TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

21 AUGUSTI 2014

Lösningar

Tid och plats: 14.00—18.00 i M–huset. Lärare besöker salen ca 15.00 samt 16.45

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.

2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler 22/8. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2014) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

För att få poäng på en uppgift ska lösningen vara läslig och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

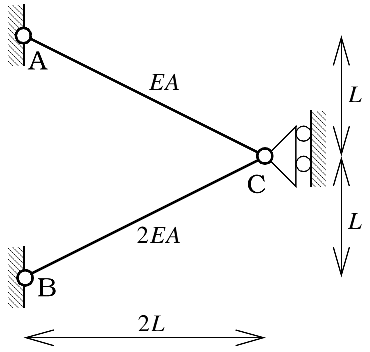
Resultatlista: Anslås **senast** 1/9 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 5/9.

Granskning: Tisdag 2/9 12–13 samt torsdag 4/9 12–13 på inst. (2a våningen (plan 3) i södra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

Stångbärverket i figuren består av två stänger, **AC** med axialstyvheten EA och **BC** med axialstyvheten $2EA$, som är förenade i en punkt vars horisontalförskjutning är förhindrad. Stången **BC** har längden $\sqrt{5}L$, medan **AC** har ett passningsfel $\Delta \ll L$ så dess längd före monteringen är $\sqrt{5}L + \Delta$. Bestäm hur mycket knuten **C** förskjuts på grund av passningsfelet. (5p)



2.

Spänningstillståndet i en punkt i en belastad kropp ges av spänningstensorn

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -50 & 35 \\ -50 & -14 & 26 \\ 35 & 26 & -29 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

Materialet är lineärt elastiskt–ideal plastiskt med sträckgräns $\sigma_s = 198 \text{ MPa}$.

a: Bestäm normalspänningen, σ, och skjuvspänningen, τ, på planet med normalvektorn

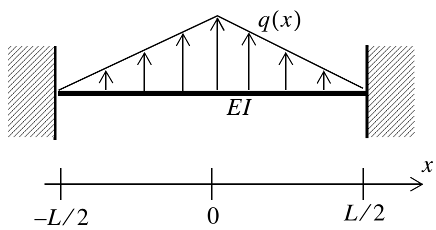
$n = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ (2p)

b: Hur stor är säkerheten mot plasticering enligt Trescas hypotes? (2p)

c: Hur stor är säkerheten mot plasticering enligt von Mises hypotes? (1p)

3.

En dubbelsidigt fast inspänd balk, tillverkad av ett lineärt elastiskt material, har konstant böjstyvhet EI och längd L. Den belastas av en utbredd last med intensitet (kraft/längd)



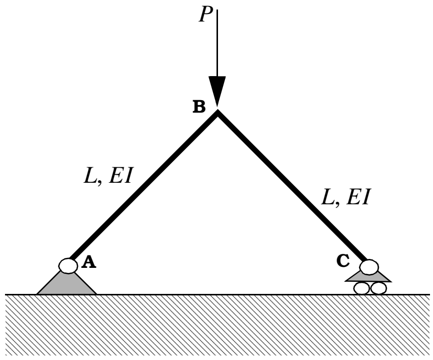
$$q(x) = \begin{cases} -q_0\left(1 + 2\frac{x}{L}\right) & -L/2 < x < 0 \\ -q_0\left(1 - 2\frac{x}{L}\right) & 0 < x < L/2 \end{cases}$$

a: Bestäm snittmomentet $M(x)$ i balkens högra halva ($0 \le x \le \frac{L}{2}$). (3p)

b: Maximala snittmomentet är $\frac{5q_0L^2}{96}$. Balken ska ha ett massivt cirkulärt tvärsnitt med diameter D. Hur stort måste D vara, om maximalt tillåten normalspänning är $\sigma_{till} = 10 \text{ MPa}$ och om $L = 3{,}0 \text{ m}$ och $q_0 = 1{,}0 \text{ kN/m}$? (2p)

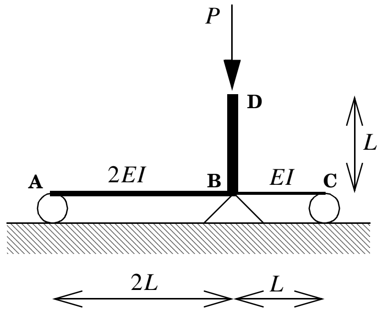
4.

