Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

5 JUNI 2015

Tid och plats: 14.00—18.00 i M–huset. Lärare besöker salen ca 15.00 samt 16.30

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.
2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.
3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.
Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.
4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset, 9/6. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2015) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

För att få poäng på en uppgift ska lösningsförslaget vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

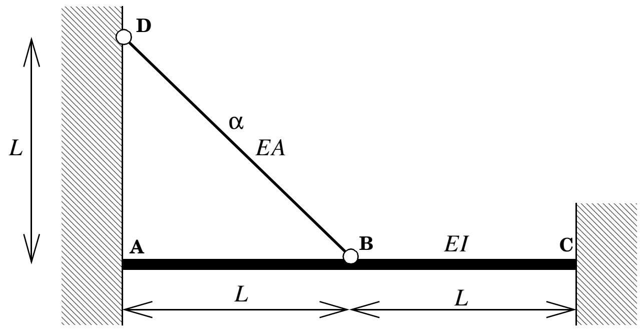
Resultatlista: Anslås **senast** 17/6 2015 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 22/6.

Granskning: Torsdag 18/6 $10^{\underline{00}}$–$12^{\underline{00}}$ samt tisdag 1/9 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i norra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

En lineärt elastisk balk **ABC** med längd $2L$ och böjstyvhet EI är fast inspänd i båda ändar. Mitt på balken är en lineärt elastisk stång **BD** med axialstyvhet EA fäst. Punkten **D** ligger på avståndet L rakt ovanför **A**. Vid en viss temperatur $T = T_0$ är konstruktionen spänningsfri; bestäm stångkraften om stången **BD** värms till $T = T_0 + \Delta T$. Stångmaterialets ländutvidgningskoefficient betecknas α och man kan anta att balkens axialstyvhet är så stor att axialförskjutningarna längs **ABC** är försumbara. (5p)

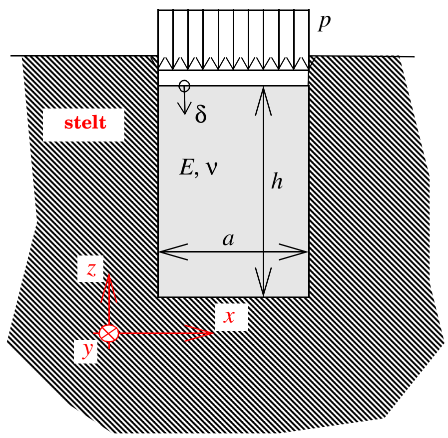


2.

En plugg med höjden $h = 40\ \text{mm}$ och kvadratiskt tvärsnitt med sidlängd $a = 15\ \text{mm}$ passar exakt in i ett hål i ett material som kan betrakts som stelt (odeformerbart). Pluggen är lineärt elastisk med $E = 4{,}0\ \text{GPa}$ och $\nu = 0{,}20$. Den fria ytan utsätts för ett tryck $p = 100\ \text{MPa}$. All friktion mellan pluggen och det omgivande stela mediet kan försummas.

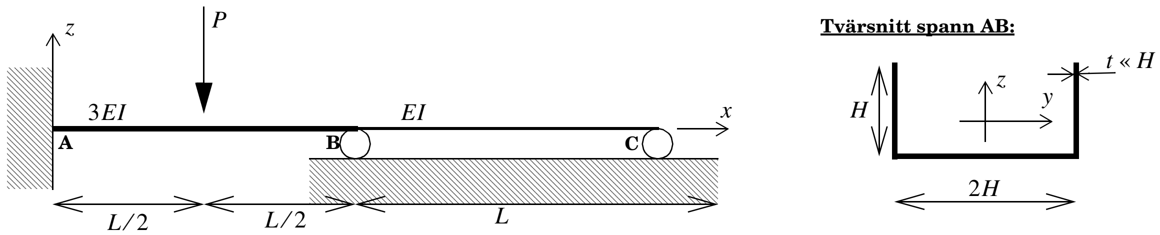
a: Beräkna effektivspänningen enligt Tresca (3p)

b: Beräkna ytans nedtryckning δ pga trycket (2p)



