

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

11 JANUARI 2021

Lösningar

- Tid och plats: 14⁰⁰ – 18³⁰ hemtentamen via Canvas och Zoom
- Lärare: Peter Möller. Närvarar på Zoom, tel 031 772 1505 eller mejl peter.moller@chalmers.se om oklarheter uppkommer under tentamenstiden
- Betygsättning: En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 10. Till tentamensresultatet läggs poängen från inlämningsuppgifterna som givits under kursens gång (ht 2020), maximalt 10 poäng. Det krävs 8 poäng, varav minst 2p på tentamen, för betyg 3; 12 poäng, varav minst 3p på tentamen, ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng
- Resultatlista: Anslås på Canvas senast 28/1. Resultaten sänds till betygsexpeditionen vecka 5.
- Granskning: Skriftligt med blankett på Canvas (pdf). Lösningsförslagen arkiveras i 2 år.
- Varje tentamensproblem har en motsvarande Canvas-uppgift/assignment. Där finner du uppgiftstexten i en pdf, samt eventuellt annan fil som behövs, och kan lämna in ditt lösningsförslag.

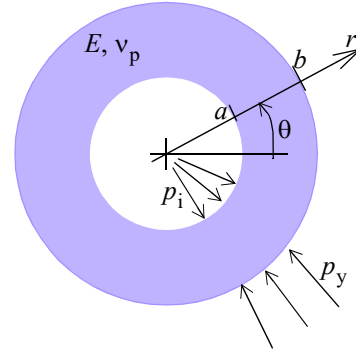
Tänk på:

- inlämnade programfiler ska vara försedda med kommentarer så att det går att följa tankegången i ett lösningsförslag. Figurer förse med förklarande text och axlar namnges
- Skriv så att den som ska rätta, kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid poängsättningen.
- Förklara/definiera införda beteckningar.
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.
- **Skriv namn i början på varje inlämnad fil**

1

Vi ska här titta på ett rotationssymmetriskt elasticitetsproblem i ett cylindriskt koordinatsystem (r, θ, z) . För ett tjockväggigt rör som belastas med ett yttre tryck p_y och ett inre övertryck p_i fås den radiella förskjutningen $u = u(r)$ som lösningen till randvärdesproblemet

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right] &= 0 & a < r < b \\ \sigma_r(a) &= -p_i \\ \sigma_r(b) &= -p_y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



där σ_r är normalspänningen i radiell led. När den primärt obekanta, $u(r)$, är bekant kan vi beräkna normalspänningarna i radiell och tangentiell led med

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(r) &= \frac{E}{1-\nu_p^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu_p \frac{u}{r} \right) \\ \sigma_\theta(r) &= \frac{E}{1-\nu_p^2} \left(\frac{u}{r} + \nu_p \frac{du}{dr} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

där E och ν_p är materialets elasticitetsmodul respektive tvärkontraktionstal. För att variationsformulera randvärdesproblemet (1), multiplicerar vi differentialekvationen med en (nästan) godtycklig testfunktion $v = v(r)$ och integrerar över området (ytan eller volymen); efter partialintegration fås då

$$\int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [vr] \frac{d}{dr} [ur] dr = \left[v \frac{d}{dr} [ur] \right]_a^b \quad (3)$$

- a: Slutför variationsformuleringen genom att utveckla randtermen i högerledet (3) genom att införa randvillkoren (**Ledning:** utnyttja (2) för att uttrycka $\frac{du}{dr}$ i σ_r och jämför gärna resultatet med inlämningsuppgift 1 (där vi dock hade ett annat villkor vid $r = b$)). FE-formulera sedan problemet med testfunktioner enligt Galerkins metod. Var noga med att definiera införda variabler/beteckningar. (2p)
- b: Använd Matlab/Calfem för att ta fram en FE-approximation med $a = 25$ mm, $b = 75$ mm, $p_i = 0$ och $p_y = 250$ MPa (materialdata kan väljas godtyckligt). Bifogad fil **u1.m** löser problemet från inlämningsuppgift 1; du kan modifiera denna för att ta hänsyn skillnaden i belastning och randvillkor.

