Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

28 MAJ 2012

Tid och plats: 8.30—12.30 i M–huset. Lärare besöker salen ca 9.30 samt 11.00

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.

2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset, 29/5. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2012) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

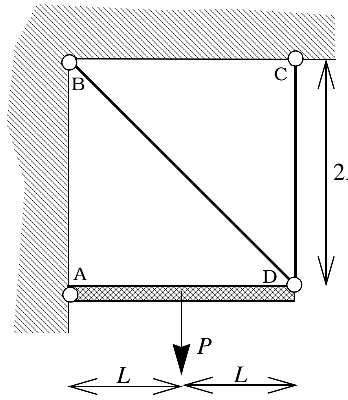
För att få poäng på en uppgift ska den vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

Resultatlista: Anslås **senast** 11/6 2012 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 15/6.

Granskning: Onsdag 13/6 $10^{\underline{00}}$–$12^{\underline{00}}$ samt tisdag 4/9 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i norra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.



En platta **AD** är vid **A** ledat infäst till en vägg och hålls horisontell med två stänger, **BD** och **CD**. Båda stängerna har samma tvärsnittsarea A och är tillverkade av ett lineärt elastiskt–idealplastiskt material med elasticitetsmodul E och sträckgräns σ_s. Plattan **AD** kan betraktas som stel.

a: Beräkna den kraft $P = P_s$ som ger begynnande plasticering. (4p)

b: Beräkna den kraft $P = P_f$ som ger plasticering i båda stängerna. (1p)

2.

Spänningstillståndet i en punkt i en belastad elastisk kropp ges av spänningstensorn

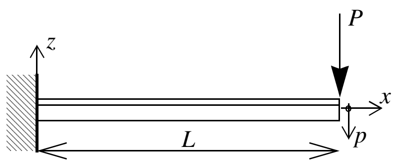
$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 70 & 7 \\ 70 & -20 & 70 \\ 7 & 70 & 43 \end{bmatrix} \text{[MPa]}$$

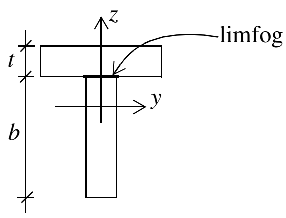
a: Bestäm normalspänningen, σ, och skjuvspänningen, τ, på planet med normalvektorn

$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ (2p)

b: Bestäm säkerheten mot plasticering, $s = \sigma_s/\sigma_e$, enligt Trescas hypotes, om materialets sträckgräns vid enaxlig belastning är $315\ \text{MPa}$ (3p)

3.

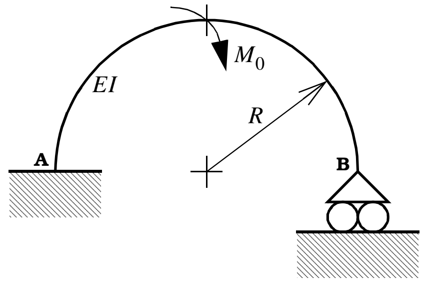




En konsolbalk med längden $L = 1\ \text{m}$ har tillverkats av två brädor som båda har tjockleken $t = 25\ \text{mm}$ och bredden $b = 100\ \text{mm}$. Brädorna har limmats ihop till ett enkelsymmetriskt T–tvärsnitt. Materialets elasticitetsmodul är $E = 12\ \text{GPa}$ och tillåten skjuvspänning i limfogen är $\tau_{\text{till}} = 5\ \text{MPa}$. Hur långt, p, kan konsoländen tryckas ner utan att den tillåtna skjuvspänningen överskrids? (5p)

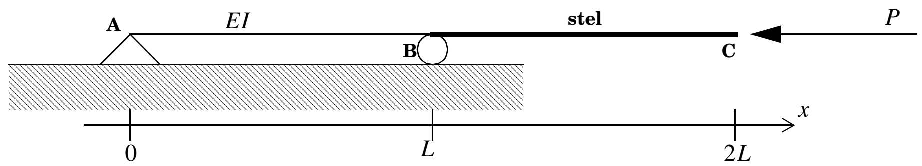
4.

Halvcirkelbågen **AB** har konstant böj-styvhet EI och krökningsradien R. Den är fast inspänd vid **A** och vid **B** är vertikalförskjutningen förhindrad. Beräkna samtliga stödreaktioner, då bågen belastas med ett moment M_0 mitt på hjässan. (5p)



5.