Ramen **ABC** består av två balkar, vardera med längden L och böjstyvheten EI. Vid **B** angriper en vertikalt riktad kraft P; bestäm förskjutningen av stödet vid **C**. Endast böjdeformationer behöver beaktas. (5p)



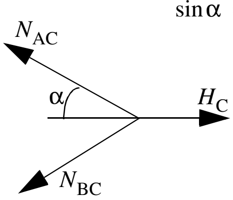
5.

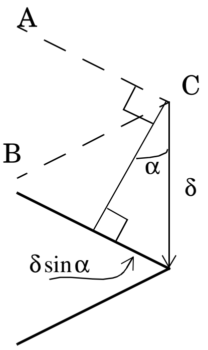
Beräkna kritisk last $P = P_{\mathrm{kr}}$ med avseende på elastisk stabilitet för konstruktionen i figuren. Observera att balkarna i de två spannen, **AB** respektive **BC**, har olika längd och olika böjstyvhet. Flexibiliteten hos pelaren **DB** får försummas (d v s den får betraktas som oändligt styv). (5p)



Lösning 1: Frilägg knut **C**. Vertikal jämvikt ger att de båda stångkrafterna måste vara lika: $N_{\mathrm{BC}} = N_{\mathrm{AC}}$.

$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$





Betrakta en förskjutning δ nedåt av knuten;

stången **AC** förlängs då $\delta_{\mathrm{AC}} = -\Delta + \delta\sin\alpha$, där $-\Delta$ är stångens hoptryckningen då knutpunkt **C** befinner sig i det ursprungliga läget, medan förlängningen av **BC** blir $\delta_{\mathrm{BC}} = -\Delta\sin\alpha$.

Med (Lundh ekv 2–14) $\delta_{\mathrm{AC}} = \dfrac{N_{\mathrm{AC}} \cdot \sqrt{5}L}{EA}$ samt $\delta_{\mathrm{BC}} = \dfrac{N_{\mathrm{BC}} \cdot \sqrt{5}L}{2EA}$ fås

$$N_{\mathrm{AC}} = \frac{EA}{\sqrt{5}L}\left(\frac{\delta}{\sqrt{5}} - \Delta\right) \qquad N_{\mathrm{BC}} = \frac{EA}{\sqrt{5}L}\left(\frac{-2\delta}{\sqrt{5}}\right)$$

Jämviktssambandet ger då $\dfrac{-2\delta}{\sqrt{5}} = \dfrac{\delta}{\sqrt{5}} - \Delta$, så $\delta = \dfrac{\sqrt{5}\Delta}{3}$ (nedåt).

Lösning 2a: Spänningsvektorn $\boldsymbol{s}$ på en yta med normalen $\boldsymbol{n}$ fås som (Lundh ekv 9–28) $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n}$. Med den givna spänningstensorn $\boldsymbol{S}$ finner vi att $\boldsymbol{s}$ blir en noll–vektor. Både normal– och skjuvspänningen blir alltså noll: $\sigma = \tau = 0$. (Eftersom skjuvspänningen är noll, är $\sigma = 0$ en huvudspänning)

Lösning 2b: Effektivspänningen enligt Trescas hypotes, fås som skillnaden mellan största och minsta huvudspänningen (Lundh ekv 12–14 eller formelsamling sid 14). Huvudspänningarna fås som egenvärdena till spänningstensorn (se Lundh avsnitt 9.2.4).

$$\det(\boldsymbol{S} - \sigma\boldsymbol{I}) = (-\sigma)(\sigma^2 + 48\sigma - 3780)\ [\text{MPa}]^3 = 0$$

Vi finner då $\sigma_1 = 42\ \text{MPa}$, $\sigma_2 = 0\ \text{MPa}$ samt $\sigma_3 = -90\ \text{MPa}$ och effektivspänningen enligt Tresca blir

$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = 132\ \text{MPa}$; säkerheten mot plasticering är då $\dfrac{\sigma_s}{\sigma_e} = 1{,}5$

<u>Lösning 2c:</u> Effektivspänningen enligt von Mises flythypotes räknas ut enlig Lundh ekv 12–4 eller 12–6, alternativt formelsamlingen sid 14. Med det givna spänningstillståndet fås $\sigma_e \approx 117\ \text{MPa}$

och säkerheten mot plasticering enlig von Mises blir $\dfrac{\sigma_s}{\sigma_e} \approx 1{,}7$

