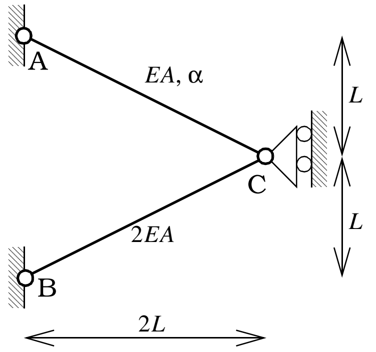
Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081
22 AUGUSTI 2013

Tid och plats:	14.00—18.00 i V–huset. Lärare besöker salen ca 15.00 samt 16.30
Hjälpmedel:	**1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000. **2.** *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling. **3.** Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar. Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används. **4.** Typgodkänd miniräknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505
Lösningar:	Anslås vid ingången till institutionens lokaler 23/8. Se även kurshemsidan.
Poängbedömning:	Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2013) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen. För att få poäng på en uppgift ska den vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.
Resultatlista:	Anslås **senast** 30/8 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 9/9.
Granskning:	Tisdag 3/9 12–13 samt torsdag 5/9 12–13 på inst. (2a våningen (plan 3) i södra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

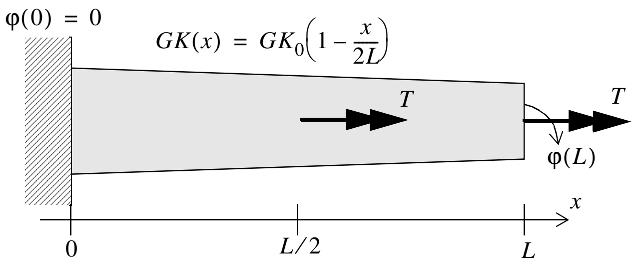
1.



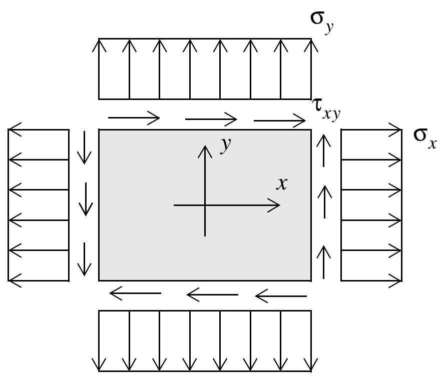
Stångbärverket i figuren består av två stänger, **AC** med axialstyvheten EA och **BC** med axialstyvheten $2EA$, som är förenade i en punkt vars horisontalförskjutning är förhindrad. Vid temperaturen T_0 är stängerna spänningslösa. Bestäm stångkrafterna då **AC** värms till $T = T_0 + \Delta T$; längdutvidgningskoefficienten är α. (5p)

2.

En axel tillverkad av ett lineärt elastiskt material har längden L och ett massivt cirkulärt tvärsnitt där diametern varierar så att vridstyvheten är $GK(x) = GK_0\left(1 - \frac{x}{2L}\right)$ (x enligt figuren nedan), där GK_0 är en konstant. Axeln belastas av ett vridande moment T vid $x = \frac{L}{2}$, samt av ett lika stort vridande moment vid $x = L$. Bestäm vridningsvinkeln $\varphi(L)$, dvs högra ändens vridning relativt vänster ände. (5p)



3.



En rektangulär plåt belastas med dragspänningar $\sigma_x = 50\,\text{MPa}$ och $\sigma_y = 18\,\text{MPa}$; plant spänningstillstånd kan antas.

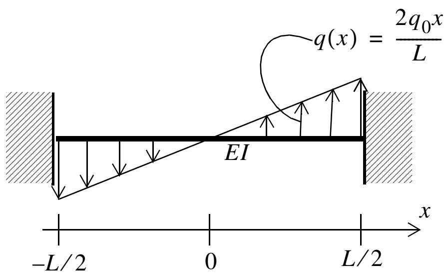
a: Bestäm den största skjuvspänning τ_{xy} som kan påföras utan att det uppkommer någon tryckspänning, i någon riktning, i xy–planet. (3p)

b: Med σ_x och σ_y enligt ovan, och med $\tau_{xy} = 30\,\text{MPa}$, beräkna den största dragspänning som uppkommer i någon riktning. (2p)

4.