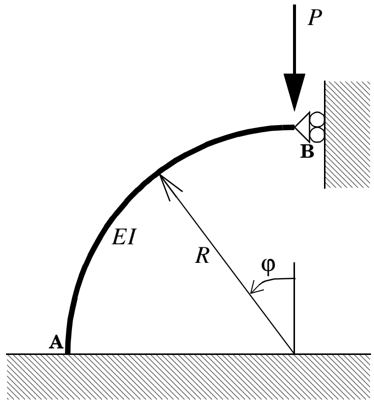
3.

En lineärt elastisk balk **ABC** har längd $2L$ och varierande böjstyvhet enligt figuren nedan. Vid vänstra änden är balken fast inspänd, medan den vilar på rullager vid **B** och **C** så att två spann, vardera med läng L, bildas. Mitt på spannet **AB**, som har böjstyvhet $3EI$, angriper en nedåtriktad kraft P.



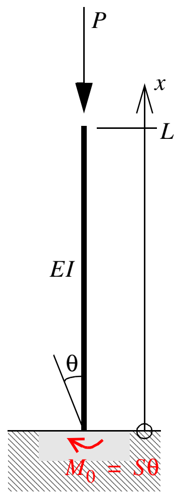
a: Beräkna och rita momentdiagrammet för balken (3p) b: I ett visst snitt i delen **AB** har momentet bestämts till $\frac{7PL}{40}$. Balken har här ett U–tvärsnitt med höjd H, bredd $2H$ och godstjocklek $t \ll H$. Låt $L = 40H$ samt $t = \frac{H}{10}$ och bestäm $|\sigma|_{max}$ i snittet (2p)

4.



En kvartscirkelbåge **AB** med krökningsradie R och konstant böjstyvhet EI belastas i sin ena ände med en kraft P riktad mot krökningscentrum. I den belastade änden (**B**) kan förskjutning ske endast i kraftens riktning, medan den andra änden (**A**) är fast inspänd. Bestäm det största böjande momentet i bågen. Krökningsradien R kan antas vara avsevärt större än någon karakteristisk tvärsnittsdimension och endast böjdeformationer i bågen behöver beaktas i analysen. (5p)

5.



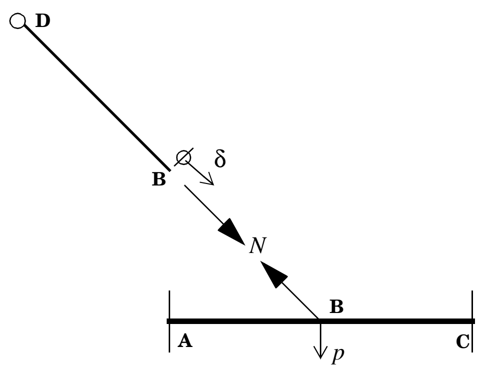
En pelare med längd L och konstant böjstyvhet EI belastas i sin fria ände av en tryckande kraft P enligt figuren till höger. Infästningen till grunden är elastisk så att inspänningsmomentet M_0 är proportionellt mot rotationsvinkeln θ, $M_0 = S\theta$ där proportionalitetskonstanten är $S = \frac{4EI}{L}$; alla translationer är förhindrade vid infästningen.

a: Härled knäckekvationen, dvs en ekvation vars lägsta positiva rot nL, $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, ger kritiska lasten med avseende på elastisk stabilitet för konstruktionen (4p)

b: Visa med utgångspunkt från något av Eulerfallen att lägsta positiva roten till knäckekvationen måste vara lägre än $\frac{\pi}{2}$ ($nL < \frac{\pi}{2}$). (1p)