Efter det att nodvariablerna beräknats (**solveq**) följer ett stycke kod där σ_r och σ_θ enligt den analytiska lösningen av randvärdesproblemet (1) plottas. Komplettera denna del genom att beräkna och plotta spänningarna (ekv (2)) enligt FE-approximationen. Använd 1 punkt för varje element i beräkningen och motivera valet av punktens läge. (3p)

Redovisning: en pdf-fil och en färdigställd m-fil enligt b-uppgiften

2

Poissons ekvation på ett område $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ges av

$$-\operatorname{div}[\mathbf{D}\nabla u] = f(x, y)$$

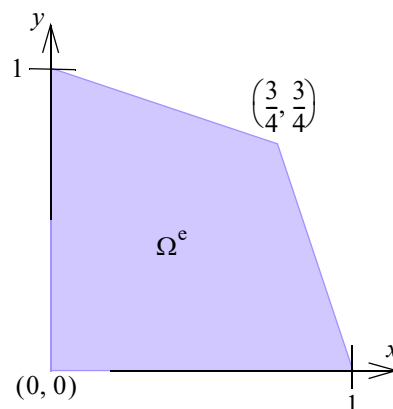
där $\mathbf{D}$ är en given konstitutiv matris, f en bekant lastfunktion, gradientoperatoren $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$ och $u = u(x, y)$ den

obekanta. En FE-formulering av den svaga formen, med testfunktioner enligt Galerkins metod, ger elementstyhetsmatrisen $\mathbf{K}^e$ och elementlastvektorn $\mathbf{f}^e$ enligt

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} (\nabla \mathbf{N}^e)^T \mathbf{D} (\nabla \mathbf{N}^e) d\Omega \quad \mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{eT} f d\Omega$$

där $\mathbf{N}^e$ är en radvektor med basfunktionerna definierade på elementet med arean Ω^e . Bifogad m-fil, **el4n.m**, använder gaussintegration och en isoparametrisk avbildning för att beräkna $\mathbf{K}^e$ och $\mathbf{f}^e$ för ett 4-nods-element.

- a: Sätt $f = 1$ och använd **el4n** (eller Calfem-versionen **flw2i4e**) för att beräkna elementlastvektorn för det visade elementet – använd 2 eller 3 integrationspunkter. Visa att summan av vektorelementen blir lika med elementarean och förklara varför det blir så (1p)



I b- och c-uppgifterna nedan behöver du inte bry dig om elementlasten $\mathbf{f}^e$, utan bara behandla vad som rör elementstyhetsmatrisen $\mathbf{K}^e$.

- b: Beskriv i ord vilka förändringar som måste göras i **el4n** för att istället räkna fram elementstyhetsmatrisen för ett 2D elasticitetsproblem (2p)
- c: Skriv om/editera **el4n** så att funktionen räknar fram elementstyhetsmatrisen för ett 2D elasticitetsproblem. (2p)

Redovisning: en pdf-fil med lösningsförslagen till deluppgifterna a och b, samt en m-fil med färdigställd funktion enligt c-uppgiften.

Lösning 1a: Ur ekv (2) fås $\frac{du}{dr} = \frac{1-v_p^2}{E}\sigma_r - v_p \frac{u}{r}$ som insatt i vänsterledet ekv (3) ger

$$v \frac{d}{dr}[ur] = v \left(r \frac{du}{dr} + u \right) = v \left(\frac{1-v_p^2}{E} r \sigma_r - v_p u + u \right) = \frac{1-v_p^2}{E} v \left(r \sigma_r + \frac{E}{1+v_p} u \right)$$

och med gränserna $r = a$ respektive $r = b$

$$\int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr}[vr] \frac{d}{dr}[ur] dr = \frac{1-v_p^2}{E} v(b) \left(b(-p_y) + \frac{E}{1+v_p} u(b) \right) - \frac{1-v_p^2}{E} v(a) \left(a(-p_i) + \frac{E}{1+v_p} u(a) \right)$$