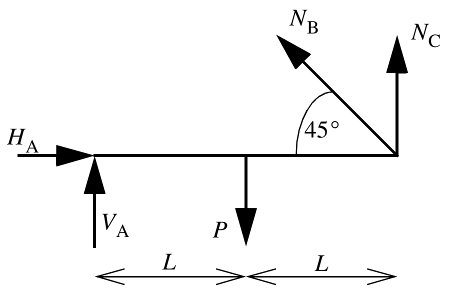
Beräkna kritisk last, $P = P_{kr}$, med avseende på stabilitet för balkkonstruktionen som visas i figuren nedan. Spannet **AB** har längden L och böjstyvheten EI, medan överhänget **BC**, också med längden L, kan betraktas som stelt (d.v.s deformationen av delen **BC** kan försummas). (5p)



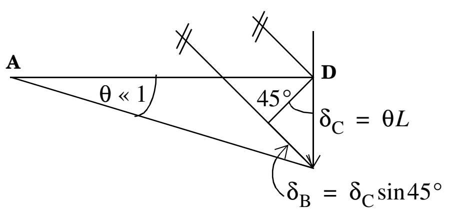
<u>Lösning 1a:</u> Frilägg plattan; vi har 4 obekanta krafter men bara 3 jämviktsekvationer, så problemet är statiskt obestämt. Momentjämvikt kring en axel genom **A** ger

$N_C \cdot 2L + N_B \sin 45° \cdot 2L - P \cdot L = 0$, varur

$$\sqrt{2}N_B + 2N_C - P = 0 \qquad (1)$$



Ytterligare jämviktsekvationer kan inte ställas upp utan att blanda in fler obekanta. Studera nu plattan i utböjt läge; för små förskjutningar finner man sambandet $\delta_B = \frac{\delta_C}{\sqrt{2}}$ mellan stångförlängningarna. Sambandet mellan stångkraft och stångförlängning (Lundh ekv 2–14) ger oss



$\delta_B = \frac{\delta_C}{\sqrt{2}} = \frac{N_B \cdot 2\sqrt{2}L}{EA}$ och $\delta_C = \frac{N_C \cdot 2L}{EA}$, ur vilket vi finner

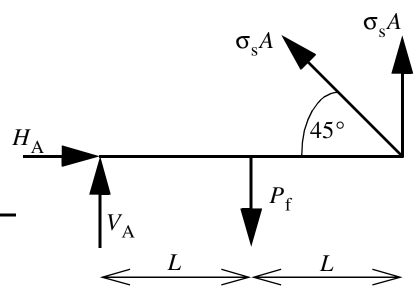
$$N_C = 2N_B \tag{2}$$

Ekv (1) och (2) ger $N_B = \dfrac{P}{4+\sqrt{2}}$ och $N_C = \dfrac{2P}{4+\sqrt{2}}$. Plasticering inträder då spänningen i den mest

ansträngda stången når sträckgränsen σ_s : $N_C = \dfrac{2P_s}{4+\sqrt{2}} = \sigma_s A \Rightarrow P_s = \dfrac{4+\sqrt{2}}{2}\sigma_s A$

Lösning 1b: Då spänningen i båda stängerna är σ_s, är båda stångkrafterna $\sigma_s A$; momentjämvikt kring **A** ger då

$P_f \cdot L + -\sigma_s A \sin 45° \cdot 2L - \sigma_s A \cdot 2L = 0$ — $P_f = (2+\sqrt{2})\sigma_s A$



Lösning 2a: Spänningsvektorn på ytan med (enhets)normalvektorn $\boldsymbol{n}$ fås som (Lundh ekv 9–28) $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{Sn} = \dfrac{120}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ MPa.

Normalspänningen fås sedan genom att projicera spänningsvektorn på normalen (Lundh 9–29):

$\sigma = \boldsymbol{n}^T\boldsymbol{s} = 120\text{ MPa}$. Skjuvspänningen fås slutligen med Pythagoras sats (Lundh 9–31):

$\tau = \sqrt{|\boldsymbol{s}|^2 - \sigma^2} = 0$.

Eftersom $\tau = 0$ är $\sigma = 120\text{ MPa}$ en huvudspänning.