<u>Lösning 3a:</u> Vi använder den styrande differentialekvationen (Lundh ekv 7–67) för att beräkna transversalförskjutningen $w(x)$; snittmomentet fås sedan som $M = -EIw''$ (Lundh ekv 7–65). Med konstant böjstyvhet har vi differentialekvationen $\dfrac{d^4w}{dx^4} = \dfrac{q(x)}{EI}$; för intervallet $0 < x < \dfrac{L}{2}$ får vi efter integration $w = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dfrac{q_0L^4}{60EI}\left[\left(\dfrac{x}{L}\right)^5 - \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{x}{L}\right)^4\right]$, där A, B, C och D är integrationskonstanter.

Symmetrivillkoret $w(x) = w(-x)$ ger att $B = D = 0$.

Vi har då $w' = 2Cx + \dfrac{q_0L^3}{60EI}\left[5\left(\dfrac{x}{L}\right)^4 - 10\left(\dfrac{x}{L}\right)^3\right]$ och randvillkoret $\left.\dfrac{dw}{dx}\right|_{x = L/2} = 0$ ger att $C = \dfrac{q_0L^2}{64EI}$. (A kan nu beräknas med randvillkoret $w\left(\dfrac{L}{2}\right) = 0$, men behövs inte här).

Nu fås $w'' = 2C + \dfrac{q_0L^2}{60EI}\left[20\left(\dfrac{x}{L}\right)^3 - 30\left(\dfrac{x}{L}\right)^2\right] = \dfrac{q_0L^2}{EI}\left[\dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{L}\right)^3 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{L}\right)^2\right]$ och momentet blir

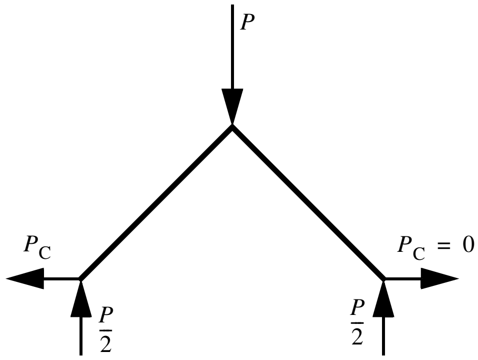
$$M = -EIw'' = \frac{q_0L^2}{96EI}\left[48\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 32\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\right]$$

<u>Lösning 3b:</u> Normalspänningen beräknas som (Lundh ekv–26) $\sigma = \dfrac{Mz}{I}$, där $I = \dfrac{\pi D^4}{64}$ för ett massivt cirkulärt tvärsnitt (formelsamling sid 6). Vi får då

$$\sigma_{\max} = \frac{Mz_{\max}}{I} = \frac{\dfrac{5q_0L^2}{96}\cdot\dfrac{D}{2}}{\dfrac{\pi D^4}{64}} = \frac{5q_0L^2}{3\pi D^3}$$

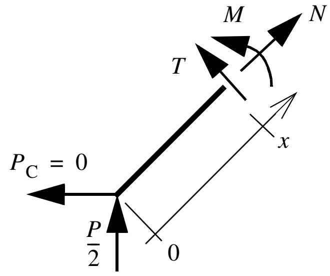
Villkoret $\sigma_{\max} \le \sigma_{\text{till}}$ ger oss $D \ge \left(\dfrac{5q_0L^2}{3\pi\sigma_{\text{till}}}\right)^{1/3} \approx 78\ \text{mm}$

<u>Lösning 4:</u> Om vi inför en horisontell kraft $P_C = 0$ vid stödet **C**, kan den sökta förskjutningen beräknas med Castiglianos 2:a sats (Lundh ekv 15–96): $\delta_C = \frac{\partial W}{\partial P_C}$. Här är W den elastiska energin i strukturen; om endast böj-deformation beaktas är (Lundh ekv 15–52) $W = \int_s \frac{M^2}{2EI} ds$, där integrationen är över hela bärverkets längd. Kraft– och momentjämvikt ger stödreaktioner enligt figuren.