Multiplikation med $\frac{E}{1-v_p^2}$ ger, efter att obekanta samlats i vänsterledet, variationsproblemet

$$\frac{E}{1-v_p^2} \int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr}[vr] \frac{d}{dr}[ur] dr - \frac{E}{1+v_p} v(b) u(b) + \frac{E}{1+v_p} v(a) u(a) = v(a) a p_i - v(b) b p_y$$

Approximera nu den obekanta $u \approx u_h = N\mathbf{a}$, där $N = [N_1(r) \ N_2(r) \ \dots \ N_n(r)]$ är en radvektor med valda basfunktioner och $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T$ en kolumnvektor med (obekanta) nodvariabler. Insättning i variationsproblemet ger

$$\left[\frac{E}{1-v_p^2} \int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr}[vr] \frac{d}{dr}[Nr] dr - \frac{E}{1+v_p} v(b) N(b) + \frac{E}{1+v_p} v(a) N(a) \right] \mathbf{a} = v(a) a p_i - v(b) b p_y$$

Välj nu testfunktionerna enligt Galerkin: $v = N_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Varje val ger en ekvation; samlas dessa radvis fås

$$\left[\frac{E}{1-v_p^2} \int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \\ N_n \end{bmatrix} r \frac{d}{dr} [Nr] dr - \frac{E}{1+v_p} \begin{bmatrix} N_1(b) \\ N_2(b) \\ \dots \\ N_n(b) \end{bmatrix} N(b) + \frac{E}{1+v_p} \begin{bmatrix} N_1(a) \\ N_2(a) \\ \dots \\ N_n(a) \end{bmatrix} N(a) \right] \mathbf{a} = \begin{bmatrix} N_1(a) \\ N_2(a) \\ \dots \\ N_n(a) \end{bmatrix} a p_i - \begin{bmatrix} N_1(b) \\ N_2(b) \\ \dots \\ N_n(b) \end{bmatrix} b p_y$$

eller

$$\left[\frac{E}{1-v_p^2} \int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [N^T r] \frac{d}{dr} [Nr] dr - \frac{E}{1+v_p} N^T(b) N(b) + \frac{E}{1+v_p} N^T(a) N(a) \right] \mathbf{a} = N^T(a) a p_i - N^T(b) b p_y$$

