TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR F (MHA081)

Tid: Onsdagen den 29:e Augusti 2007, klockan 08.30–12.30, i M-huset
Lärare: Peter Hansbo, ankn 1494

Salsbesök av lärare: c:a kl 9.30 och 11.30.
Lösningar: anslås på kurshemsidan onsdag 29/8.
Preliminärt rättningsresultat: anslås på Inst. för tillämpad mekanik senast den 7/9.
Rättningsgranskning: sker på Inst. för tillämpad mekanik torsdag 7/9 kl 12.00–13.00.

Tillåtna hjälpmedel:

1. Grundläggande hållfasthetslära av Hans Lundh, KTH Inst. för hållfasthetslära, valfri upplaga.
2. Handbok och formelsamling i hållfasthetslära, Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga eller utdrag ur denna; vid Inst. för tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.
3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.
4. Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.

Egna anteckningar får finnas på befintliga sidor i Grundläggande hållfasthetslära, dock inga lösta exempel. I övrigt tillåts inga egna anteckningar. Om hjälpmedel används vid lösning av problem skall referens och sidhänvisning ges.

Poängbedömning: Uppgifterna kan vardera maximalt ge 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

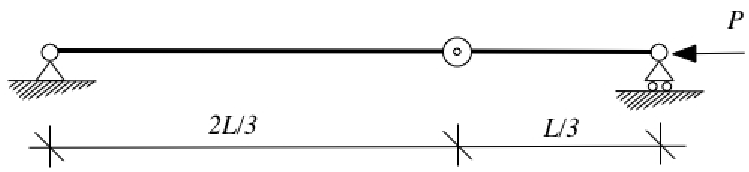
Betygsgränser	Poäng
3	10–14
4	15–19
5	20–

Uppgifterna är **ej** ordnade efter svårighetsgrad. Läs gärna igenom alla uppgifter innan du sätter igång och räknar. Börja sedan med de uppgifter du känner dig säker på.

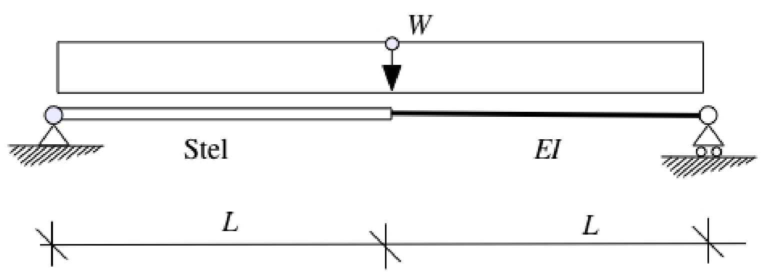
Räkna lugnt!

Uppgifter

1 Två **stela** stänger är förenade med en rotationsfjäder enligt figur. Fjäderns styvhet betecknas k. *Bestäm kritiskt värde på lasten* P. (5p)



2 En balk bestående av två delar, en stel och en flexibel med böjstyvhet EI, är belastad med en jämnt utbredd last med intensitet W [kraft/längdenhet] enligt figur. *Bestäm med valfri metod utböjningen mitt på balken.* (5p)

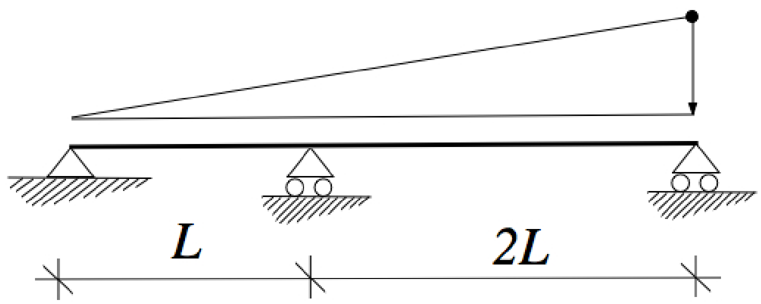


3 Töjningsmatrisen i en punkt har genom mätningar uppskattats till

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

Bestäm till beloppet maximala **huvudspänningen** *om* $E = 100$ GPa *och* $\nu = 0.25$. (5p)

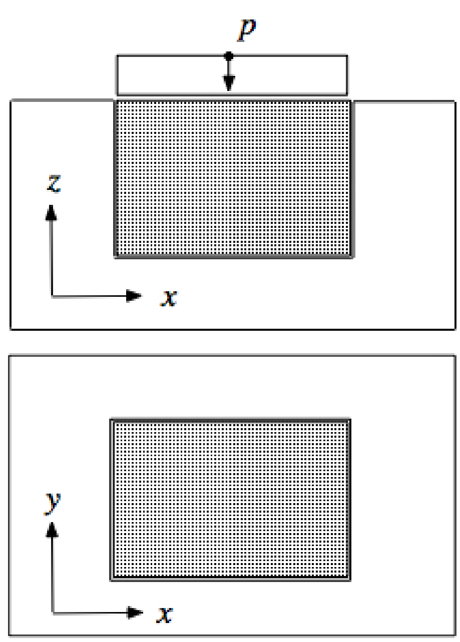
4 En balk är bastad enligt figur. Lasten har maximal intensitet W [kraft/längdenhet] och balken har konstant böjstyvhet. *Rita moment- och tvärkraftsdiagram för balkens vänstra fack (från det fasta stödet till första rullstödet).* (5p)



5 En block av ett linjärt elastiskt material är exakt och friktionslöst inpassat i en stel kropp och belastad med ett tryck p enligt figur. Elasticitetsmodulen betecknas E och Poissons tal ν.

