Institutionen för tillämpad mekanik, Chalmers tekniska högskola

Lösningar

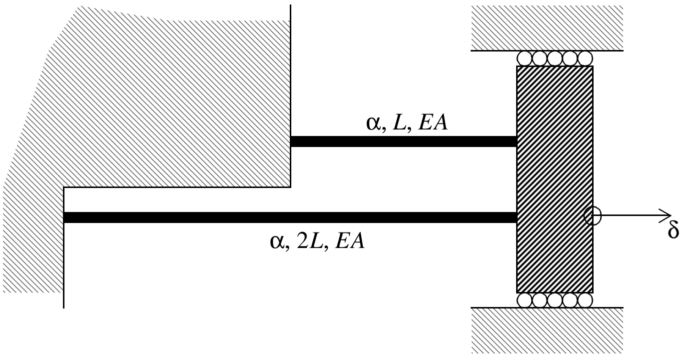
TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081
3 JUNI 2014

Tid och plats:	14.00—18.00 i M–huset. Lärare besöker salen ca 15.00 samt 16.30
Hjälpmedel:	**1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000. **2.** *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling. **3.** Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar. Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används. **4.** Typgodkänd miniräknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505
Lösningar:	Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset, 4/6. Se även kurshemsidan.
Poängbedömning:	Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2014) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen. **För att få poäng på en uppgift ska den vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.**
Resultatlista:	Anslås **senast** 17/6 2017 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 19/6.
Granskning:	Onsdag 18/6 $10^{\underline{00}}$–$12^{\underline{00}}$ samt tisdag 2/9 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i norra trapphuset, nya M–huset).

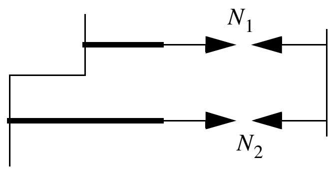
Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

En ventil är lagrad så att den endast kan röra sig horisontellt. Den är infäst med två stänger som har längderna L respektive $2L$. Båda stängerna har tvärsnittsyta A och är tillverkade av ett linjärt elastiskt material med elasticitetsmodul E och termisk längdutvidgningskoefficient α. Beräkna ventilens förskjutning δ, då båda stängerna ges en temperaturhöjning ΔT. Deformationer i grunden och hos ventilen kan försummas. (5p)



Lösning 1: Jämvikt för ventilen ger att



$$N_1 + N_2 = 0 \tag{1}$$

Förlängningen av övre stången blir

$$\delta = \frac{N_1 L}{EA} + \alpha L \cdot \Delta T \tag{2}$$

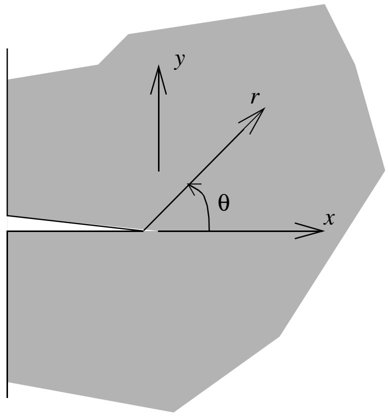
medan undre stångens förlängning blir

$$\delta = \frac{N_2 \cdot 2L}{EA} + \alpha \cdot 2L \cdot \Delta T \tag{3}$$

Vi har tre ekvationer och tre obekanta (N_1, N_2, δ). Man finner att $\delta = \frac{4\alpha L \cdot \Delta T}{3}$ (och

$N_1 = -N_2 = \frac{\alpha EA \cdot \Delta T}{3}$)

2.



Betrakta en skiva i (x, y)–planet med en kantspricka, enligt figuren. För en viss typ av belastning blir spänningarna nära sprickspetsen

$$\tau_{xz} = \frac{-K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2} \qquad \tau_{yz} = \frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}$$

och övriga spänningskomponenter noll ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$), enligt lineär elasticitetsteori; här är (r, θ) polära koordinater med origo i sprickspetsen och K_{III} är en integrationskonstant som beror av skivans geometri och hur belastningen läggs på.

a: Bestäm huvudspänningarna nära sprickspetsen. (2p)

b: Bestäm det område kring sprickspetsen som plasticerar enligt von Mises hypotes, dvs bestäm det område inom vilket $\sigma_e \geq \sigma_s$ där σ_e är effektivspänningen enligt von Mises och σ_s är materialets sträckgräns vid enaxlig dragning. (3p)