Snitta nu mellan **A** och **B**, på ett godtyckligt avstånd x från **A**. Momentjämvikt ger snittmomentet

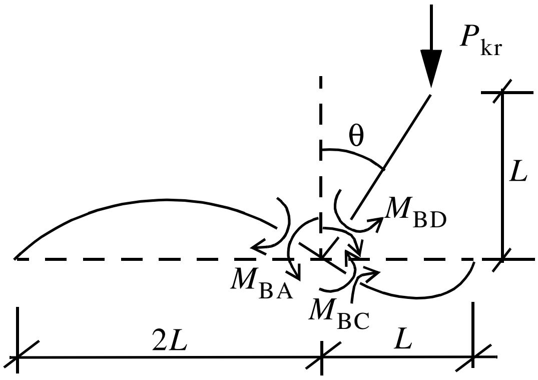
$$M(x) = \frac{Px}{2\sqrt{2}} + \frac{P_C x}{\sqrt{2}} = \frac{Px}{2\sqrt{2}}$$



så $\frac{\partial M}{\partial P_C} = \frac{x}{\sqrt{2}}$. Castiglianos 2:a sats ger nu, med utnyttjande av symmetrin

$$\delta_C = 2\int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_C} dx = \frac{P}{2EI}\int_0^L x^2 dx = \frac{PL^3}{6EI}$$

<u>Lösning 5</u>: Betrakta konstruktionen i utböjt läge; vinkeln θ är liten, d v s vi tittar på konstruktionen just i det läge den knäcker ut. I figuren är endast snittmomenten vid **B** utritade — normal– och tvärkrafter visas ej. Momentjämvikt vid **B** för pelaren **BD** ger ett $M_{BD} = P_{kr}\theta L$ där vi utnyttjat att $\sin\theta \approx \theta$.



Elementarfall sid 9 ger $\theta = M_{BA} \cdot \frac{2L}{3 \cdot 2EI}$ samt $\theta = M_{BC} \cdot \frac{L}{3EI}$ för delarna **AB** respektive **BC**. Detta ger att $M_{BA} = M_{BC} = \frac{3EI}{L} \cdot \theta$. Momentjämvikt för den utsnittade delen vid **B** ger att $M_{BD} - M_{BA} - M_{BC} = 0$, så att vi får $P_{kr}\theta L - 2 \cdot \frac{3EI}{L}\theta = 0$. Ur detta löses $P_{kr} = \frac{6EI}{L^2}$

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

21 AUGUSTI 2014

Lösningar

Tid och plats: 14.00—18.00 i M–huset. Lärare besöker salen ca 15.00 samt 16.45

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.

2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler 22/8. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2014) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

För att få poäng på en uppgift ska lösningen vara läslig och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

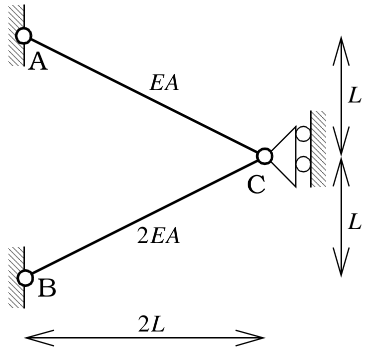
Resultatlista: Anslås **senast** 1/9 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 5/9.

Granskning: Tisdag 2/9 12–13 samt torsdag 4/9 12–13 på inst. (2a våningen (plan 3) i södra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

Stångbärverket i figuren består av två stänger, **AC** med axialstyvheten EA och **BC** med axialstyvheten $2EA$, som är förenade i en punkt vars horisontalförskjutning är förhindrad. Stången **BC** har längden $\sqrt{5}L$, medan **AC** har ett passningsfel $\Delta \ll L$ så dess längd före monteringen är $\sqrt{5}L + \Delta$. Bestäm hur mycket knuten **C** förskjuts på grund av passningsfelet. (5p)



2.

Spänningstillståndet i en punkt i en belastad kropp ges av spänningstensorn

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -50 & 35 \\ -50 & -14 & 26 \\ 35 & 26 & -29 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

Materialet är lineärt elastiskt–ideal plastiskt med sträckgräns $\sigma_s = 198 \text{ MPa}$.

a: Bestäm normalspänningen, σ, och skjuvspänningen, τ, på planet med normalvektorn

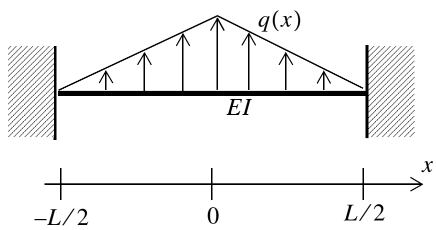
$n = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ (2p)

b: Hur stor är säkerheten mot plasticering enligt Trescas hypotes? (2p)

c: Hur stor är säkerheten mot plasticering enligt von Mises hypotes? (1p)

3.

