Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

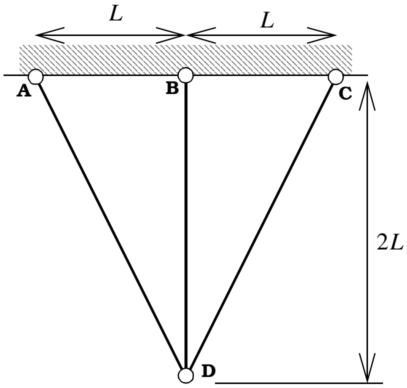
29 MAJ 2008

Tid och plats:	14.00—18.00 i M–huset. Lärare besöker salen ca 15 samt 17
Hjälpmedel:	**1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000. **2.** *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling. **3.** Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar. Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används. **4.** Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505
Lösningar:	Anslås vid ingången till institutionens lokaler 30/5. Se även kurshemsidan.
Poängbedömning:	Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2008) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen. För att få poäng på en uppgift vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.
Resultatlista:	Anslås **senast** 13/6 2006 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 17/6.
Granskning:	Måndag 16/6 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt onsdag 3/9 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (2a våningen i södra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

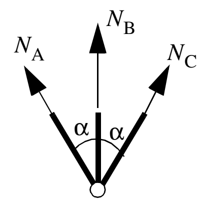
1.

De tre stängerna i fackverket har samtliga konstant tvärsnittsarea A och är alla spänningslösa vid temperaturen T_0. Bestäm de stångkrafter som uppträder om hela konstruktionen värms till $T = T_0 + \Delta T$. Stångmaterialet är lineärt elastiskt med elasticitetsmodul E och längdutvidgningskoefficient α.



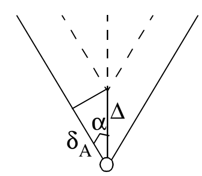
Lösning: Snitta ut knuten **D** och ställ upp jämvikt. Horisontell jämvikt ger att $N_A = N_B$; vertikal jämvikt ger då att

$$N_B + 2N_A \cos\alpha = 0 \Rightarrow N_B = \frac{-4}{\sqrt{5}} N_A \qquad (1)$$



$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Av symmetriskäl inses att knut **D** kommer att förskjutas i vertikalled; beteckna förskjutningen Δ. Uttryck stångförlängningarna i knutförskjutningen, under antagandet att $\Delta \ll L$: $\delta_B = \Delta$, $\delta_A = \delta_C = \Delta\cos\alpha = \frac{2\Delta}{\sqrt{5}}$.



Förlängningen av en stång i beror dels på temperaturändringen, $\alpha L_i \cdot \Delta T$, dels på normalkraften $\frac{N_i L_i}{EA}$ (se t.ex Hans Lundh ekv. 5–3). Vi har alltså

$$\Delta = \frac{N_B \cdot 2L}{EA} + 2\alpha L \cdot \Delta T \qquad \frac{2\Delta}{\sqrt{5}} = \frac{N_A \cdot \sqrt{5}L}{EA} + \sqrt{5}\alpha L \cdot \Delta T$$

Eliminering av Δ ger $\frac{2N_B L}{EA} + 2\alpha L \cdot \Delta T = \frac{5N_A L}{2EA} + \frac{5}{2}\alpha L \cdot \Delta T \Rightarrow N_A = \frac{4N_B}{5} - \frac{\alpha EA \cdot \Delta T}{5}$ — insättning i (1) ger

$N_B = -\frac{16N_B}{5\sqrt{5}} + \frac{4EA\alpha \cdot \Delta T}{5\sqrt{5}} \Rightarrow \underline{N_B = \frac{4EA}{16 + 5\sqrt{5}}\alpha \cdot \Delta T}$, varefter $N_A = \frac{-\sqrt{5}N_B}{4} = \underline{\frac{-\sqrt{5}EA}{16 + 5\sqrt{5}}\alpha \cdot \Delta T}$

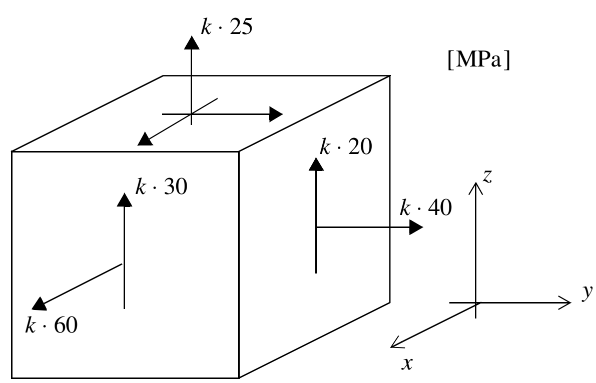
2.

