Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

15 APRIL 2015

Tid och plats: 8.30—12.30 i V–huset. Lärare besöker salen 9.30 samt 11.00

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.

2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler 16/4. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2014) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

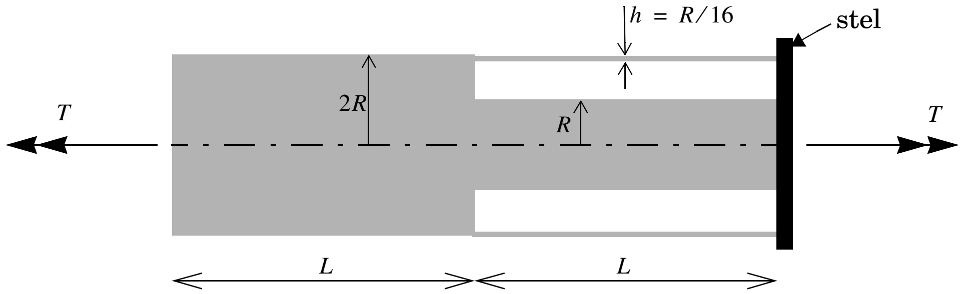
Resultatlista: Anslås senast 24/4 2014 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast vecka 18.

Granskning: Tisdag 28/4 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt tisdag 5/5 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i nya M–huset)

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

En axelkonstruktion består av två delar, vardera med längd L. Den vänstra halvan har ett massivt cirkulärt tvärsnitt med radie $2R$; höger del utgörs av ett tunnväggigt rör, medeleradie $2R$ och godstjocklek $h = \frac{R}{16}$, samt av en centralt placerad cirkulär massiv axel med radie R. De två delarna i den högra halvan är i axeländen sammanfogade med en skiva som kan betraktas som stel. Axelmaterialet är lineärt elastiskt–idealplastiskt med skjuvmodul G och sträckgräns τ_s vid ren skjuvning. Bestäm vid det vridmoment $T = T_s$ som ger begynnande plasticering. (5p)



2.

Spänningarna i en punkt i en lineärt elastisk konstruktion ges av spänningstensorn

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -44 & 4 \\ -44 & -2 & -88 \\ 4 & -88 & 18 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

a: Bestäm normal– och skjuvspänning på planet (genom punkten) med normalen $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ (2p)

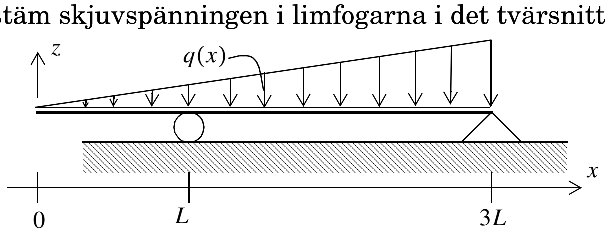
b: Bestäm den största drag– respektive tryckspänning som uppträder i punkten (i någon riktning). (3p)

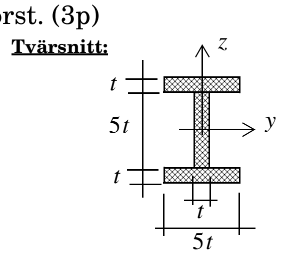
3.

En träbalk med längden $3L$ har tillverkats genom att limma ihop tre brädor till ett I–tvärsnitt med mått enligt figur nedan. Den är upplagd på två stöd så att ett spann med längden $2L$ samt ett överhäng på L bildats. Konstruktionen belastas med en utbredd last $q(x) = (2Qx)/(3L)^2$ (kraft/längd) enligt figuren.

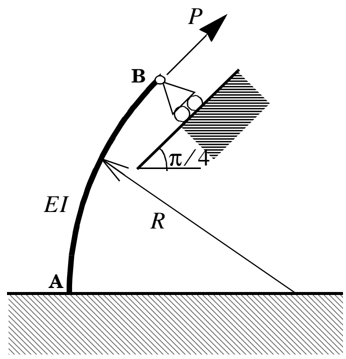
a: Bestäm tvärkraften $T(x)$ (2p)

b: Bestäm skjuvspänningen i limfogarna i det tvärsnitt där $|T|$ är störst. (3p)





4.