Lösning 1: Stångens förlängning blir (Lundh ekv 5–3)

$$\delta = \sqrt{2}L \cdot \varepsilon = \frac{N \cdot \sqrt{2}L}{EA} + \alpha \cdot \Delta T \cdot \sqrt{2}L \qquad (1)$$

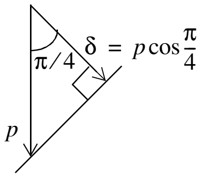


där N är den sökta stångkraften. Balkens transversalförskjutning p pga vertikalkomponenten av N fås som (formelsamling sid 12)

$$p = \frac{-N}{\sqrt{2}} \cdot \frac{L^2 \cdot 2L}{48EI}\left(3 - \frac{4L}{2L}\right) = \frac{-NL^3}{\sqrt{2} \cdot 24EI} \tag{2}$$

För små förskjutningar har vi sambandet

$$\delta = \frac{p}{\sqrt{2}} \tag{3}$$



Ekvation (1) och (2) insatt i (3) ger $N = \dfrac{-48\sqrt{2}\alpha EAI \cdot \Delta T}{48\sqrt{2}I + AL^2}$

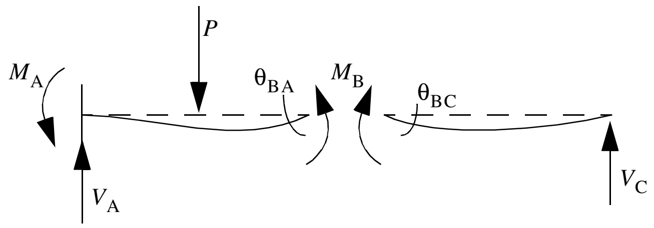
Lösning 2: Vi använder Hookes lag enligt Lundh ekv 10–7,8,9. Med $\sigma_z = -p = -100\ \mathrm{MPa}$ och

$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ fås $\sigma_x = \sigma_y = \dfrac{-\nu p}{1-\nu} = -25\ \mathrm{MPa}$ samt $\varepsilon_z = \dfrac{-p}{E}\left(1 - \dfrac{2\nu^2}{1-\nu}\right)$

a: Då friktionen kan försummas är alla skjuvspänningar noll, så de beräknade normalspänningarna är också huvudspänningar: $\sigma_1 = \sigma_2 = -25\ \mathrm{MPa}$, $\sigma_3 = -100\ \mathrm{MPa}$. Effektivspänningen enligt Trescas hypotes är då (Lundh ekv 12–14) $\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = 75\ \mathrm{MPa}$

b: Vi har att $\varepsilon_z = \dfrac{-\delta}{h}$, så $\delta = \dfrac{ph}{E}\left(1 - \dfrac{2\nu^2}{1-\nu}\right) = 0{,}9\ \mathrm{mm}$

Lösning 3a: Vi har 5 obekanta stödreaktioner (figur), men bara 3 jämviktsekvationer, så konstruktionen är statiskt obestämd. Inför snittmomentet vid **B** som statiskt övertalig och använd elementafall (formelsamling sid 9 och 11) för att teckna associerade rotationer:



$$\theta_{BA} = \frac{M_B L}{4 \cdot 3EI} + \frac{PL^2}{32 \cdot 3EI} = \frac{M_B L}{12EI} + \frac{PL^2}{96EI} \qquad \theta_{BC} = \frac{M_B L}{3EI}$$

Kompatibilitetsvillkoret $\theta_{BA} + \theta_{BC} = 0$ ger att $M_B = \dfrac{-PL}{40}$.

