Lösningar

**TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081**

**13 JANUARI 2014**

Tid och plats: 8.30—12.30 i M–huset. Lärare besöker salen 9.30 samt 11.00

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.

**2.** *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

**3.** Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

**4.** Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler 14/1. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2013) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

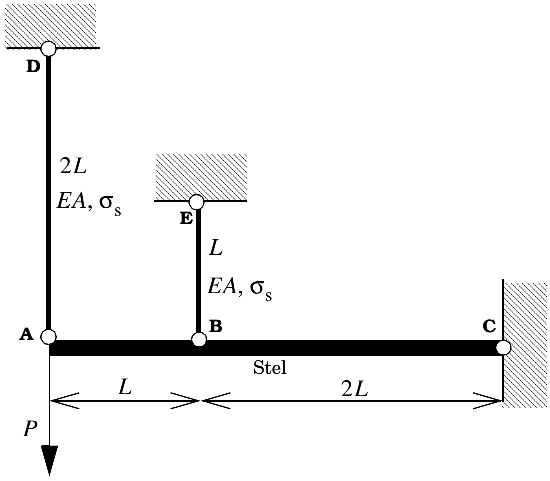
Resultatlista: Anslås senast 20/1 2014 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast vecka 5.

Granskning: Tisdag 21/1 $12^{\underline{00}}$–$14^{\underline{00}}$ samt torsdag 23/1 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i nya M–huset).

**Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad**

## 1.

En bom **ABC** är ledat infäst till en vägg vid **C** och hålls vid **A** och **B** uppe av ett par stänger; stången **AD** har längd $2L$, medan **BE** har längd $L$. Stängerna har samma tvärsnittarea $A$ och är tillverkade av ett lineärt elastiskt, ideal plastiskt, material med elasticitetsmodul $E$ och sträckgräns $\sigma_s$. Konstruktionen belastas med en vertikal kraft $P$ vid **A**. Egentyngder kan försummas och bommen betraktas som stel.




a: Bestäm den kraft $P = P_s$ som ger begynnande plasticering. (4p)

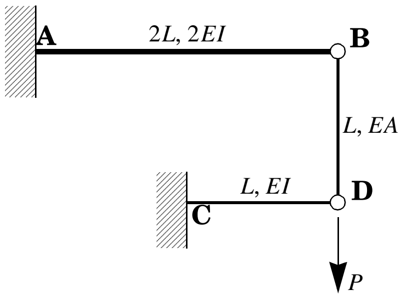
b: Bestäm flytlastförhöjningen. (1p)

## 2.

I en punkt i en elastisk kropp har spänningarna beräknats till $\tau_{xz} = 60\text{ MPa}$ och $\tau_{yz} = -40\text{MPa}$ (övriga spänningskomponenter är noll). Kroppen belastas sedan med en dragande last i $z$–led, så att en normalspänning $\sigma_z$ överlagrar det givna spänningstillståndet. Hur stor kan $\sigma_z$ bli innan materialet plasticerar (i den betraktade punkten) enligt Trescas hypotes, om sträckgränsen vid enaxlig dragning är $\sigma_s = 240\text{ MPa}$? (5p)

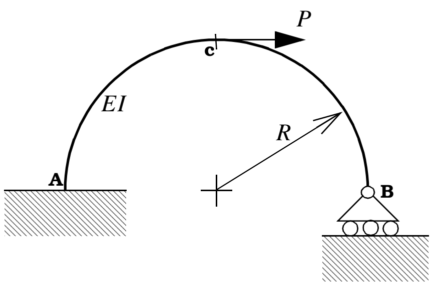
## 3.

