{dx^4} = \dfrac{-Q}{L}$. Integrera 4 ggr:

$$EI\frac{d^3w}{dx^3} = A - \frac{Qx}{L} \qquad EI\frac{d^2w}{dx^2} = Ax + B - \frac{Qx^2}{2L} \qquad EI\frac{dw}{dx} = \frac{Ax^2}{2} + Bx + C - \frac{Qx^3}{6L} \qquad EIw = \frac{Ax^3}{6} + \frac{Bx^2}{2} + Cx + D - \frac{Qx^4}{24L}$$



Randvillkoren: Momentjämvikt vid ett snitt $x = 0$ ger att $M_A + M(0) = 0$, där infästningsmomentet är

$M_A = S\dfrac{dw}{dx}\Big|_{x=0} = \dfrac{EI}{L}\dfrac{dw}{dx}\Big|_{x=0}$ och snittmomentet är $M(0) = -EI\dfrac{d^2w}{dx^2}\Big|_{x=0}$. Detta ger oss randvillkoret

$\dfrac{d^2w}{dx^2}\Big|_{x=0} - \dfrac{1}{L}\dfrac{dw}{dx}\Big|_{x=0} = 0$. Övriga randvillkor är geometriska; vi har trivialt $w(0) = 0$, $w(L) = 0$, samt

$\dfrac{dw}{dx}\Big|_{x=L} = 0$.

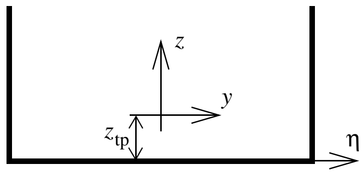
Vi finner nu integrationskonstatern

$$A = \frac{2Q}{5} \qquad B = \frac{-QL}{60} \qquad C = \frac{-QL^2}{60} \qquad D = 0$$

och får då momentet $M(x) = -EI\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{Qx^2}{2L} - Ax - B = \frac{QL}{60}\left(30\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 24\frac{x}{L} + 1\right)$ samt tvärkraften

$$T = \frac{dM}{dx} = \frac{Q}{5}\left(5\frac{x}{L} - 2\right)$$

Lösning 4a: Av ett böjande moment kring y–axeln fås normalspänningen $\sigma = \frac{Mz}{I_y}$ (Lundh ekv 7–26). För att beräkna areatröghetsmomentet kring y–axeln (I_y) och hitta max/min för z–koordinaten, måste vi först hitta yt–tyngdpunktens läge i z–led. Statiska momentet kring en axel η längs tvärsnittets underkant är



$S_\eta = Az_{zp} = 2\left(Ht\cdot\frac{H}{2}\right) + 2Ht\cdot 0$, där $A = 4Ht$ är tvärsnittsytan; man finner $z_{zp} = \frac{H}{4}$.

Areatröghetsmomentet fås nu med Steiners sats (Lundh ekv 7–42):

$I_y = \frac{Ht^3}{12} + 2Ht\cdot z_{tp}^2 + 2\left(\frac{tH^3}{12} + Ht\cdot\left(\frac{H}{2} - z_{tp}\right)^2\right)$, där de två första termerna är bidraget från den horisontella delen; om tunnväggighet beaktas kan första termen försummas och man får $I_y = \frac{5H^3t}{12} = \frac{H^4}{24}$.

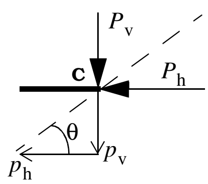
Eftersom $M = \frac{-19QL}{300} < 0$ fås störst dragspänning för $z_{\min}$: $\sigma_{\max,\text{drag}} = \sigma\left(\frac{-H}{4}\right) = \frac{\left(\frac{-19QL}{300}\right)\cdot\left(\frac{-H}{4}\right)}{\frac{H^4}{24}} = \frac{19Q}{H^2}$

Störst tryck fås i ovankant: $\sigma_{\max,\text{tryck}} = \sigma\left(\frac{3H}{4}\right) = \frac{-57Q}{H^2}$