En dubbelsidigt fast inspänd balk, tillverkad av ett lineärt elastiskt material, har konstant böjstyvhet EI och längd L. Den belastas av en utbredd last med intensitet (kraft/längd)



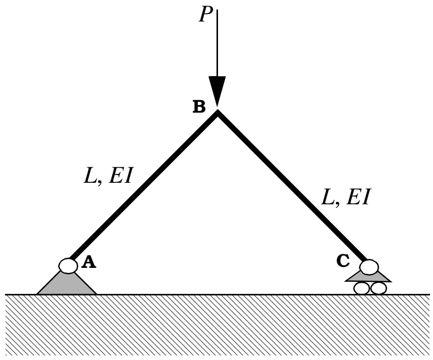
$$q(x) = \begin{cases} -q_0\left(1 + 2\frac{x}{L}\right) & -L/2 < x < 0 \\ -q_0\left(1 - 2\frac{x}{L}\right) & 0 < x < L/2 \end{cases}$$

a: Bestäm snittmomentet $M(x)$ i balkens högra halva ($0 \le x \le \frac{L}{2}$). (3p)

b: Maximala snittmomentet är $\frac{5q_0L^2}{96}$. Balken ska ha ett massivt cirkulärt tvärsnitt med diameter D. Hur stort måste D vara, om maximalt tillåten normalspänning är $\sigma_{till} = 10 \text{ MPa}$ och om $L = 3{,}0 \text{ m}$ och $q_0 = 1{,}0 \text{ kN/m}$? (2p)

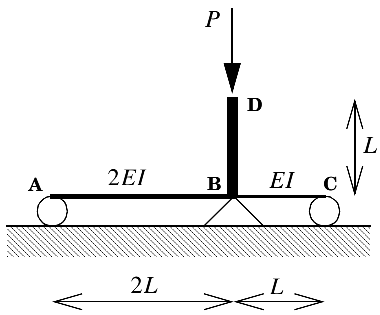
4.

Ramen **ABC** består av två balkar, vardera med längden L och böjstyvheten EI. Vid **B** angriper en vertikalt riktad kraft P; bestäm förskjutningen av stödet vid **C**. Endast böjdeformationer behöver beaktas. (5p)



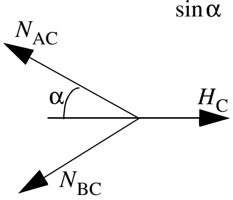
5.

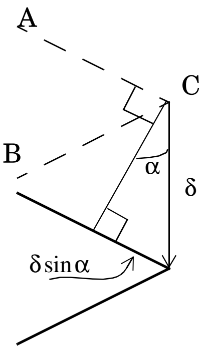
Beräkna kritisk last $P = P_{kr}$ med avseende på elastisk stabilitet för konstruktionen i figuren. Observera att balkarna i de två spannen, **AB** respektive **BC**, har olika längd och olika böjstyvhet. Flexibiliteten hos pelaren **DB** får försummas (d v s den får betraktas som oändligt styv). (5p)



Lösning 1: Frilägg knut **C**. Vertikal jämvikt ger att de båda stångkrafterna måste vara lika: $N_{BC} = N_{AC}$.

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$





Betrakta en förskjutning δ nedåt av knuten;

stången **AC** förlängs då $\delta_{AC} = -\Delta + \delta\sin\alpha$, där $-\Delta$ är stångens hoptryckningen då knutpunkt **C** befinner sig i det ursprungliga läget, medan förlängningen av **BC** blir $\delta_{BC} = -\Delta\sin\alpha$.