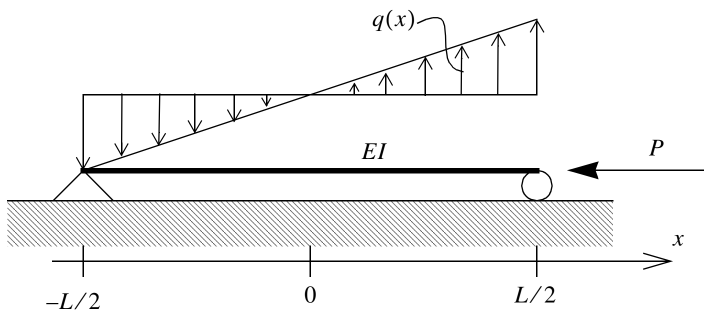
Bågkonstruktion **AB** har formen av ett cirkelsegment med radie R och öppningsvinkel $\frac{\pi}{4}$; materialet är lineärt elastiskt och bågen har böjstyvheten EI. Vid **A** är konstruktionen fast inspänd och vid **B** är den ledad till ett rullstöd som endast medger rörelse i tangentens riktning. Vid **B** belastas bågen av en kraft P som är riktad i tangentens riktning. Bestäm samtliga stödreaktioner. (5p)

5.

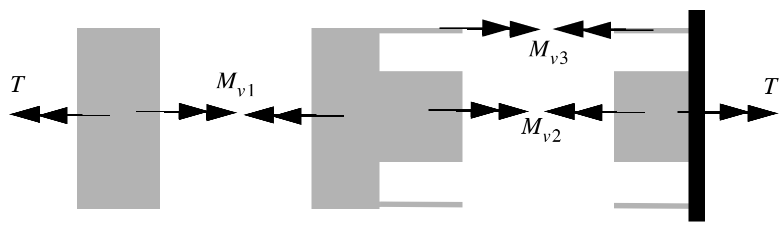
En fritt upplagd balk med längd L och konstant böjstyvhet EI, belastas av en transversallast med intensiteten (kraft/längd) $q(x) = \frac{2q_0x}{L}$ (q_0 är en given konstant och koordinaten x enligt figur nedan), samt en tryckande axialkraft P.

a: Beräkna snittmomentet $M(x)$ med hänsyn taget till axialkraftens inverkan. (3p)

b: Bestäm balkens transversalförskjutning $w(x)$ med hänsyn taget till axialkraftens inverkan. (2p)



Lösning 1: Vi måste bestämma snittmomenten i de olika delarna; snitta genom vänster och höger del:



Jämvikt för vänster och höger del ger

$$M_{v1} = T \tag{1}$$

respektive

$$M_{v2} + M_{v3} = T \tag{2}$$

Här är M_{v1} momentet i den vänstra halvan av konstruktionen medan M_{v2} är momentet i den centrala massiva axeln i högra delen; M_{v3} är momentet i det tunnväggiga röret.

Ytterligare (lineärt oberoende) jämviktsekvationer finns inte att tillgå; istället använder vi oss av kompatibilitetsvillkoret

$$\varphi_2 = \varphi_3 \tag{3}$$

dvs att vridningsvinkeln för den centrala axeln och det tunnväggiga röret måste vara lika. Hans Lundh ekv 6–11 och 6–6 ger $\varphi_2 = \dfrac{2M_{v2}L}{G\pi R^4}$ respektive $\varphi_3 = \dfrac{M_{v3}L}{G2\pi(2R)^3\left(\frac{R}{16}\right)} = \dfrac{M_{v3}L}{G\pi R^4}$. Insättning i (3) ger

$$2M_{v2} = M_{v3} \tag{4}$$

Ekv (2) och (4) ger $M_{v2} = \frac{T}{3}$ samt $M_{v3} = \frac{2T}{3}$

Hans Lundh ekv 6–19 ger oss nu det snittmoment som ger begynnande plasticering i någon massiv axel. För vänstra delen fås

$$M_{vs1} = T_s = \frac{\pi}{2\cdot 2R}(2R)^4\tau_s = 4\pi R^3\tau_s$$

För den centrala delen av höger del fås

$$M_{vs2} = \frac{T_s}{3} = \frac{\pi}{2\cdot R}R^4\tau_s = \frac{\pi R^3\tau_s}{2} \Rightarrow T_s = \frac{3\pi R^3\tau_s}{2}$$