Lösning 2a: Huvudspänningarna fås som egenvärdena till spänningstensorn $S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$

($\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{S}$), Lundh ekv 9–6. $\det(\boldsymbol{S} - \sigma\boldsymbol{I}) = 0$ ger $-\sigma^3 + \sigma(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = 0$, som har rötterna

$$\sigma = 0, \ \sigma = \pm\sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{\pm K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{\pm K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}$$

Lösning 2b: Effektivspänningen enligt von Mises beräknas enlig formelsamling sid 14 eller Lundh ekv 12–4; med $\sigma_e \geq \sigma_s$ fås $\sqrt{3(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \geq \sigma_s$. Insättning av givna skjuvspänningar ger

$$\sqrt{\frac{3}{2\pi r}}K_{\mathrm{III}}\sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2\pi r}}K_{\mathrm{III}} \geq \sigma_s$$

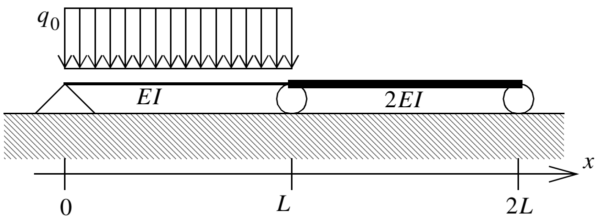
Det plasticerade området är alltså cirkelskivan $r \leq \frac{3}{2\pi}\left(\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sigma_s}\right)^2$, med centrum i sprickspetsen.

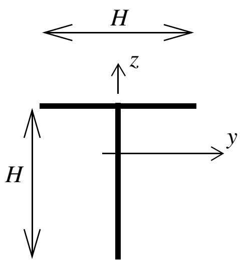
3.

En balk vilar på tre stöd så att två spann, vardera med längden L, bildas. Vänstra spannet har böjstyvheten EI och belastas med en nedåtriktad utbred last men konstant intensitet q_0 (kraft/längd); högra spannet har böjstyvheten $2EI$.

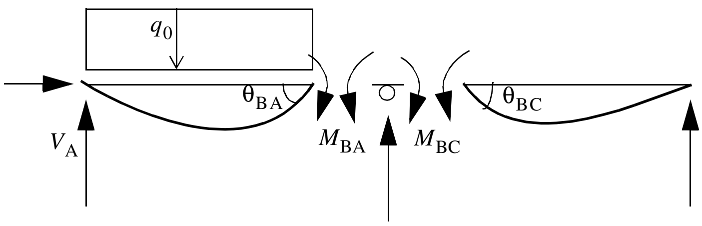
a: Beräkna det böjande momentet $M(x)$ i det vänstra spannet ($0 < x < L$) (3p)

b: I ett visst tvärsnitt är snittmomentet $|M| = \frac{25q_0L^2}{288}$. Balken har ett T–tvärsnitt där både livhöjd och flänsbredd är H, och godtjockleken är $t \ll H$. Bestäm godstjockleken t om tillåten normalspänning är $\sigma_{\text{till}} = 50\ \text{MPa}$, $q_0 = 16\ \text{kN/m}$, $L = 1{,}00\ \text{m}$ och $H = 0{,}10\ \text{m}$ (2p)





Lösning 3a: För att beräkna momentet måste vi snitta genom bärverket och ställa upp momentjämvikt. Detta kräver att vi känner stödreaktionerna; vi har fyra sådana stödkrafter, men bara tillgång till tre jämviktsekvationer, så stukturen är statiskt obestämd. Vi använder här kraftmetod för att få tillgång till den extra ekvation som krävs. Snitta bärverket på ömse sidor mittstödet:



(Tvärkrafterna i snittet ej utritade). Momentjämvikt för det utsnittade mittstödet visar att $M_{BA} = M_{BC}$; fortsättningsvis betecknas detta moment M_B. De två vinklarna fås med formelsamlingen sid 9 som

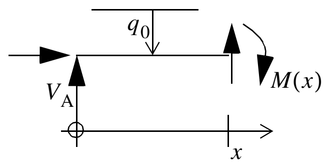
$$\theta_{BA} = \frac{q_0L^3}{24EI} - \frac{M_B}{3EI} \qquad \theta_{BC} = \frac{-M_B}{3 \cdot 2EI}$$

Kompatibilitetsvillkoret $\theta_{BA} + \theta_{BC} = 0$ ger då $M_B = \frac{q_0L^2}{12}$.