Lösning 1b:

```
%  
% Tentamensuppgift 1b 11/1 2021  
%  
clear all; close all  
%  
% materialdata  
E = 5e9; ny = 0.4;  
  
%  
% Geometri: innre och yttre radie  
ri = 0.025; ro = 0.075;  
  
%  
% Belastning yttre tryck p_y  
press = 250e6;  
  
% Diskretisering: antal element och noder  
% h = elementlängd (alla lika)  
nel = 15; nno = nel + 1;  
h = (ro - ri)/nel;  
  
%  
% generera nodkoordinater - insidan och utåt  
xn = linspace(ri,ro,nno);  
  
% init: styvhetsmatris och lastvektor (1 dof/nod)  
k = zeros(nno); f = zeros(nno,1);  
  
%  
% beräkna elementstyvhetsmatris och assemblera  
fac = E/(1 - ny*ny);  
for iel = 1:nel  
    ln = log(xn(iel+1)/xn(iel));  
    r1h = xn(iel)/h;  
    r2h = xn(iel+1)/h;  
    ke = [-2+r2h*r2h*ln, -r1h*r2h*ln; 0, 2+r1h*r1h*ln];  
    ke(2,1) = ke(1,2);  
    %  
    % assemblera; noder iel och iel+1 på element iel  
    k = assem([ iel iel iel+1 ],k,ke);  
end  
  
k = fac*k;  
  
%  
% bidrag från randen till styvhetsmatrisen enl uppg 1a  
fac = E/(1 + ny);  
k(1,1) = k(1,1) + fac; % inre randen  
k(nno,nno) = k(nno,nno) - fac; % yttre randen  
  
%  
% lastvektorn enl uppg 1a  
f(nno) = -press*ro;  
  
% lås för att hitta radiell förskjutning i noderna  
% Inga Dirichletvillkor i detta problem  
ur = solveq(k,f);
```

```

% Plotta sigma_r och sigma_t enligt analytiska lsningen
% till randvrdesproblemet (1)
np = max( [ 101 5*nel+1] ); % antal punkter dr sigma berknas
xp = [ri:(ro-ri)/(np-1):ro]'; % r-koord fr punkterna
c = -250e6*ri^2/(ro^2 - ri^2);
sigr = zeros(np,1);
sigt = sigr;
sigr = c*((ro/ri).^2 - (ro./xp).^2);
sigt = c*((ro/ri)^2 + (ro./xp).^2);

figure(1); clf;
plot(xp*1e3,sigr*1e-6,'k-'); grid on; hold on;
plot(xp*1e3,sigt*1e-6,'r-');

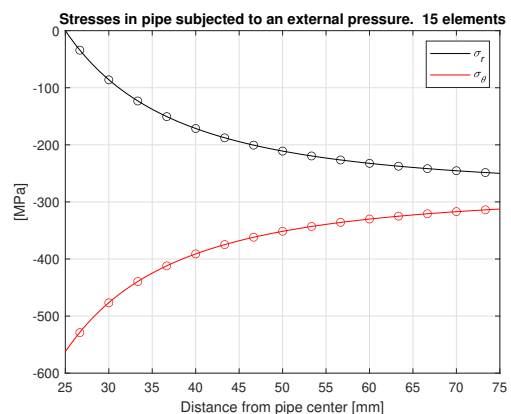
hold on

%
% Beräkna spänningarna (ekv (2)) enligt FE-approximationen
% Avänd 1 punkt i varje element
% Vi väljer elementens mittpunkter där derivatan blir bäst approximerad
sigrFE = zeros(nel,1);
sigtFE = zeros(nel,1);
xpFE = zeros(nel,1); % r-koord där spnningarna beräknas - använd för plot
fac = E/(1 - ny*ny);
for iel = 1:nel
%
% r-koord och radiell förskjut i elementmitt
xpFE(iel) = (xn(iel+1) + xn(iel))/2;
urc = (ur(iel+1) + ur(iel))/2;
%
% derivatan av FE-förskjutningen (konstant över elementet)
dur = (ur(iel+1) - ur(iel))/h;
%
% Spänning i elementmitt
sigrFE(iel) = fac*(dur + ny*urc/xpFE(iel)); % radiellt
sigtFE(iel) = fac*(ny*dur + urc/xpFE(iel)); % tangentiellt
end

% plotta FE spänningarna
plot(xpFE*1e3,sigrFE*1e-6,'ko');
plot(xpFE*1e3,sigtFE*1e-6,'ro');

str = sprintf('Stresses in pipe subjected to an external pressure. %3d elements',nel);
title(str);
xlabel('Distance from pipe center [mm]');
ylabel('[MPa]');
legend('\it\sigma_r','\it\sigma_{\theta}');

```



Lösning 2a:

s2a.m:

```

ex = [0 1 3/4 0]; ey = [0 0 3/4 1];
fxy = 1; ngp = 2;
[Ke, fe]=el4n(ex,ey,eye(2),ngp,fxy);
fprintf('\n elementytan är %f \n',sum(fe))
>> s2a

```

```

elementytan är 0.750000
>>

```

Enligt tes fås the j :te komponenten i elementlastvektorn som $\int_{\Omega^e} N_j^e f d\Omega$, så summan av komponenterna blir

$\int_{\Omega^e} (\sum N_j^e) f d\Omega$. Eftersom summan av basfunktionerna på elementet är 1, blir detta elementarean då $f = 1$.