Figuren visar spänningstillståndet i en viss punkt i en lineärt elastisk kropp; k är en dimensionslös lastparameter. Materialets sträckgräns vid enaxlig dragning är $\sigma_s = 200$ MPa.

Bestäm det värde på lastparametern k vid vilket plasticering inträder i punkten

a: enligt von Mises flythypotes (1p)

b: enligt Trescas flythypotes (4p)



Lösning: Vi har här spänningstensorn (Lundh ekv 9–6) $S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 60 & 0 & 30 \\ 0 & 40 & 20 \\ 30 & 20 & 25 \end{bmatrix}$ [MPa] .

a: Effektivspänningen enligt von Mises är (Lundh ekv 12–4)

$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = 69{,}462 \cdot k$ [MPa] . Plasticering fås då $\sigma_e = \sigma_s$, så

$k = \dfrac{200 \text{ [MPa]}}{69{,}462 \text{ [MPa]}} \approx 2{,}9$

b: Effektivspänningen enligt Tresca fås som skillnaden mellan största och minsta huvudspänningen; huvudspänningarna kan beräknas som egenvärdena till S : $\det(S - \sigma I) = 0$ ger

$-\sigma^3 + 125k\sigma^2 - 3600k^2\sigma = 0 \text{ [(MPa)}^3\text{]}$. Man ser att en rot är $\sigma = 0$; division med roten $\sigma - 0$ ger

$\sigma^2 - 125k\sigma + 3600k \;\; = 0 \text{ [(MPa)}^2\text{]}$, så $\sigma = k\left(\dfrac{125}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{125}{2}\right)^2 - 3600}\right) \text{ [MPa]} = \begin{cases} k \cdot 80 \text{ [MPa]} \\ k \cdot 45 \text{ [MPa]} \end{cases}$.

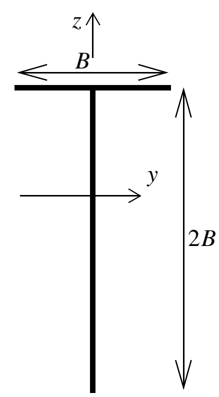
Effektivspänningen enligt Trescas hypotes är alltså $\sigma_e = k(80 - 0) \text{ [MPa]} = 80k$ [MPa] , så $\sigma_e = \sigma_s$ ger

$k = 2{,}5$

3.

Betrakta en balk med ett tunnväggigt T–tvärsnitt; flänsbredd B , livhöjd $2B$ och godstjocklek $t \ll B$. Balken belastas med en utbredd last $q(x)$ över sin längd L så att utböjningen i z–led blir

$$w(x) = \frac{QL^3}{480EI}\left(-19\frac{x}{L} + 35\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 15\left(\frac{x}{L}\right)^4 - \left(\frac{x}{L}\right)^6\right) \qquad 0 \le x \le L$$



där $Q = -\int_0^L q(x)dx$ är kraftresultanten (positiv nedåt). Beräkna den största normalspänningen i det snitt momentet är som störst, samt den största skjuvspänningen där tvärkraften är som störst.

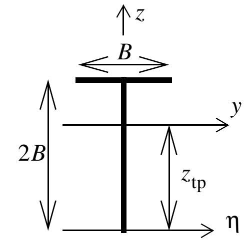
Lösning: Det böjande momentet i balken fås som $M(x) = -EI\dfrac{d^2w}{dx^2} = \dfrac{QL}{16}\left(\left(\dfrac{x}{L}\right)^4 + 6\left(\dfrac{x}{L}\right)^2 - 7\dfrac{x}{L}\right)$; tvärkraften ges därefter av $T(x) = \dfrac{dM}{dx} = \dfrac{Q}{16}\left(4\left(\dfrac{x}{L}\right)^3 + 12\dfrac{x}{L} - 7\right)$.

Tvärkraften är strängt växande i intervallet $\dfrac{x}{L} \in (0, 1)$, så för att hitta det till beloppet största värdet räcker det med att undersöka ändpunkterna; man finner $|T|_{\max} = T(L) = \dfrac{9Q}{16}$.

För att hitta det till beloppet största momentet måste vi först lösa $\dfrac{dM}{dx} = 0$, dvs $4\left(\dfrac{x}{L}\right)^3 + 12\dfrac{x}{L} - 7 = 0$.

Passningsräkning ger $\dfrac{x}{L} \approx 0{,}5329$ som enda rot i intervallet; vi får sedan $M(0{,}5329L) \approx -0{,}12161QL$. För intervallets ändpunkter finner vi att $M(0) = M(L) = 0$, så vi har $|M|_{\max} \approx 0{,}12161QL$.