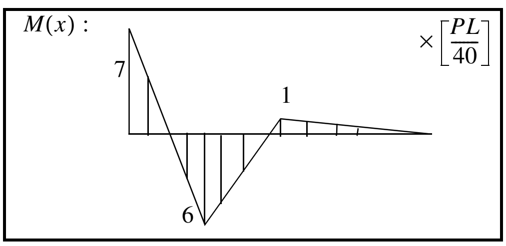
Inspänningsmomentet och den vertikala stödkraften vid **A** fås nu ur formelsamlingen sid 11:

$$V_A = \frac{3M_B}{2L} + \frac{11P}{16} = \frac{13P}{20} \qquad M_A = \frac{M_B}{2} + \frac{3PL}{16} = \frac{7PL}{40}$$

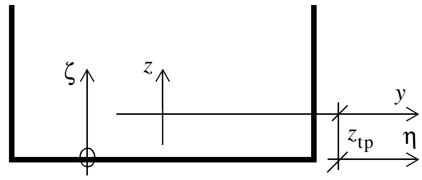
Snitta nu under kraften P och tag momentjämvikt för vänster del:

$$M\left(\frac{L}{2}\right) + M_A - V_A \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{3PL}{20}$$

Eftersom momentet är noll vid C och måste variera linärt ($\dfrac{d^2M}{dx^2} = q = 0$, Lundh ekv 7–2,3) har vi nu:



Lösning 3b: Den sökta spänningen beräknas enligt Lundh ekv 7–26; vi får $|\sigma|_{\max} = \dfrac{M_y|z|_{\max}}{I_y}$. För att beräkna areatröghetsmomentet I_y samt $|z|_{\max}$, måste vi hitta yttyngdpunkten.



Låt y och z vara tp–axlar och inför ett hjälpsystem (η, ζ) enligt figuren. Beräkna nu statiska momentet m.a.p. η –axeln:

$$S_\eta = \int_A \zeta dA = z_{\text{tp}} \cdot A = 2 \cdot Ht \cdot \frac{H}{2} + 2Ht \cdot 0 = H^2 t$$

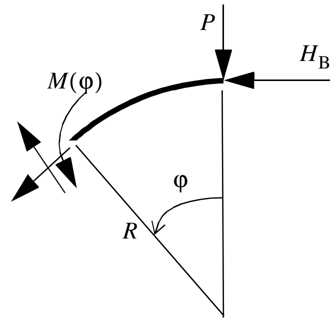
Med $A = 4Ht$ fås $z_{\text{tp}} = \dfrac{H}{4}$, så $|z|_{\max} = z_{\max} = \dfrac{3H}{4}$. Med Steiners sats (Lundh ekv 7–42) fås nu

$$I_y = 2\left(\frac{tH^3}{12} + Ht\left(\frac{H}{2} - z_{\text{tp}}\right)^2\right) + \frac{2Ht^3}{12} + 2Htz_{\text{tp}}^2 \approx \frac{5H^3 t}{12}$$

(där vi försummat termen som är kubisk i t ($t \ll H$)). Insättning ger

$$|\sigma|_{\max} = \sigma_{\max} = \frac{\frac{7PL}{40} \cdot \frac{3H}{4}}{\frac{5H^3 t}{12}} = \frac{63PL}{200H^2 t} = \begin{Bmatrix} L = 40H \\ t = H/10 \end{Bmatrix} = \frac{126P}{H^2}$$

Lösning 4: Låt H_{B} beteckna den horisontella stödreaktionen vid B. Momentjämvikt kring ett snitt vid vinkelkoordinaten φ ger då



$$M(\varphi) = PR\sin\varphi - H_{\text{B}}R(1 - \cos\varphi) \qquad (4)$$

Vi behöver alltså bestämma H_{B}; bågen är statiskt obestämd, så jämviktsekvationer räcker inte. Enklast används Castiglianos 2a sats: $\delta = \dfrac{\partial W_i}{\partial H_{\text{B}}}$, där $\delta = 0$ är förskjutningen i kraftens (H_{B}) riktning.