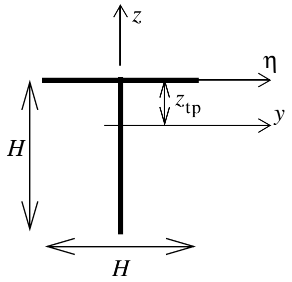
Momentjämvikt kring mittsnittet för det vänstra spannet ger nu

$$\overset{\frown}{\text{B:}}\quad M_B + V_A \cdot L - q_0 \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{5q_0L}{12}$$

Snitta nu vid något x sådant att $0 < x < L$; momentjämvikt kring snittet ger att $M(x) + V_A \cdot x - q_0 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$, ur vilket vi löser



$$M(x) = \frac{q_0 L^2}{12}\left(6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 5\frac{x}{L}\right)$$



Lösning 3b: Normalspänningen vid böjning beräknas enligt Lundh ekv 7–26 som $|\sigma|_{\max} = \frac{|M||z|_{\max}}{I_y}$. För att beräkna areatröghetsmomentet I_y och för att hitta $|z|_{\max}$, måste vi hitta areatyngdpunktens läge i tvärsnittet. Statiska momentet med avseende på η–axeln är

$$S_\eta = A \cdot z_{\text{tp}} = Ht \cdot 0 + Ht \cdot \frac{H}{2}$$

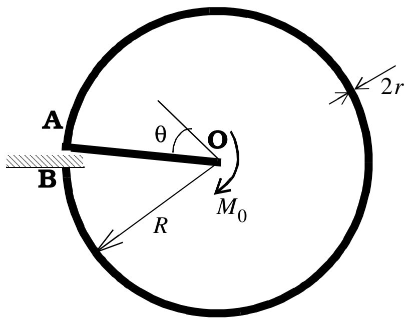
Med tvärsnittsarean $A = 2Ht$ fås $z_{\text{tp}} = \frac{H}{4}$, så $|z|_{\max} = \frac{3H}{4}$.

Areatröghetsmomentet fås med Steiners sats (Lundh ekv 7–42) som

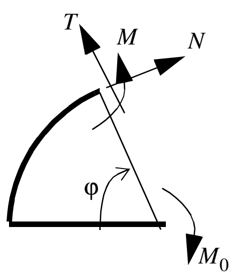
$$I_y = \frac{Ht^3}{12} + Ht \cdot z_{\text{tp}}^2 + \frac{tH^3}{12} + Ht \cdot \left(\frac{H}{2} - z_{\text{tp}}\right)^2 \approx \frac{5H^3 t}{24}$$

(De två första termerna i mellanledet är bidraget från flänsen och termen som är kubisk i t försummas ($t \ll H$)). Vi har nu $|\sigma|_{\max} = \frac{|M||z|_{\max}}{I_y} = \frac{25 q_0 L^2 \cdot 3H \cdot 24}{288 \cdot 4 \cdot 5H^3 t} = \frac{5 q_0 L^2}{16 H^2 t} = \sigma_{\text{till}}$, så $t = \frac{5 q_0 L^2}{16 H^2 \sigma_{\text{till}}} = 10\ \text{mm}$

4.



En tråd med massivt cirkulärt tvärsnitt, radie r, har böjts till en (öppen) cirkel **AB** med krökningsradie $R \gg r$. Ena änden, **B**, hålls fixerad och ett moment M_0 i centrumpunkten **O** påförs via armen **OA**. Hur stor måste tvärsnittsradien r vara, om armen OA får vridas högst $\theta = 0{,}10\ \text{rad}$ då $M_0 = 1{,}0\ \text{Nm}$? Materialet är lineärt elastiskt med $E = 200\ \text{GPa}$ och cirkelradien är $R = 10\ \text{mm}$. Deformationerna av armen **OA** kan försummas. (5p)



Lösning 4: Snitta vid godtycklig vinkelkoordinat φ; kraftjämvikt visar att normal– och tvärkraft måste vara noll. Momentjämvikt ger att snittmomentet blir $M = M_0$. Den elastiska energin i ringen blir då (Lundh ekv 15–52)

$$W = \int_s \frac{M^2}{2EI} ds = \frac{M_0^2}{2EI} \int_0^{2\pi} R d\varphi = \frac{\pi M_0^2 R}{EI}$$