Maxspänningarna av momentet och tvärkraften ges av $|\sigma|_{max} = \frac{|M|_{max}|z|_{max}}{I_y}$



respektive $|\tau|_{max} = \frac{|T|_{max}S_{A*}}{I_y t}$. För att beräkna $|z|_{max}$, I_y och S_{A*}, måste vi först hitta tvärsnittets tyngdpunkt. Beräkna statiska momentet m.a.p en horisontel axel genom tvärsnittets underkant:

$$S_\eta = A \cdot z_{tp} = \sum_i A_i \cdot z_{tp,i} \Rightarrow z_{tp} = \frac{\sum_i A_i \cdot z_{tp,i}}{A} = \frac{Bt \cdot 2B + 2Bt \cdot B}{3Bt} = \frac{4B}{3}$$

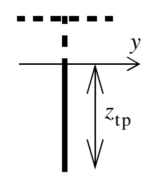
Vi har då $|z|_{max} = z_{tp} = \frac{4B}{3}$ och areatröghetsmomentet med Steiners sats (Lundh ekv 7–42)

$$I_y = \frac{Bt^3}{12} + Bt \cdot (2B - z_{tp})^2 + \frac{t(2B)^3}{12} + 2Bt \cdot (z_{tp} - B)^2 \approx \frac{4tB^3}{3}$$

där de två första termerna är bidraget från flänsen, och där första termen försummas ty $t \ll B$.

Maximal spänning av momentet blir allts $|\sigma|_{max} = \frac{0{,}12161QL \cdot \frac{4B}{3}}{\frac{4tB^3}{3}} = 0{,}12\frac{QL}{B^2t}$.

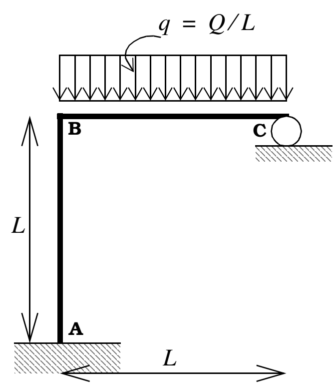
För att beräkna största skjuvspänningen måste vi dela tvärsnittet så att S_{A*} blir så stort som möjligt, dvs välja det snitt som definieras av y–axeln:



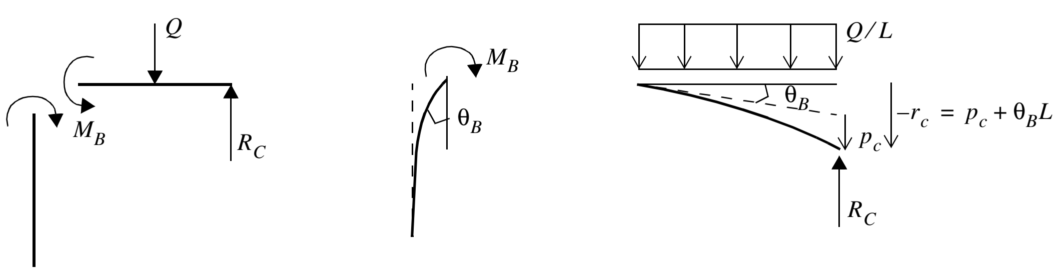
$$S_{A*} = S_{A*}(z = 0) = z_{tp}t \cdot \frac{z_{tp}}{2} = \frac{8B^2t}{9}. \text{ Alltså fås } |\tau|_{max} = \frac{\frac{9Q}{16} \cdot \frac{8B^2t}{9}}{\frac{4tB^3}{3} \cdot t} = \frac{3Q}{8Bt}.$$

4.

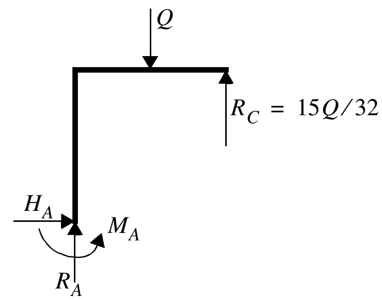
Ramen i figuren består av två lineärt elastiska balkar med böjstyvheten EI. Konstruktionen är fast inspänd vid **A**; vid **C** är vertikalförskjutningen förhindrad. Den horisontella delen belastas med en fördelad last $q = \frac{Q}{L}$ (Q är kraftresultanten). Bestäm samtliga stödreaktioner.



Lösning: Ansätt (t.ex) stödreaktionen R_C vid **C** som statiskt övertalig och beräkna vertikala förskjutningen r_c m.h.a elementarfall.