För det tunnväggiga röret utnyttjar vi enklast Lundh ekv 6–4

$$\tau_s = \frac{M_{vs3}}{2\pi(2R)^2\left(\frac{R}{16}\right)} = \frac{2\cdot\frac{2T_s}{3}}{\pi R^3} \Rightarrow T_s = \frac{3\pi R^3\tau_s}{4}$$

Vi ser att den del som plasticerar först är det tunnväggiga röret; detta sker då $T = T_s = \dfrac{3\pi R^3\tau_s}{4}$

Lösning 2a: Spänningsvektorn på en yta med normal $\boldsymbol{n}$ fås som (Lundh ekv 9–28)

$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}20 & 0 & -10\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ MPa. Den efterfrågade normalspänningen fås som projektionen av $\boldsymbol{s}$ på normalen (Lundh ekv 9–29): $\sigma = \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n} = 10\ \mathrm{MPa}$

Skjuvspänningen erhålls med Pythagoras sats (Lundh 9–31): $\tau = \sqrt{|s|^2 - \sigma^2} = 0$ (Eftersom skjuvspänningen är noll på ytan, vet vi att $\sigma = 10\ \mathrm{MPa}$ är en huvudspänning).

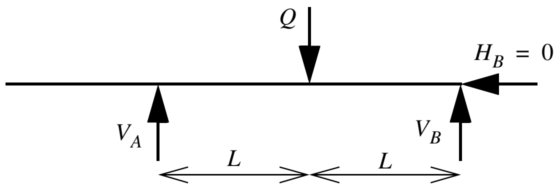
Lösning 2b: Vi söker största och minsta huvudspänningarna. Huvudspänningarna fås som egenvärdena till spänningstensorn $\boldsymbol{S}$: $\det(\boldsymbol{S} - \sigma\boldsymbol{I}) = 0$. Denna ekvation kan uttryckas med invarianterna (Lundh 9–39); Med invarianterna beräknade enligt Lundh 9–40 fås

$\sigma^3 - 28\sigma^2 - 9540\sigma + 97200 = 0$ (alla siffervärden har satts in i MPa). Vi vet att en rot är $\sigma = 10\ (\mathrm{MPa})$;

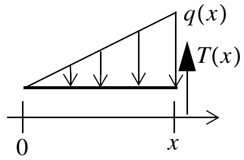
division med $(\sigma - 10)$ ger $\sigma^2 - 18\sigma - 9720 = 0$ som har lösningen $\sigma = \begin{cases}-90\ \mathrm{MPa}\\ 108\ \mathrm{MPa}\end{cases}$. Våra huvudspänningar är då: $\sigma_1 = 108\ \mathrm{MPa}$ $\sigma_2 = 10\ \mathrm{MPa}$ $\sigma_3 = -90\ \mathrm{MPa}$

Största dragspänningen är $108\ \mathrm{MPa}$ — största tryckspänningen är $90\ \mathrm{MPa}$

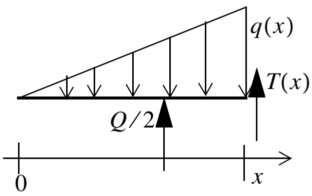
Lösning 3a: Lastresultanten av de utbredda lasten blir $\int_0^{3L} q(x)\,dx = Q$ Vi börjar med att beräkna stödreaktionerna. Vertikal kraftjämvikt ger $V_A + V_B - Q = 0$; momentjämvikt kring **B** ger $V_A \cdot 2L - Q \cdot L = 0$. Vi finner $V_A = V_B = \frac{Q}{2}$. För att komma åt tvärkraften måste vi snitta och ställa upp jämvikt.