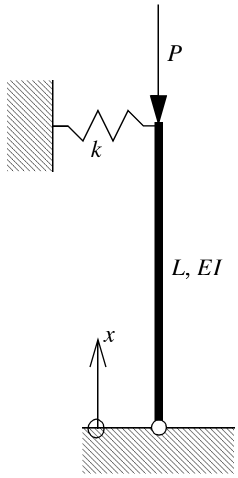
Den sökta vinkeln fås nu med Castiglianos 2a sats (Lundh ekv 15–97)

$$\theta = \frac{\partial W}{\partial M_0} = \frac{2\pi R M_0}{EI}$$

Med $\theta \le 0{,}10\ \text{rad}$ och (formelsamling sid 6) $I = \frac{\pi r^4}{4}$ fås då $r \ge \left[\frac{8RM_0}{E \cdot 0{,}10\ \text{rad}}\right]^{1/4} \approx 1{,}4\ \text{mm}$

5.

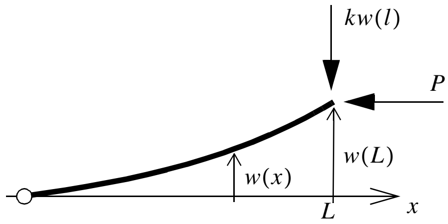
En pelare med längd L och konstant böjstyvhet EI är momentfritt (ledat) infäst till grunden, samt stöds i horisontell ledd av en fjäder med styvhet k i sin topp. Pelaren belastas av en tryckande axiell kraft P.



a: Ange, med tydlig motivering, de randvillkor som krävs för att ta fram knäckekvationen, dvs en ekvation vars lägsta positiva rot ger kritisk last med avseende på elastisk stabilitet. (3p)

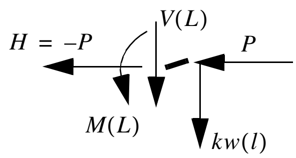
b: Använd randvillkoren för att ta fram knäckekvationen och visa att dess lösning är det lägsta av $P_{\text{kr}} = kL$ och $P_{\text{kr}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ (2p)

Lösning 5a: Vid $x = 0$ är transversalförskjutningen förhindrad och snittmomentet är noll; med sambandet $M = -EIw''$ (Lundh ekv 7–65) fås då de två villkoren



$$w(0) = 0 \qquad w''(0) = 0 \tag{4}$$

Momentjämvikt vid $x = L$ ger att $M(L) = 0$, så



$$w''(L) = 0 \tag{5}$$

Vertikal kraftjämvikt vid $x = L$ kräver att $V(L) + kw(L) = 0$; vi har också att vertikalkraften (Lundh ekv 8–59) kan skrivas $V = T + Nw' = T - Pw'$, där $T = -EIw'''$. Efter division med $-EI$ kan då jämviktsvillkoret skrivas

$$w'''(L) + n^2 w'(L) - \frac{k}{EI} w(L) = 0 \tag{6}$$

där $n^2 = \frac{P}{EI}$

Lösning 5b: Då knäcklasten uppnåtts blir pelarens utböjning (Lundh ekv 8–66) $w(w) = A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx)$. Randvillkoren (4) ger då

$$A + C = 0 \qquad -Cn^2 = 0$$

så $A = C = 0$. Randvillkoren (5) och (6) kräver då att

$$-Dn^2\sin(nL) = 0 \tag{7}$$

respektive

$$B\left(n^2 - \frac{kL}{EI}\right) - D\sin(nL) = 0 \tag{8}$$

Icke–triviala lösningar kräver att antingen $B \neq 0$ och/eller $D \neq 0$. Med $D = 0$ är ekv (7) satisfierad och ekv (8) kräver att $n^2 = \frac{P_{\text{kr}}}{EI} = \frac{kL}{EI}$, dvs $P_{\text{kr}} = kL$. Om $D \neq 0$ kräver ekv (7) att $\sin(nL) = 0$, dvs att $(nL)^2 = \pi^2$ (lägsta positiva roten), så $P_{\text{kr}} = n^2EI = (nL)^2\frac{EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$; ekv (8) är då satisfierad med

$B = 0$

(Den kritiska lasten för strukturen är den lägsta av de båda lösningarna).