Konsolbalkarna **AB** och **CD** har längderna $2L$ respektive $L$ samt böjstyvheterna $2EI$ respektive $EI$. De fria ändarna är sammankopplade med en stång **BD** som har längden $L$ och axialstyvheten $EA$. Bestäm axialkraften i **BD** då den kortare balken belastas med en vertikal kraft $P$ i sin fria ände enligt figuren. (5p)



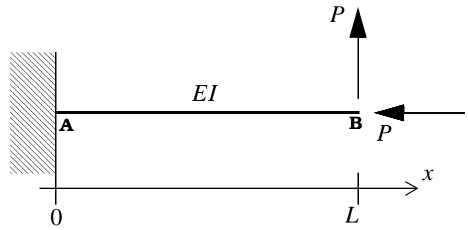

## 4.

En båge **ACB** med krökningsradie $R$ och konstant böjstyvhet $EI$ är fast inspänd vid **A**, medan vertikalförskjutning är förhindrad vid **B**. Vid hjässan **C** angriper en horisontellt riktad kraft $P$. Bestäm snittmomentet i bågen vid kraftens angreppspunkt. (5p)

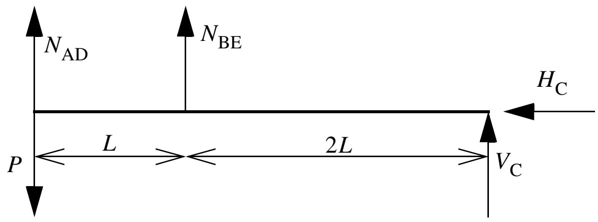


## 5.

En konsolbalk **AB** med längd $L$ och konstant böjstyvhet $EI$ belastas i sin fria ände med en transversalkraft $P$ samt en axiellt tryckande kraft $P$. Bestäm inspänningsmomentet vid **A**, med hänsyn taget till axialkraftens inverkan. (5p)




**Lösning 1a:** Frilägg enligt figuren. Vi har fyra obekanta krafter som strukturen är statiskt obekant. Moment jämvikt kring **C** ger

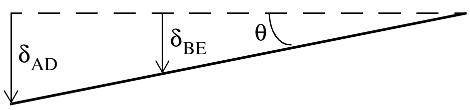



$N_{AD} \cdot 3L + N_{BE} \cdot 2L - P \cdot 3L = 0$, så

$$N_{AD} + \frac{2}{3} N_{BE} = P \qquad (1)$$

Ytterligare jämviktsekvationer kan inte ställas upp utan att blanda in fler obekanta (stödreaktionerna vid **C**).

Betrakta bärverket i utböjt läge. För små vinklar $\theta$ fås kompatibilitetssambandet




$$\tan\theta = \frac{\delta_{AD}}{3L} = \frac{\delta_{BE}}{2L} \Rightarrow 2\delta_{AD} = 3\delta_{BE}$$

Stångförlängningarna är (Lundh ekv 2–14) $\delta_{AD} = \frac{N_{AD} \cdot 2L}{EA}$ respektive $\delta_{BE} = \frac{N_{BE} \cdot L}{EA}$; insättning i kompatibilitetssambandet ger

$$N_{BE} = \frac{4}{3} N_{AD} \qquad (2)$$

Ekvationerna (1) och (2) ger $N_{AD} = \frac{9P}{17}$ och $N_{BE} = \frac{12P}{17}$. Eftersom $N_{BE} > N_{AD}$ plasticerar **BE** först (stängerna har samma tvärsnittsyta och sträckgräns hos materialet). Stången plasticerar då

$\frac{N_{BE}}{A} = \sigma_s : N_{BE} = \sigma_s A = \frac{12P_s}{17} \Rightarrow P_s = \frac{17\sigma_s A}{12}$

**Lösning 1b:** Bärverket kollapsar då båda stängerna plasticerat, dvs då $N_{AD} = N_{BE} = \sigma_s As$. Insatt i jämviktsvillkoret (1) fås $P_f = \frac{5\sigma_s A}{3}$. Flytlastförhöjningen är då $\beta = \frac{P_f - P_s}{P_s} = \frac{3}{17} \approx 18\%$

**Lösning 2:** Effektivspänningen enligt Tresca fås som skillnaden mellan största och minsta huvudspänning (Lundh ekv 12–14). Huvudspänningarna fås som egenvärdena till spänningstensorn $S$ (Lundh ekv 9–6, 9–37). Här har vi