Vi börjar med ett snitt i intervallet $0 < x < L$. Vertikal jämvikt ger $T - q(x) \cdot \frac{x}{2} = 0$, så $T(x) = \frac{Qx^2}{9L^2}$. Vi ser att $T(x)$ är strängt växande i detta intervall så $|T|_{\max} = T(L) = \frac{Q}{9}$



Betrakta nu intervallet $L < x < L$. Jämvikt kräver att $T(x) + \frac{Q}{2} - q(x) \cdot \frac{x}{2} = 0$, ur vilket vi löser $T(x) = \frac{Qx^2}{9L^2} - \frac{Q}{2}$. Vi har åter ett strängt växande $T(x)$ så den till beloppet största tvärkraften måste uppträda i något av intervall ändarna. Vi finner $T(L) = \frac{-7Q}{18}$ och

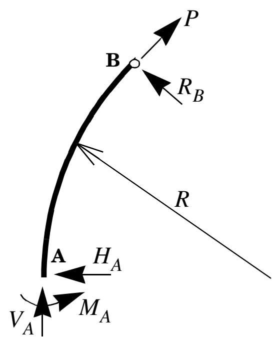


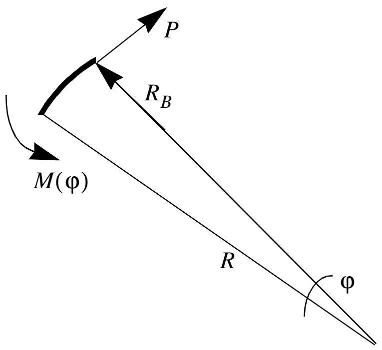
$T(3L) = \frac{Q}{2}$

Tvärkraften i balken blir $T(x) = \begin{cases} \frac{Qx^2}{9L^2} & 0 < x < L \\ \frac{Qx^2}{9L^2} - \frac{Q}{2} & L < x < L \end{cases}$

Lösning 3b: Skjuvspänningen beräknas enligt Hans Lundh ekv 7–48; den (till beloppet) största skjuvspänningen uppträder i det snitt där tvärkraften är (till beloppet) störst. I vår fall har vi $|T|_{\max} = T_{\max} = \frac{Q}{2}$ (i snittet närmast högra stödet). För att komma åt skjuvspänningen i limfogen, betraktar vi ett snitt genom livet omedelbart nedanför övre flänsen (eller omedelbart ovanför undrea flänsen); snittets längd är då $b = t$. Vi har då $A^* = 5t^2$ (flänsarean); avståndet från flänsens yttyngdpunkt ner till y–axeln är $3t$, så vi får $S_{A^*} = A^* \cdot 3t = 15t^3$. Areatröghetmomentet (m.a.p. y–axeln) är $I = I_y = 2\left(\frac{5t \cdot t^3}{12} + 5t^2 \cdot (3t)^2\right) + \frac{t \cdot (5t)^3}{12} = \frac{405t^4}{4}$ (första termen är bidraget från de två flänsarna; andra termen är bidraget från livet). Insättning i 7–48 ger nu $\tau_{max} = \dfrac{\dfrac{Q}{2}\cdot 15t^3}{\dfrac{405t^4}{4}\cdot t} = \dfrac{2Q}{27t^2}$

Lösning 4: Förutom stödkraften vid **B**, har vi en vertikal och en horisontell stödkraft samt ett stödmoment vid **A**. Vi har bara tillgång till tre jämviktsekvationer, så konstruktionen är statiskt obestämd. Inför R_B som statiskt övertalig och använd Castiglianos 2s sats (Lundh 15–96) för att beräkna den associerade förskjutningen r_B. Kompatibilitetsvillkoret $r_B = 0$ ger den extra ekvation som behövs.