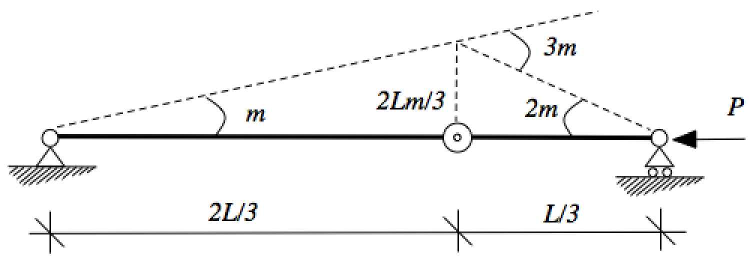
(a) *Bestäm samtliga spänningar och töjningar i rätblocket.* (3p)

(b) *Poissons tal skall teoretiskt upffylla* $\nu \in (-1, 1/2)$. *Ge ett energiargument för att* $\nu < -1$ *eller* $\nu > 1/2$ *är orimligt utgående från den beräknade lösningen.* (2p)



Lösningar, 070829

1 Två **stela** stänger är förenade med en rotationsfjäder enligt figur. Fjäderns styvhet betecknas k. *Bestäm kritiskt värde på lasten P.* (5p)



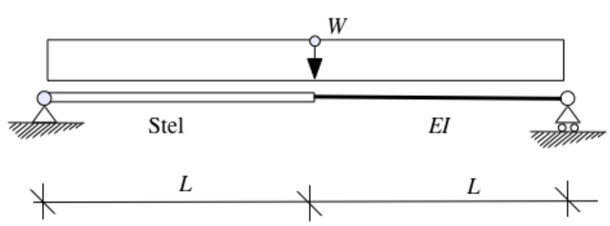
Enligt figuren vrids rotationsfjädern vinkeln $3m$ och motsvarande moment i fjädern är $M = 3km$. De vertikala stödreaktionerna är noll även i utböjt läge pga global jämvikt, varför momentjämvikt vid fjädern ger

$$3km = P\frac{2Lm}{3}$$

och kritisk last blir

$$P_k = \frac{9k}{2L}.$$

2 En balk bestående av två delar, en stel och en flexibel med böjstyvhet EI, är belastad med en jämnt utbredd last med intensitet W [kraft/längdenhet] enligt figur. *Bestäm med valfri metod utböjningen mitt på balken.* (5p)



Här används Castiglianos sats. Balken är statiskt bestämd, varför vi kan använda sambandet

$$M'' = W \implies M = \frac{1}{2}Wx^2 + Cx + D.$$

Randvillkoren $M(0) = 0$ och $M(2L) = 0$ ger att

$$M = \frac{Wx^2}{2} - WLx.$$

Inför en fiktiv punktlast P mitt på balken. Denna ger ett moment i högra delen av balken som är

$$M = -\frac{P}{2}(2L - x).$$

Vi har att töjningsenergin

$$W_{\text{balk}} = \frac{1}{2}\int_L^{2L} \frac{M^2}{EI}\, dx.$$

Utböjningen p ges av

$$p = \frac{\partial W_{\text{balk}}}{\partial P} = \int_L^{2L} \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P} dx.$$

Sätt in att $\partial M/\partial P = x/2 - L$, att $P = 0$ och integrera:

$$p = \int_L^{2L} \left(\frac{Wx^2}{2} - WLx\right)\left(\frac{x}{2} - L\right) dx = \frac{5WL^4}{48}.$$

3 Töjningsmatrisen i en punkt har genom mätningar uppskattats till

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

Bestäm till beloppet maximala **huvudspänningen** *om* $E = 100$ GPa *och* $\nu = 0.25$. (5p)

Huvudtöjningarna ges av lösningarna till

$$\begin{vmatrix} 1-\epsilon & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 2-\epsilon & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1-\epsilon \end{vmatrix} = 0,$$

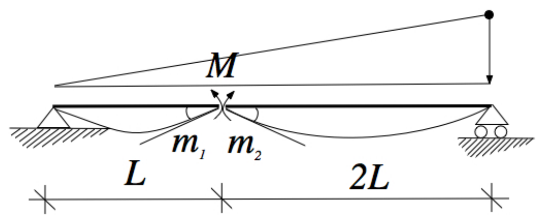
(räknat i promille) vilket ger

$$\epsilon^3 - 4\,\epsilon^2 + \frac{9}{2}\epsilon - \frac{3}{2} = 0, \quad \epsilon_1 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{3})\,‰, \quad \epsilon_2 = 1\,‰, \quad \epsilon_3 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{3})\,‰.$$