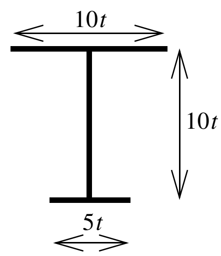
En dubbelsidigt fast inspänd balk, tillverkad av ett lineärt elastiskt material, har konstant böjstyvhet EI och längd L. Den belastas av en utbredd last med intensitet

$q(x) = \dfrac{2q_0 x}{L}$ (kraft/längd).



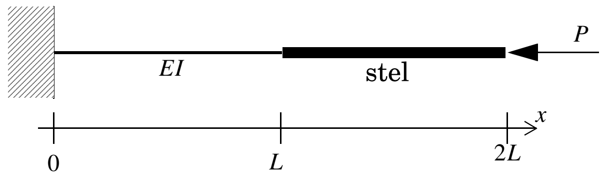
a: Bestäm rotationen vid $x = 0$, dvs $\left.\dfrac{dw}{dx}\right|_{x=0}$, där $w(x)$ är balkens transversalförskjutning. (2p)

b: Balken har ett enkelsymmetriskt, tunnväggigt, I–tvärsnitt med godstjocklek $t = 5\ \mathrm{mm}$ enligt figuren. Bestäm maximalt värde på q_0 om $L = 2\ \mathrm{m}$ och största tillåtna böjnormalspänning är $\sigma = 100\ \mathrm{MPa}$. Ledning: största snittmomenten i balken uppträder vid inspänningarna. (3p)



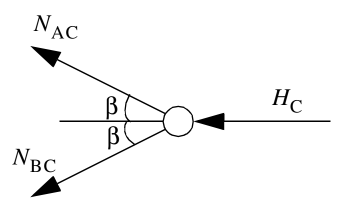
5.

En axialbelastad konsolbalk med längden L och böjstyvheten EI, har förlängts med en mycket styv (‘$EI = \infty$’) del med längden L. Härled knäckekvationen, dvs en ekvation vars lägsta positiva rot ger stukturens kritiska last med avseende på stabilitet. (5p)



Lösning 1: Frilägg knuten **C** — vertikal jämvikt ger

$$\frac{N_{BC}}{\sqrt{5}} = \frac{N_{AC}}{\sqrt{5}} \qquad (1)$$

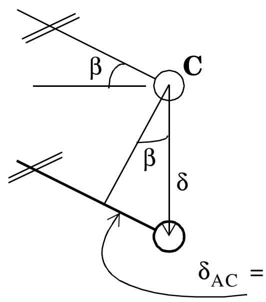


$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Om knuten **C** förskjuts ett stycke δ nedåt, förlängs **AC**

$\delta_{AC} = \frac{\delta}{\sqrt{5}}$. Kraft–förlängningssambandet för en stång (Lundh ekv 2–14, 5–4) ger $\delta_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot \sqrt{5}L}{EA} + \alpha \cdot \Delta T \cdot \sqrt{5}L$. Ur dessa två samband löser vi



$$\delta = \frac{5N_{AC}L}{EA} + 5\alpha L \cdot \Delta T \qquad (2)$$

Av symmetriskäl ser vi också att **BC** förkortas $\delta_{BC} = \frac{-\delta}{\sqrt{5}}$ och 2–14 ger här $\delta_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot \sqrt{5}L}{2EA}$, så

$$\delta = \frac{-5N_{BC}L}{2EA} \qquad (3)$$

Ur (2) och (3) får vi $\frac{5L}{EA}\left(N_{AC} + \frac{1}{2}N_{BC} + \alpha EA \cdot \Delta T\right) = 0$ som med (1) ger $N_{AC} = N_{BC} = -\frac{2}{3}\alpha EA \cdot \Delta T$

Lösning 2: Låt $T_1 = T$ och $T_2 = T$ beteckna momentet i höger ände, respektive mitt på axeln. Den sökta vridningsvinkeln kan då beräknas med Castiglianos 2a sats

$$\varphi(L) = \frac{\partial W}{\partial T_1} = \frac{\partial}{\partial T_1}\left[\int_0^L \frac{M_v^2}{2GK}dx\right] = \int_0^L \frac{\partial M_v}{\partial T_1}\frac{M_v}{GK}\,dx \qquad (4)$$