Lösning 4b: Kraften F i en av de vertikala delarna, fås som kraftresultanten av skjuvspänningen i delen: $F = \int_{-H/4}^{3H/4} \tau t dz = \frac{9Qt}{20H^4}\int_{-H/4}^{3H/4}(9H^2 - 16z^2)dz = \frac{9Q}{200H^3}\left[9H^2z - \frac{16}{3}z^3\right]_{-H/4}^{3H/4} = \frac{3Q}{10}$. Tvärkraften är alltså

$$T = 2F = \frac{3Q}{5}$$

Lösning 5: Komponentuppdela kraften i en vertikal och horisontell del: $P_v = P\sin\theta$ samt $P_h = P\cos\theta$. Vi beräknar förskjutningarna p_v och p_h i de två kraftkomponenternas respektive riktningar och beräknar vinkeln θ så att $\tan\theta = \frac{p_v}{p_h}$.

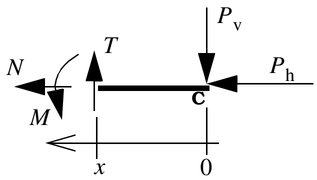


Vi använder här Castiglianos 2s sats för att beräkna förskjutningskomponenterna vid **C**: $p_\mathrm{v} = \dfrac{\partial W}{\partial P_\mathrm{v}}$

samt $p_\mathrm{h} = \dfrac{\partial W}{\partial P_\mathrm{h}}$, (Lundh ekv 15–96) där den elastiska energin med hänsyn taget till enbart böjning

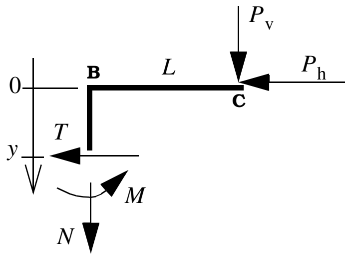
är $W = \displaystyle\int_s \frac{M^2}{2EI} ds$ (Lundh ekv 15–44); (integrationen görs över hela bärverket). Vi söker nu det

böjande momentet M i ramdelarna.



Snitta på ett avstånd x från **C**. Momentjämvikt ger att $M(x) = P_\mathrm{v}x$ och

vi har också att $\dfrac{\partial M}{\partial P_\mathrm{v}} = x$ samt $\dfrac{\partial M}{\partial P_\mathrm{h}} = 0$.



Snitta på ett avstånd y nedanför **B**. Vi får här att $M(y) = P_\mathrm{v}L - P_\mathrm{h}y$,

så $\dfrac{\partial M}{\partial P_\mathrm{v}} = L$ och $\dfrac{\partial M}{\partial P_\mathrm{h}} = -y$.

Vi får nu

$$p_\mathrm{v} = \frac{\partial W}{\partial P_\mathrm{v}} = \frac{\partial}{\partial P_\mathrm{v}}\int_s \frac{M^2}{2EI}ds = \int_s \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_\mathrm{v}}ds = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^L P_\mathrm{v}x^2dx + \int_0^L (P_\mathrm{v}L^2 - P_\mathrm{h}Ly)dy\right\} =$$

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{4P_\mathrm{v}L^3}{3} - \frac{P_\mathrm{h}L^3}{2}\right) = \frac{PL^3}{6EI}(8\sin\theta - 3\cos\theta)$$

och $p_\mathrm{h} = \displaystyle\int_s \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_\mathrm{h}}ds = \ldots = \frac{PL^3}{6EI}(2\cos\theta - 3\sin\theta)$.

Vi får då ekvationen för de sökta vinklarna: $\dfrac{p_\mathrm{v}}{p_\mathrm{h}} = \dfrac{8\sin\theta - 3\cos\theta}{2\cos\theta - 3\sin\theta} = \tan\theta$. Detta förenklas enkelt till

$2\sin\theta\cos\theta + (\sin\theta)^2 - (\cos\theta)^2 = 0$. Övergång till dubbla vinkeln ger $\sin 2\theta - \cos 2\theta = 0$ eller $\tan 2\theta = 1$,

som har lösningen $2\theta = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, dvs $\theta = \dfrac{\theta}{8} + n\dfrac{\pi}{2}$. Med $n = 0, 1, 2$ och 3 fås lösningarna

$\theta = 22{,}5°$, $\theta = 112{,}5°$, $\theta = 205{,}5°$ samt $\theta = 292{,}5°$