Med (Lundh ekv 2–14) $\delta_{AC} = \frac{N_{AC}\cdot\sqrt{5}L}{EA}$ samt $\delta_{BC} = \frac{N_{BC}\cdot\sqrt{5}L}{2EA}$ fås

$$N_{AC} = \frac{EA}{\sqrt{5}L}\left(\frac{\delta}{\sqrt{5}} - \Delta\right) \qquad N_{BC} = \frac{EA}{\sqrt{5}L}\left(\frac{-2\delta}{\sqrt{5}}\right)$$

Jämviktssambandet ger då $\frac{-2\delta}{\sqrt{5}} = \frac{\delta}{\sqrt{5}} - \Delta$, så $\delta = \frac{\sqrt{5}\Delta}{3}$ (nedåt).

Lösning 2a: Spänningsvektorn $\boldsymbol{s}$ på en yta med normalen $\boldsymbol{n}$ fås som (Lundh ekv 9–28) $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n}$. Med den givna spänningstensorn $\boldsymbol{S}$ finner vi att $\boldsymbol{s}$ blir en noll–vektor. Både normal– och skjuvspänningen blir alltså noll: $\sigma = \tau = 0$. (Eftersom skjuvspänningen är noll, är $\sigma = 0$ en huvudspänning)

Lösning 2b: Effektivspänningen enligt Trescas hypotes, fås som skillnaden mellan största och minsta huvudspänningen (Lundh ekv 12–14 eller formelsamling sid 14). Huvudspänningarna fås som egenvärdena till spänningstensorn (se Lundh avsnitt 9.2.4).

$$\det(\boldsymbol{S} - \sigma\boldsymbol{I}) = (-\sigma)(\sigma^2 + 48\sigma - 3780)\ [\text{MPa}]^3 = 0$$

Vi finner då $\sigma_1 = 42\ \text{MPa}$, $\sigma_2 = 0\ \text{MPa}$ samt $\sigma_3 = -90\ \text{MPa}$ och effektivspänningen enligt Tresca blir

$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = 132\ \text{MPa}$; säkerheten mot plasticering är då $\dfrac{\sigma_s}{\sigma_e} = 1{,}5$

Lösning 2c: Effektivspänningen enligt von Mises flythypotes räknas ut enlig Lundh ekv 12–4 eller 12–6, alternativt formelsamlingen sid 14. Med det givna spänningstillståndet fås $\sigma_e \approx 117\ \text{MPa}$ och säkerheten mot plasticering enlig von Mises blir $\dfrac{\sigma_s}{\sigma_e} \approx 1{,}7$

Lösning 3a: Vi använder den styrande differentialekvationen (Lundh ekv 7–67) för att beräkna transversalförskjutningen $w(x)$; snittmomentet fås sedan som $M = -EIw''$ (Lundh ekv 7–65). Med konstant böjstyvhet har vi differentialekvationen $\dfrac{d^4w}{dx^4} = \dfrac{q(x)}{EI}$; för intervallet $0 < x < \dfrac{L}{2}$ får vi efter integration $w = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dfrac{q_0L^4}{60EI}\left[\left(\dfrac{x}{L}\right)^5 - \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{x}{L}\right)^4\right]$, där A, B, C och D är integrationskonstanter.

Symmetrivillkoret $w(x) = w(-x)$ ger att $B = D = 0$.

Vi har då $w' = 2Cx + \dfrac{q_0L^3}{60EI}\left[5\left(\dfrac{x}{L}\right)^4 - 10\left(\dfrac{x}{L}\right)^3\right]$ och randvillkoret $\left.\dfrac{dw}{dx}\right|_{x = L/2} = 0$ ger att $C = \dfrac{q_0L^2}{64EI}$. (A kan nu beräknas med randvillkoret $w\left(\dfrac{L}{2}\right) = 0$, men behövs inte här).

Nu fås $w'' = 2C + \dfrac{q_0L^2}{60EI}\left[20\left(\dfrac{x}{L}\right)^3 - 30\left(\dfrac{x}{L}\right)^2\right] = \dfrac{q_0L^2}{EI}\left[\dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{L}\right)^3 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{L}\right)^2\right]$ och momentet blir

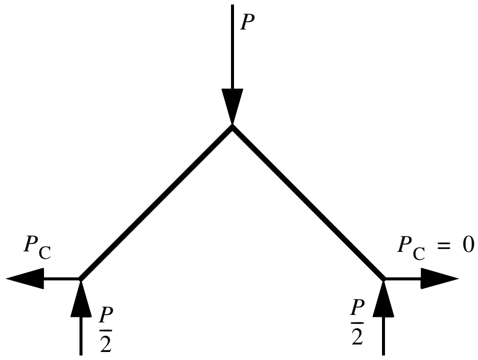
$$M = -EIw'' = \frac{q_0L^2}{96EI}\left[48\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 32\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\right]$$