Lösning 2b: För att beräkna effektivspänningen enligt Tresca, måste vi känna huvudspänningarna, som fås som egenvärdena till spänningstensorn: $\det(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{I}\sigma) = 0$ ger

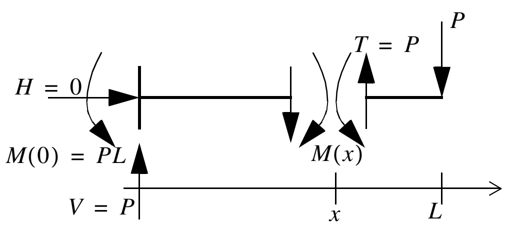
$-\sigma^3 + 66\sigma^2 + 9720\sigma - 388800 = 0$ (där siffervärdet för σ är i MPa). Enligt uppgift 2a är en rot 120 MPa;

division med $120 - \sigma$ ger $\sigma^2 + 54\sigma - 3240 = 0$ så $\sigma = (-27 \pm \sqrt{27^2 + 3240})\text{ MPa} = \begin{cases} -90\text{ MPa} \\ 36\text{ MPa} \end{cases}$.

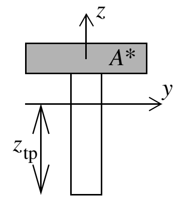
Trescaspänningen fås nu som skillnaden mellan största och minsta huvudspänningen:

$\sigma_e = (120 - (-90))\text{ MPa} = 210\text{ MPa}$. Säkerheten mot plasticering är alltså $s = \dfrac{\sigma_s}{\sigma_e} = 1{,}5$

Lösning 3: Vi söker skjuvspänningen i limfogen, dvs i övergången mellan liv och fläns. Denna kan beräknas som (Lundh ekv 7–48) $\tau = \dfrac{TS_{A^*}}{Ib}$. Här är snittets längd $b = t$ och tvärkraften $T = P$ (konstant längs hela konsolen). Sambandet mellan P och p hämtas enklast ur elementarfall; formelsamlingen sid 10 ger $p = \dfrac{PL^3}{3EI}$, så $T = P = \dfrac{3EI}{L^3}p$. Insättning ger $\tau = \dfrac{3ES_{A^*}}{tL^3}p$, så



$$p_{\text{till}} = \frac{\tau_{\text{till}} t L^3}{3 E S_{A^*}} \tag{3}$$



För att beräkna det statiska momentet, av den utsnittade biten, med avseende på tyngdpunktsaxeln ortogonalt tvärkraften, måste vi hitta tyngdpunktens läge. Statiskt moment med avseende på en horisontell axel genom tvärsnittets underkant ger

$$z_{\text{tp}} A = (25 \cdot 100\ \text{mm}^2) \cdot \left(100 + \frac{25}{2}\right)\ \text{mm} + (25 \cdot 100\ \text{mm}^2) \cdot \frac{100\ \text{mm}}{2}$$

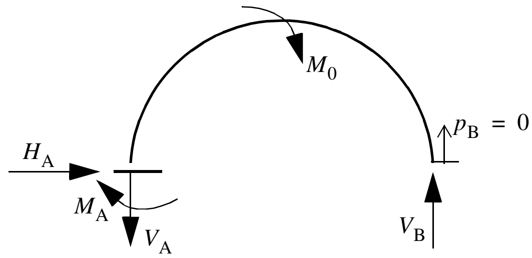
där $A = 2 \cdot (25 \cdot 100\ \text{mm}^2)$ är tvärsnittsarean; vi finner $z_{\text{tp}} = 81{,}25\ \text{mm}$. Vi får då

$S_{A^*} = \left(\left(100 + \frac{25}{2}\right)\ \text{mm} - z_{\text{tp}}\right) \cdot A^*$, där $A^* = 25 \cdot 100\ \text{mm}^2$ är den utsnittade areans storlek; vi får

$S_{A^*} = 78{,}125 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3$. Insättning i ekv (3) ger tillsammans med givna data att $p_{\text{till}} \approx 44\ \text{mm}$

<u>Lösning 4:</u> Vi inför stödreaktionerna och ställer upp jämvikt:

$$\begin{aligned} \rightarrow\quad & H_A = 0 \\ \downarrow\quad & V_A - V_B = 0 \\ A\curvearrowright\quad & M_A + M_0 - V_B \cdot 2R = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