I vänstra halvan av axeln är snittmomentet $M_v = T_1 + T_2 = 2T$ och alltså $\frac{\partial M_v}{\partial T_1} = 1$; i andra halvan har vi $M_v = T_1 = T$ och $\frac{\partial M_v}{\partial T_1} = 1$. Insättning i (4) ger då

$$\varphi(L) = \frac{T}{GK_0}\left(\int_0^{L/2} \frac{2}{1 - \frac{x}{2L}}dx + \int_{L/2}^{L} \frac{1}{1 - \frac{x}{2L}}dx\right) = \frac{2TL}{GK_0}\ln\left(\frac{8}{3}\right)$$

(Alternativt: utgå från sambandet mellan deformation och snittmoment (Formelsamling sid 2):

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_v}{GK} = \begin{cases} \frac{2T}{GK(x)} & 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{T}{GK(x)} & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

Den sökta vinkeln fås sedan genom integration)

Lösning 3: Största och minsta huvudspänning är största respektive minsta normalspänning som uppträder i någon riktning. Eftersom det råder plant spänningstillstånd i (x, y)–planet, är $\sigma_z = 0$ en huvudspänning; de andra två huvudspänningarna fås ur (Lundh ekv 9–49)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{5}$$

3a: Villkoret här är att minsta huvudspänningen inte får bli negativ. Ekv (5) ger

$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \geq 0$, ur vilket vi löser $\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \leq \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2$. Vi får då

$|\tau_{xy}| \leq \sqrt{\sigma_x \sigma_y} = 30 \text{ MPa}$

3b: Vi söker den största huvudspänningen. Ekv (5) ger $\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 68 \text{ MPa}$

Lösning 4: Problemet beskrivs av elastiska linjens ekvation. Med konstant böjstyvhet och den givna belastningen blir denna (Lundh 7–69) $w^{\text{iv}} = \frac{2q_0 x}{LEI}$. Man finner alltså

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{60EI}\left(\frac{x}{L}\right)^5 + A\left(\frac{x}{L}\right)^3 + B\left(\frac{x}{L}\right)^2 + C\left(\frac{x}{L}\right) + D$$

Eftersom problemet är anti–symmetriskt med avseende på $x = 0$, måste vi ha $B = D = 0$. Randvillkoren $w\left(\frac{\pm L}{2}\right) = 0$ och $\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x = \frac{\pm L}{2}} = 0$, ger ekvationerna $\frac{q_0 L^4}{1920EI} + \frac{A}{8} + \frac{C}{2} = 0$ respektive

$\frac{q_0 L^3}{192EI} + \frac{3A}{4L} + \frac{C}{L} = 0$, med lösningen $A = \frac{-q_0 L^4}{120EI}$ $\quad C = \frac{q_0 L^4}{960EI}$. Balkens transversella utböjning blir då

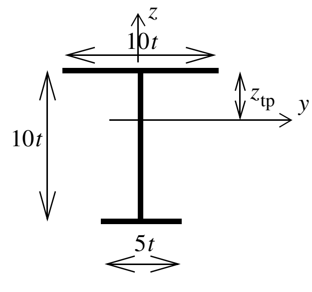
$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{960EI}\left(16\left(\frac{x}{L}\right)^5 - 8\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)\right) \tag{6}$$

4a: Derivering av ekv (6) ger $\frac{dw}{dx} = \frac{q_0 L^3}{960EI}\left(80\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 24\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1\right)$, så $\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = \frac{q_0 L^3}{960EI}$ (Alternativt: använd elementarfall, formelsamlingen sid 11, med $m_1 = -\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0}$, $W_2 = -q_0$ och balklängden $\frac{L}{2}$).

4b: Största spänningen fås som (Lundh 7–26)

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M|_{\max}|z|_{\max}}{I_y} \tag{7}$$

där momentet (M) beror av den sökta q_0. För att bestämma maximal z–koordinat i tvärsnittet och areatröghetsmomentet, måste vi först hitta yttyngdpunkten. Statiskt moment med avseende på en axel längs övre flänsen ger $z_{\text{tp}}A = 10t^2 \cdot 0 + 10t^2 \cdot 5t + 5t^2 \cdot 10t$, där $A = 25t^2$ är tvärsnittsarean. Vi får $z_{\text{tp}} = 4t$, så $|z|_{\max} = 6t$ (tvärsnittets underkant).