Momentjämvikt kring B (vänstra figuren) ger att $M_B = \frac{QL}{2} - R_C L$. Vinkeln θ_B (figuren i mitten) fås ur elementarfall som $\theta_B = M_B \cdot \frac{L}{EI} = \frac{L^2}{EI} \cdot \left(\frac{Q}{2} - R_C\right)$. Utböjningen p_c (högra figuren) fås också ur elementarfall: $p_c = \frac{Q}{L} \cdot \frac{L^4}{8EI} - R_C \cdot \frac{L^3}{3EI} = \frac{L^3}{EI} \cdot \left(\frac{Q}{8} - \frac{R_C}{3}\right)$. Kompatibilitetsvillkoret $r_c = -(p_c + \theta_B L) = 0$ ger ekavtionen $\frac{4R_c}{3} - \frac{5Q}{8} = 0$, dvs $R_C = \frac{15Q}{32}$.



Övriga stödreaktioner fås ur jämvikt för hela strukturen. Horisontell (kraft)jämvikt ger $H_A = 0$; vertikal jämvikt ger $R_A = Q - R_C = \frac{17Q}{32}$; momentjämvikt kring **A** ger att $M_A = Q \cdot \frac{L}{2} - R_C \cdot L = \frac{QL}{32}$.

Alternativ lösning: snittmomentet i delen **AB** är

$M(x) = \frac{QL}{2} - R_C L$ (konstant), där x är en koordinat från **A** mot **B**,

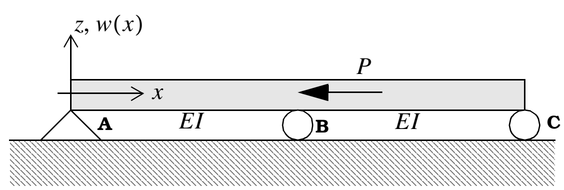
så $\frac{\partial M}{\partial R_C} = -L$; snittmomentet i delen **BC** är $M(y) = \frac{Qy^2}{2L} - R_C y$, där y är en koordinat från **C** mot **B**, så här får vi $\frac{\partial M}{\partial R_C} = -y$. Förskjutningen r_c fås nu ur Castilianos 2a sats:

$$0 = r_c = \frac{\partial}{\partial R_C}\left(\int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI}dx + \int_0^L \frac{M(y)^2}{2EI}dy\right) = \frac{1}{EI}\left(\int_0^L \left(\frac{QL}{2} - R_C L\right) \cdot (-L)dx + \int_0^L \left(\frac{Qy^2}{2L} - R_C y\right) \cdot (-y)dy\right) =$$

$$\frac{1}{EI}\left[-\frac{QL^3}{2} + R_C L^3 - \frac{QL^4}{8L} + \frac{R_C L^3}{3}\right] = \frac{L^3}{EI}\left(\frac{4R_C}{3} - \frac{5Q}{8}\right)$$

Vilket som ovan ger att $R_C = \frac{15Q}{32}$.

5.



Axialkraften P är riktad längs balkens medellinje och angriper balken vid mittstödet **B**.

a: Bestäm övre och undre gräns för kritisk last P_{kr} med avseende på elastisk stabilitet. (2p)

b: Den kritiska lasten kan beräknas genom att lösa differentialekvationen

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + n^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,\ x \in (0, L),\ \text{där } n^2 = \frac{P}{EI}.$$

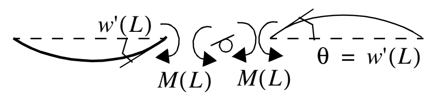
Ange och motivera de randvillkor som då behövs för att bestämma P_{kr}. Randvillkoren ska ges i termer av villkor på funktionen w och dess derivator. Observera att bara delen **AB** är tryckt!

<u>Lösning a:</u> Utan delen **BC** får vi en vekare struktur och därmed lägre knäcklast; delen **AB** blir i detta fall en 'Euler 2a'. Om å andra sidan delen **BC** har oändlig böjstyvhet fås en styvare struktur och högre knäcklast; i detta fall kan strukturen inte rotera kring **B** och **AB** beter sig som 'Euler 3'.

Alltså gäller för den kritiska lasten att $\frac{\pi^2 EI}{L^2} < P_{\mathrm{kr}} < \frac{2{,}05\pi^2 EI}{L^2}$

<u>b:</u> Transversalförskjutningar är förhindrade vid $x = 0$ och $x = L$, så två av villkoren är $w(0) = 0$ samt $w(L) = 0$.

Vid $x = 0$ är snitt momentet 0, och eftersom $M = -EI\frac{d^2w}{dx^2}$ kan vi formulera detta som $\frac{d^2w}{dx^2}(0) = 0$.



Vid $x = L$ fås i utböjt läge en vridningsvinkel θ som kan relateras till snittmomentet $M(L)$; ur elementarfall får vi (delen BC): $\theta = M(L)\frac{L}{3EI}$. Med $\theta = \frac{dw}{dx}(L)$ och

$M(L) = -EI\frac{d^2w}{dx^2}(L)$ kan detta skrivas $\frac{d^2w}{dx^2}(L) + \frac{3}{L}\frac{dw}{dx}(L) = 0$.