Lösning 3b: Normalspänningen beräknas som (Lundh ekv–26) $\sigma = \dfrac{Mz}{I}$, där $I = \dfrac{\pi D^4}{64}$ för ett massivt cirkulärt tvärsnitt (formelsamling sid 6). Vi får då

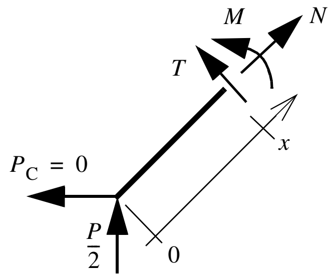
$$\sigma_{\text{max}} = \frac{Mz_{\text{max}}}{I} = \frac{\dfrac{5q_0L^2}{96}\cdot\dfrac{D}{2}}{\dfrac{\pi D^4}{64}} = \frac{5q_0L^2}{3\pi D^3}$$

Villkoret $\sigma_{\text{max}} \le \sigma_{\text{till}}$ ger oss $D \ge \left(\dfrac{5q_0L^2}{3\pi\sigma_{\text{till}}}\right)^{1/3} \approx 78\ \text{mm}$

Lösning 4: Om vi inför en horisontell kraft $P_C = 0$ vid stödet **C**, kan den sökta förskjutningen beräknas med Castiglianos 2:a sats (Lundh ekv 15–96): $\delta_C = \frac{\partial W}{\partial P_C}$. Här är W den elastiska energin i strukturen; om endast böj-deformation beaktas är (Lundh ekv 15–52) $W = \int_s \frac{M^2}{2EI} ds$, där integrationen är över hela bärverkets längd. Kraft– och momentjämvikt ger stödreaktioner enligt figuren.



Snitta nu mellan **A** och **B**, på ett godtyckligt avstånd x från **A**. Momentjämvikt ger snittmomentet

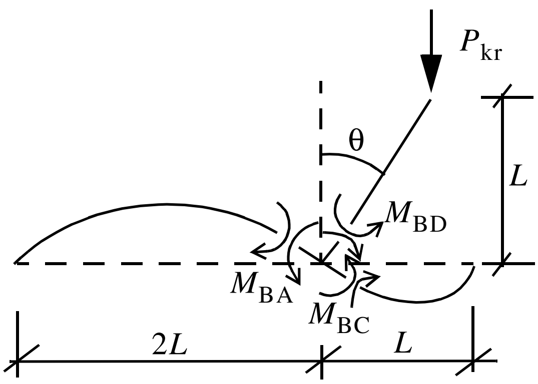


$$M(x) = \frac{Px}{2\sqrt{2}} + \frac{P_C x}{\sqrt{2}} = \frac{Px}{2\sqrt{2}}$$

så $\frac{\partial M}{\partial P_C} = \frac{x}{\sqrt{2}}$. Castiglianos 2:a sats ger nu, med utnyttjande av symmetrin

$$\delta_C = 2\int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_C} dx = \frac{P}{2EI}\int_0^L x^2 dx = \frac{PL^3}{6EI}$$

Lösning 5: Betrakta konstruktionen i utböjt läge; vinkeln θ är liten, d v s vi tittar på konstruktionen just i det läge den knäcker ut. I figuren är endast snittmomenten vid **B** utritade — normal– och tvär-krafter visas ej. Momentjämvikt vid **B** för pelaren **BD** ger ett $M_{BD} = P_{kr}\theta L$ där vi utnyttjat att $\sin\theta \approx \theta$. Elementarfall sid 9 ger $\theta = M_{BA} \cdot \frac{2L}{3 \cdot 2EI}$ samt



$\theta = M_{BC} \cdot \frac{L}{3EI}$ för delarna **AB** respektive **BC**. Detta ger att $M_{BA} = M_{BC} = \frac{3EI}{L} \cdot \theta$. Momentjämvikt för den utsnittade delen vid **B** ger att $M_{BD} - M_{BA} - M_{BC} = 0$, så att vi får $P_{kr}\theta L - 2 \cdot \frac{3EI}{L}\theta = 0$. Ur detta löses $P_{kr} = \frac{6EI}{L^2}$