Huvudspänningsriktiningarna är desamma som huvudtöjningsriktingarna för isotrop elasticitet. Enligt Hookes generaliserade lag har vi (eftersom alla huvudtöjningar är positiva) att största huvudspänningen ges av

$$\sigma_{\max} = \frac{E}{1+\nu}\left(\epsilon_1 + \frac{\nu}{1-2\nu}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)\right) \approx 349\text{MPa}.$$

4 En balk är bastad enligt figur. Lasten har maximal intensitet W [kraft/längdenhet] och balken har konstant böjstyvhet. *Rita moment- och tvärkraftsdiagram för balkens vänstra fack (från det fasta stödet till första rullstödet).* (5p)



Elementarfall ger att

$$m_1 = \frac{ML}{3EI} + \frac{W/3L^3}{45EI}, \quad m_2 = \frac{2ML}{3EI} + \frac{7(2W/3)(2L)^3}{360EI} + \frac{W/3(2L)^3}{24EI}.$$

Geometrivillkoret $m_1 = -m_2$ ger att

$$M = -\frac{2WL^2}{9}.$$

Stödreaktionen i vänstra stödet ges då av

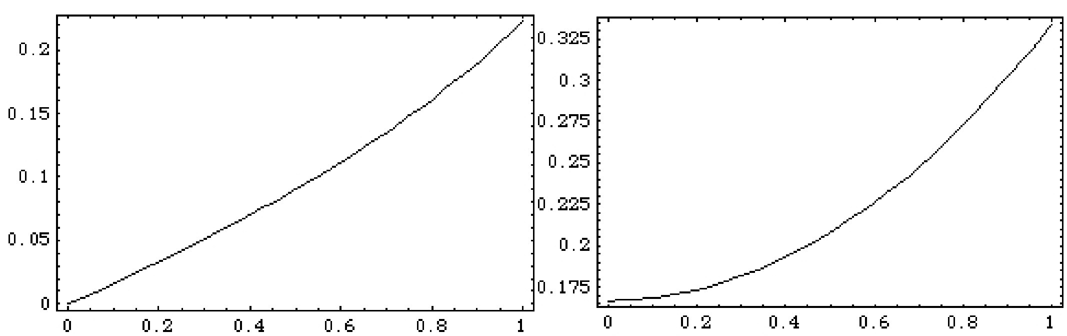
$$RL - \frac{W}{3}L\frac{1}{2}\frac{L}{3} + \frac{2WL^2}{9} = 0, \quad R = -\frac{WL}{6}.$$

Momentjämvikt vid x mätt från vänstra stödet ger:

$$M(x) - \frac{WL}{6}x - \frac{Wx}{3L}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3} = 0, \quad M(x) = \frac{WLx}{6} + \frac{Wx^3}{18L},$$

och också

$$T = \frac{dM}{dx} = \frac{WL}{6} + \frac{Wx^2}{6L}.$$

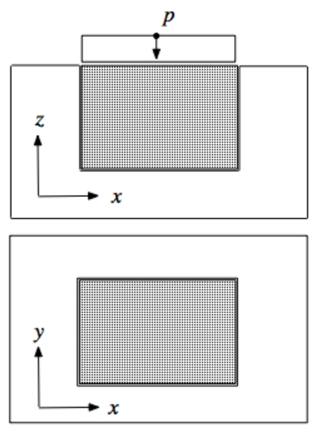


Figur 1: Moment och tvärkraft på $0 \leq x \leq L$

5 En block av ett linjärt elastiskt material är exakt och friktionslöst inpassat i en stel kropp och belastad med ett tryck p enligt figur. Elasticitetsmodulen betecknas E och Poissons tal ν.

(a) *Bestäm samtliga spänningar och töjningar i rätblocket.* (3p)

(b) *Poissons tal skall teoretiskt upffylla $\nu \in (-1, 1/2)$. Ge ett energiargument för att $\nu < -1$ eller $\nu > 1/2$ är orimligt utgående från den beräknade lösningen.* (2p)



(a): Eftersom hålet är stelt gäller att $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$, och eftersom det är friktionsfritt har vi $\epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$. Hookes lag ger

$$\left.\begin{array}{rcl} 0 & = & \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\ 0 & = & \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \\ E\epsilon_z & = & \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{array}\right\}$$

varur vi får

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu\sigma_z}{1-\nu} = \frac{\nu E\epsilon_z}{(1-2\nu)(1+\nu)}.$$

Ur jämvikt får vi att $\sigma_z = -p$ och alltså

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\nu p}{1-\nu}, \quad \epsilon_z = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)p}{(1-\nu)E}.$$

(b): Töjningsenergin per volymsenhet blir

$$W' = \int_0^{\epsilon_z} \sigma_z d\hat{\epsilon}_z = \int_0^p \hat{p}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} d\hat{p} = \frac{p^2}{2}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}$$

Om $\nu > 1/2$ eller $\nu < -1$ blir denna töjningsenergi negativ, dvs materialets energi minskar vid pålastning (materialet uträttar arbete vid pålastning).