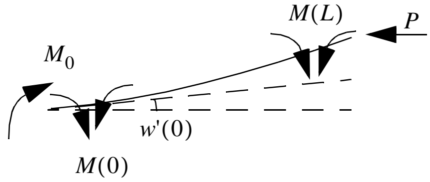
Med hänsyn taget endast till böjning är $W_i = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{M^2}{2EI} R d\varphi$, så vi får $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\partial M}{\partial H_{\text{B}}} \frac{M}{EI} R d\varphi = 0$. Från ekv (4) fås $\dfrac{\partial M}{\partial H_{\text{B}}} = -R(1 - \cos\varphi)$ vilket ger oss

$$\frac{R^3}{EI} \int_0^{\pi/4} (P(\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) - H_{\text{B}}(1 - \cos\varphi)^2) d\varphi = 0$$

Ur detta får vi $\dfrac{P}{2} - H_{\text{B}}\left(\dfrac{3\pi}{4} - 2\right) = 0 \Rightarrow H_{\text{B}} = \dfrac{2P}{3\pi - 8}$. Ur ekv (4) får vi nu snittmomentet i intevalländarna: $M(0) = 0$, $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{(3\pi - 10)PR}{3\pi - 8} \approx -0{,}40PR$. I intervallet får vi extremvärde då

$\dfrac{dM}{d\varphi} = PR\cos\varphi - H_{\text{B}}R\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi \approx 0{,}619$ rad ; $M(0{,}619) \approx 0{,}32PR$. $\therefore |M|_{\max} \approx 0{,}40PR$

Lösning 5a: Lösningen till den styrande differentialekvationen ger att transversalförskjuningen i det utböjda läget är (Lundh ekv 8–66) $w(x) = A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx)$, där $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$. Integrationskonstanterna (A, B, C, D) bestäms av randvillkor; vi behöver 2 villkor i var ände av balken.



$\boxed{x = 0}$: här har vi trivialt att $w(0) = 0$; momentjämvikt ger att $M_0 + M(0) = 0$. Med $M = -EIw''$ och $M_0 = Sw'(0) = \frac{4EI}{L}w'(0)$, kan det andra villkoret alltså skrivas $w''(0) - \frac{4}{L}w'(0) = 0$

$\boxed{x = L}$: Momentjämvikt ger $M(L) = 0$ så $w''(L) = 0$. Vertikal kraftjämvikt kräver att $V(L) = 0$; från Lundh ekv 8–59 har vi att $V = T + Nw'$, så med $N = -P$ och $T = -EIw'''$ kan villkoret skrivas $w'''(L) + n^2 w'(L) = 0$.

Sammanfattningsvis har vi:

$$(1):\ w(0) = 0 \qquad (2):\ w''(0) - \frac{4}{L}w'(0) = 0 \qquad (3):\ w''(L) = 0 \qquad (4):\ w'''(L) + n^2 w'(L) = 0$$

Villkoren (1) och (3) ger att $A = -C = D\tan(nL)$. Villkoret (2) ger nu

$-Cn^2 - \frac{4}{L}(B + Dn) = 0 \Rightarrow B = D\left(\frac{n^2L}{4}\tan(nL) - n\right)$. Vi har då

$$w(x) = D\left(\tan(nL) + n\left(\frac{nL}{4}\tan(nL) - 1\right)x - \tan(nL)\cos(nx) + \sin(nx)\right)$$

Det 4e randvillkoret kräver då $\frac{Dn^3}{4}(nL\tan(nL) - 4) = 0$, så icke–trivial lösning fås då $nL\tan(nL) = 4$

Lösning 5b: En styvare struktur, och därmed högre kritisk last, fås om inspänningsstyvheten S ökar. Speciellt fås Eulers 1a fall då $S \to \infty$; då är $P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$ (Lundh ekv 8–19). Då är

$(nL)^2 = \frac{P_{kr}L^2}{EI} = \frac{\pi^2}{4}$. Med S ändlig, har vi alltså $nL < \frac{\pi}{4}$

(Numeriskt finner man $nL \approx 1{,}2646$, så $P_{kr} = (nL)^2\frac{EI}{L^2} \approx \frac{0{,}162\pi^2 EI}{L^2}$)