Momentjämvikt vid snittet kräver att

$M(\varphi) + R_B R\sin\varphi - PR(1-\cos\varphi) = 0$, så vi får

$M(\varphi) = PR(1-\cos\varphi) - R_B R\sin\varphi$ och $\dfrac{\partial M}{\partial R_B} = -R\sin\varphi$. Med hänsyn taget till enbart böjdeformationer har vi den elastiska energin $W = \int_s \dfrac{M^2}{2EI}ds$ (där integrationen görs längs bågen). Vi får då

$$\frac{\partial W}{\partial R_B} = \frac{\partial}{\partial R_B}\left[\int_0^{\pi/4}\frac{M^2}{2EI}Rd\varphi\right] = \int_0^{\pi/4}\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_B}d\varphi$$

Vi får då (Castigliano)

$$r_B = \frac{\partial W}{\partial R_B} = \int_0^{\pi/4}\frac{(R_B\sin\varphi - P(1-\cos\varphi))}{EI}\sin\varphi R^3 d\varphi = \frac{R^3}{EI}\left[R_B\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right) - P\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = 0$$

så $R_B = \dfrac{2(3-2\sqrt{2})P}{\pi-2} \approx 0{,}30P$.

Hela systemet: Vertikal jämvikt ger $V_A + P\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + R_B\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow V_A = \dfrac{8-4\sqrt{2}-\pi\sqrt{2}}{2(\pi-2)}P \approx -0{,}92P$

Horisontell jämvikt kräver $H_A - P\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + R_B\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow H_A = \dfrac{8-8\sqrt{2}+\pi\sqrt{2}}{2(\pi-2)}P \approx 0{,}49P$

Momentjämvikt kring **A** ger

$M_A + R_B R\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - PR\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 0 \Rightarrow M_A = \dfrac{\pi(2-\sqrt{2})+6(1-\sqrt{2})}{2(\pi-2)}PR \approx -0{,}28PR$

Lösning 5a: Vi beräknar snitt momentet med $M = -EI\dfrac{d^2w}{dx^2}$ (Lundh ekv 7–65), där w är transversalförskjutningen. Förskjutningen ges av lösningen till $\dfrac{d^4w}{dx^4} + n^2\dfrac{d^2w}{dx^2} = \dfrac{2q_0x}{EIL}$, där $n = \sqrt{\dfrac{P}{EI}}$ (Lundh ekv 8–63, med $N = -P$). Den allmänna lösningen ges av summan av en partikulär– och homogenlösningen: $w = w_p + w_h$. Homogenlösningen ges av Lundh ekv 8–66; en partikulärlösning kan hittas genom ansattsen $w_p = cx^3$. Insättning i differentialekvationen ger $0 + n^2 \cdot 6cx = \frac{2q_0 x}{EIL}$, vilket ger $c = \frac{q_0}{3n^2 EIL}$. Lösningen blir då $w(x) = \frac{q_0 x^3}{3n^2 EIL} + A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx)$; eftersom lösningen måste vara antisymmetrisk, $w(x) = -w(-x)$, har vi att $A = C = 0$ så

$$w(x) = \frac{q_0 x^3}{3n^2 EIL} + Bx + D\sin(nx) \tag{5}$$

Två deriveringar ger $\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{2q_0 x}{n^2 EIL} - Dn^2 \sin(nx)$ och alltså $M(x) = Dn^2 EI\sin(nx) - \frac{2q_0 x}{n^2 L}$. Randvillkoret $M\left(\frac{\pm L}{2}\right) = 0$ ger att

$$D = \frac{q_0 L^4}{(nL)^4 EI \sin\left(\frac{nL}{2}\right)} \tag{6}$$

Vi får då $M(x) = \frac{q_0 L^2 \sin(nx)}{(nL)^2 \sin\left(\frac{nL}{2}\right)} - \frac{2q_0 Lx}{(nL)^2} = \frac{q_0 L^2}{(nL)^2}\left(\frac{\sin(nx)}{\sin\left(\frac{nL}{2}\right)} - 2\frac{x}{L}\right)$

<u>Lösning 3b:</u> Ekvation 6 insatt i 5 tillsammans med randvillkoret $w\left(\frac{\pm L}{2}\right) = 0$ ger

$B = \frac{-q_0 L^3}{(nL)^2 EI}\left(\frac{1}{12} + \frac{2}{(nL)^2}\right)$. Insättning av B och D i ekv 5 ger då

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{12(nL)^2 EI}\left(4\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(1 + \frac{24}{(nL)^2}\right)\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{12\sin(nx)}{(nL)^2 \sin\left(\frac{nL}{2}\right)}\right)$$