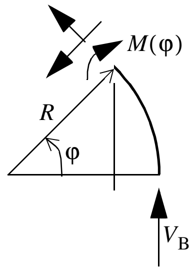


Vi har 4 obekanta och ytterligare jämviktsekvationer kan inte ställas upp (bågen är statiskt obestämd), så vi måste utnyttja något kompatibilitetssamband. Här använder vi att högra stödets vertikalförskjutning måste vara noll: $p_B = 0$. Enklast beräknas förskjutningen med Castiglianos 2a sats

$$p_B = \frac{\partial W_i}{\partial V_B} = \frac{\partial}{\partial V_B} \int_s \frac{M^2}{2EI} ds = \int_s \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V_B} ds \tag{5}$$

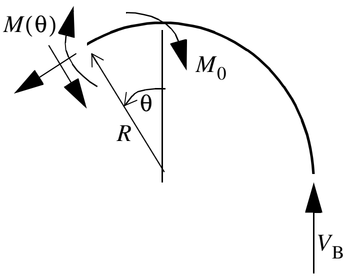
där s är en koordinat längs bågen.

Snitta bågen mellan hjässan och högra stödpunkten. Momentjämvikt ger



$$M(\varphi) = V_B R(1 - \cos\varphi) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial V_B} = R(1 - \cos\varphi) \qquad (6)$$

Snitta nu mellan **A** och hjässan — momentjämvikt ger oss



$$M(\theta) = V_B R(1 + \sin\theta) - M_0 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial V_B} = R(1 + \sin\theta) \qquad (7)$$

Insättning av (6) och (7) i (5) ger nu

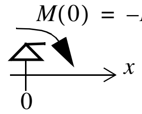
$$p_B = \int_0^{\pi/2} \frac{V_B R^3}{EI}(1 - \cos\varphi)^2 d\varphi + \int_0^{\pi/2} \frac{V_B R^3}{EI}(1 + \sin\theta)^2 d\theta - \int_0^{\pi/2} \frac{M_0 R^2}{EI}(1 + \sin\theta) d\theta = \frac{3\pi}{2}\frac{V_B R^3}{EI} - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\frac{M_0 R^2}{EI}$$

Ur villkoret $p_B = 0$ fås då $V_B = \frac{M_0}{3\pi R}(\pi + 2)$; insättning i ekv (4) ger slutligen

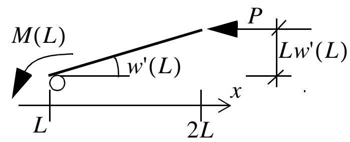
$$H_A = 0 \qquad V_A = V_B = \frac{M_0}{3\pi R}(\pi + 2) \qquad M_A = M_0 \frac{4 - \pi}{3\pi}$$

Lösning 5: Den styrande differentialekvationen har lösningen $w(x) = A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx)$ (Lundh ekv 8–66), där $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ och $w(x)$ är transversalförskjutningen. Konstanterna (A, B, C, D) bestäms av randvillkoren.

Vid $x = 0$ har vi trivialt att $w(0) = 0$ samt att $w''(0) = 0$ eftersom snittmomentet $M = -EIw''$ är noll här. Detta ger att $A + C = 0$ respektive $-Cn^2 = 0$, så $A = C = 0$. Vi har då att $w(x) = Bx + D\sin(nx)$



Vid $x = L$ gäller att $w(L) = 0$, vilket kräver att $BL + D\sin(nL) = 0$; $B = -D\frac{\sin(nL)}{L}$ ger oss då



$$w(x) = D\left(\sin(nx) - \frac{\sin(nL)}{L}x\right)$$

$$w'(x) = D\left(n\cos(nx) - \frac{\sin(nL)}{L}\right)$$

$$w''(x) = -Dn^2\sin(nx)$$

Det sista randvillkoret fås genom att titta på momentjämvikt vid för delen **BC**. Jämvikt kräver att $M(L) + PLw'(L) = 0$. Om vi här sätter in sambandet $M = -EIw''$ och dividerar med $-EI$, får vi $w''(L) - n^2Lw'(L) = 0$. Insättning ger $D\left(-n^2\sin(nL) - n^2L \cdot n\cos(nL) + n^2L \cdot \frac{\sin(nL)}{L}\right) = 0$, dvs $-Dn^3L\cos(nL) = 0$. Icke-triviala lösningar kräver att $\cos(nL) = 0$, som har lägsta positiva rot $nL = \frac{\pi}{2}$, så $(nL)^2 = \frac{P_{kr}}{EI}L^2 = \frac{\pi^2}{4}$. $P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$