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Ekvationen $\det(\boldsymbol{S} - \sigma\boldsymbol{I}) = 0$ blir då $-\sigma^3 + \sigma_z\sigma^2 + (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)\sigma = 0$. En huvudspänninga är alltså $\sigma = 0$, division med $(0 - \sigma)$ ger $\sigma^2 - \sigma_z\sigma - (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = 0$ varur

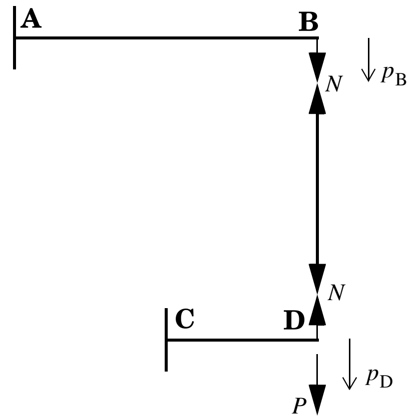
$$\sigma = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$$

Eftersom $\sigma_z > 0$ är den ena roten positiv och den andra negativ. Effektivspänningen enligt Tresca är alltså $\sigma_e = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$. Plasticering fås då $\sigma_e = \sigma_s$, ur vilket vi löser

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_s^2 - 4(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \approx 192 \text{ MPa}$$

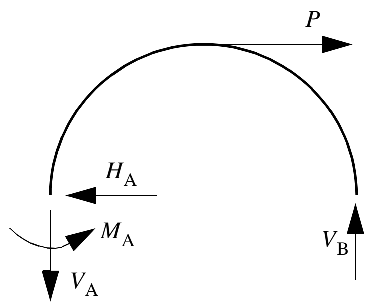
---

**Lösning 3:** Frilägg systemet och låt $N$ beteckna axialkraften i stången **BD**. Den vertikala förskjutningen av **B** blir då (elementarfall, formelsamling sid 10) $p_B = \frac{N \cdot (2L)^3}{3 \cdot 2EI} = \frac{4NL^3}{3EI}$. På samma sätt fås den vertikala förskjutningen av **D** till $p_D = \frac{(P - N)L^3}{3EI}$. Stångens förlängning blir (Lundh ekv 2–15) $\delta = \frac{NL}{EA}$. Kompatibilitetssambandet $\delta = p_D - p_B$ ger oss ekvationen $\frac{NL}{EA} = \frac{PL^3}{3EI} - \frac{5NL^3}{3EI}$, ur vilken vi löser $N = \cfrac{P}{\cfrac{3I}{AL^2} + 5}$




---

**Lösning 4:** Frilägg bågen. Vi har fyra obekanta stödreaktioner, så konstruktionen är statiskt obestämd. Välj att betrakta någon av stödreaktionerna som en bekant yttre last — här väljs $V_B$ — och teckna snittmomentet i bågen i termer av $P$ och $V_B$. Castiglianos andra sats (Lundh ekv 15–96) ger förskjutningen $\delta_B$ i $V_B$:s riktning som $\delta_B = \frac{\partial W}{\partial V_B}$, där $W = \int_s \frac{M^2}{2EI} ds$ (Lundh ekv 15–43) är den elastiska energin pga böjning i bågen, och integrationen utförs längs bågen. Vi har då

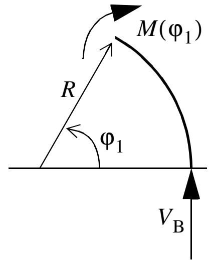



$$\delta_B = \int_0^{\pi} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V_B} R d\varphi \tag{3}$$

där $\varphi$ är en vinkelkoordinat. Kompatibilitetsvillkoret $\delta_B = 0$ ger oss en ekvation ur vilken $V_B$ kan beräknas.