Areatröghetsmomentet beräknas med Steiners sats (Lundh 7–42)

$$I_y = 10t^2 \cdot z_{\text{tp}}^2 + \frac{t \cdot (10t)^3}{12} + 10t \cdot (5t - z_{\text{tp}})^2 + 5t^2 \cdot (10t - z_{\text{tp}})^2 = \frac{1300t^4}{3}$$

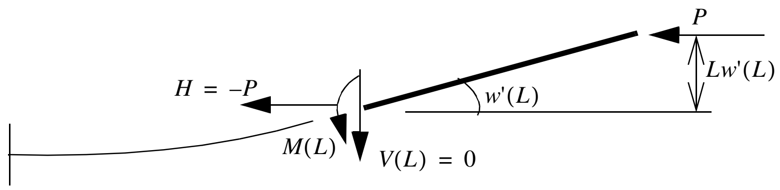
Första och sista termerna är övre respektive undre flänsarnas bidrag; bidraget från flänsarnas areatröghetsmoment med avseende på deras respektive tyngdpunktsaxlar har försummats.

Snittmomentet i balken kan beräknas med ekv (6): $M(x) = -EI\dfrac{d^2w}{dx^2} = \dfrac{q_0L^2}{60}\left(3\dfrac{x}{L} - 20\left(\dfrac{x}{L}\right)^3\right)$. Maximalt moment fås i balkändarna: $M\left(\dfrac{-L}{2}\right) = -M\left(\dfrac{L}{2}\right) = \dfrac{q_0L^2}{60}$. (Alternativt kan momenten fås från elementarfall; Formelsamlingen sid 12 med $W_1 = q_0$ och $W_2 = -2q_0$ ger rätt inspänningsmoment).

Insättning i ekv (7) ger nu $|\sigma|_{\max} = \dfrac{\dfrac{q_0L^2}{60} \cdot 6t}{\dfrac{1300t^4}{3}}$, varur $q_0 = \dfrac{13000\sigma t^3}{3L^2} \approx 13{,}5$ kN/m

---

<u>Lösning 5:</u> Utböjningen $w(x)$ ges av lösningen till den styrande differentialekvationen, som är $w(x) = A + Bx + C\cos nx + D\sin nx$ (Lundh 8–66), där $n^2 = \dfrac{P}{EI}$. Vi måste nu satisfiera randvillkoren (2 i var ände av balken. Trivialt har vi att $w(0) = 0$ och $w'(0) = 0$ vilket kräver $C = -A$ respektive $B = -Dn$. I höger ände ($x = L$) är både utböjning och rotation obekanta, så vi får söka jämviktsvillkor:



Kraftjämvikt kräver att $V(L) = 0$; vertikalkraften kan skrivas (Lundh 8–59) $V = T + Nw'$, där tvärkraften är $T = -EIw'''$ och normalkraften $N \approx H = -P$. Kraftjämvikten kan alltså uttryckas som $-EIw'''(L) - Pw'(L) = 0$ eller, efter division med böjstyvheten EI: $w'''(L) + n^2w'(L) = 0$. Insättning av lösningen leder till ekvationen $-Dn^3 = 0$. Vi har alltså $B = D = 0$, som tillsammans med $C = -A$ gör att utböjningen kan skrivas $w(x) = A(1 - \cos nx)$.

Momentjämvikt vid $x = L$ ger att $M(L) + P \cdot Lw'(L) = 0$; vårt fjärde randvillkor fås om vi här sätter in att $M = -EIw''$ och dividerar med $-EI$: $w''(L) - n^2Lw'(L) = 0$. Detta ger ekvationen $An^2(\cos nL - nL\sin nL) = 0$.

Icke–triviala lösningar ($w \neq 0$) kräver att uttrycket inom parentes är noll; efter division med $\cos nL$ fås då knäckekvationen $1 - nL\tan nL = 0$ (Numerisk lösning ger $nL \approx 0{,}86$ och $P_{\text{kr}} = n^2EI = (nL)^2\dfrac{EI}{L^2}$)