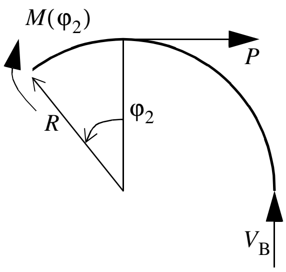
Snitta i bågen mellan **B** och **C**. Momentjämvikt kring snittet ger

$$M(\varphi_1) = V_B R(1 - \cos\varphi_1) \qquad \frac{\partial M}{\partial V_B} = R(1 - \cos\varphi_1) \tag{4}$$




Snitta nu mellan **C** och **A**. Momentjämvikt kring snittet ger här

$$M(\varphi_2) = V_B R(1 + \sin\varphi_2) - PR(1 - \cos\varphi_2) \qquad \frac{\partial M}{\partial V_B} = R(1 + \sin\varphi_2) \tag{5}$$




Insättning av (4) och (5) i (3) ger nu

$$\begin{aligned} \frac{EI\delta_B}{R^3} &= \int_0^{\pi/2} V_B(1 - \cos\varphi_1)^2 d\varphi_1 + \int_0^{\pi/2} (V_B(1 + \sin\varphi_2)^2 - P(1 - \cos\varphi_2)(1 + \sin\varphi_2))d\varphi_1 \\ &= \int_0^{\pi/2} V_B(3 - 2\cos\varphi + 2\sin\varphi)d\varphi - \int_0^{\pi/2} P(1 - \cos\varphi + \sin\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)d\varphi \\ &= \frac{3\pi}{2}V_B - \frac{\pi - 1}{2}P \end{aligned}$$

Villkoret $\delta_B = 0$ ger att $V_B = \frac{\pi - 1}{3\pi}P$. Det sökta snittmomentet fås nu ur ekvation (4) med $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

(eller (5) med $\varphi_2 = 0$): $M_c = V_B R = \frac{(\pi - 1)PR}{3\pi}$

---

**Lösning 5:** Transversalförskjutningen ges av $w(x) = A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx)$, där $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, se Lundh ekv 8–66. Konstanterna $A$, $B$, $C$ och $D$ bestäms ur randvillkoren.

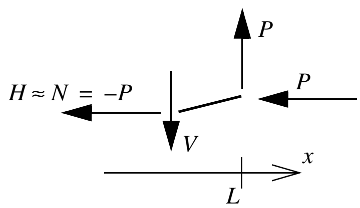
Vid $x = 0$ har vi trivialt $w(0) = 0$ samt $\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0$ vilket ger $A = -C$ respektive $B = -nD$.

Vid $x = L$ är snittmomentet noll och eftersom $M(x) = -EI\frac{d^2w}{dx^2}$ har vi då $\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=L} = 0$, vilket leder till $C = -D\tan(nL)$. Vi har nu

$$w(x) = D[\tan(nL) - nx - \tan(nL)\cos(nx) + \sin(nx)] \qquad \frac{dw}{dx} = Dn[-1 + \tan(nL)\sin(nx) + \cos(nx)]$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = Dn^2[\tan(nL)\cos(nx) - \sin(nx)] \qquad \frac{d^3w}{dx^3} = Dn^3[-\tan(nL)\sin(nx) - \cos(nx)]$$

Som sista randvillkor har vi att den vertikala snittkraften vid $x = L$ måste vara i jämvikt med den pålagda kraften: $V - P = 0$.



Med $V = T + N\dfrac{dw}{dx}$ (Lundh 8–59) och $T = -EI\dfrac{d^3w}{dx^3}$ (Lundh 8–62), fås då $-EI\dfrac{d^3w}{dx^3}\bigg|_{x=L} - P\dfrac{dw}{dx}\bigg|_{x=L} = P$ som

efter division med $-EI$ kan skrivas $\dfrac{d^3w}{dx^3}\bigg|_{x=L} + n^2\dfrac{dw}{dx}\bigg|_{x=L} = -n^2$. Detta ger att $Dn^2 = n$.

Snittmomentet fås nu som $M(x) = -EI\dfrac{d^2w}{dx^2} = nEI[\sin(nx) - \tan(nL)\cos(nx)] = \dfrac{P}{n}[\sin(nx) - \tan(nL)\cos(nx)]$,

så inspänningsmomentet är $M(0) = -\dfrac{P\tan(nL)}{n}$