Lösning 2b: I Poissonproblemet har vi bara en obekant funktion $u = u(x, y)$ så approximationen på elementet är $u \approx u_h = N^e \mathbf{a}^e$ med basfunktionerna $N^e = [N_1^e \ N_2^e \ N_3^e \ N_4^e]$ och motsvarande nodvariabler samlade i $\mathbf{a}^e$, samt

differentialoperatör $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$, så vi har $\mathbf{B}^e$ -matrisen: $\mathbf{B}^e = \nabla N^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \end{bmatrix}$.

I elasticitetsproblemet (2D) har vi två obekanta funktioner så $\mathbf{u}_h = N^e \mathbf{a}^e$, med $N^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & \dots & N_4^e & 0 \\ 0 & N_1^e & \dots & 0 & N_4^e \end{bmatrix}$ och 8

nodvariabler i $\mathbf{a}^e$. Med operatör $\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$ får vi då $\mathbf{B}^e = \tilde{\nabla} N^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dots \end{bmatrix}$ (Ottosen&Petersson ekv

19.58). Basfunktionernas derivatorna beräknas som innan eftersom den isoparametriska avbildningen är oförändrad. Den konstitutiva matrisen $\mathbf{D}$, som i det (2D) skalära problemet är en 2×2 matris, är i elasticitetsproblemet en 3×3 matris, så elementstyvhetmatrisen blir nu 8×8 , jämfört med 4×4 i fallet värmeledning (eller, mer allmänt, Poissonproblem).

Lösning 2c:

```

function [Ke]=el4nV2(ex,ey,D,ngp)
% [Ke]=el4nV2(ex,ey,D,ngp)
%
% Berkna elementstyvhetmatrisen för
% ett isoparametriskt 4-nods element.

% 2D elasticitetsproblem
%
% Indata: ex      : radvektor med nodernas x-koordinater i moturs ordning:

```

```

%          [ x1  x2  x3  x4]
%      ey   : radvektor med nodernas y-koordinater i moturs ordning:
%          [ y1  y2  y3  y4]
%      D     : 3x3 konstitutiv matris; antas symmetrisk och positivt
%             definit
%      ngp    : antal Gauss punkter i varje riktning; 1, 2 eller 3
%
% Utdata: Ke   : elementstyvhetsmatrisen 8x8; symmetrisk
%
% 4/1 2021 - Peter W Mller
%

%
% initiera utdata
Ke = zeros(8);

%
% tolerans för Jacobianens determinant
minDetJ = 1.e-16;

%
% Integrationsvikter (wgp) och koordinater (cgp); Gausskvadratur
%
if (ngp<1) ngp=1; end
if (ngp>3) ngp=3; end
if (ngp==1)
    wgp = [ 2];
    cgp = [ 0];
end
if (ngp==2)
    wgp = [ 1 1];
    fac = 1/sqrt(3);
    cgp = [ -fac fac];
end
if (ngp==3)
    wgp = [ 5/9  8/9  5/9];
    fac = sqrt(0.6);
    cgp = [ -fac  0  fac];
end

%
% för varje integrationspunkt i eta-led
for ieta = 1:ngp
    %
    % vikt och eta-koord. fr punkten
    weta = wgp(ieta);
    eta  = cgp(ieta);

    % för varje punkt i xsi-led
    for ixsi = 1:ngp
        %
        % vikt och xsi-koordinat
        wxsi = wgp(ixsi);
        xsi  = cgp(ixsi);

        % Basfunktionernas funktionsvärden i punkten; 4x1; behövs inte här
        NT = [(1-xsi)*(1-eta);

```

```

        (1+xsi)*(1-eta);
        (1+xsi)*(1+eta);
        (1-xsi)*(1+eta)]/4;

%
% Derivatorna m.a.p lokala koordinater (xsi och eta) av
% basfunktionern/formfunktionerna; 2x4
dN = [ -(1-eta)   (1-eta)   (1+eta)  -(1+eta);
        -(1-xsi) -(1+xsi)   (1+xsi)   (1-xsi)]/4;

%
% Använd formfunktionernas derivator och nodkoordinaterna
% för att ställa upp Jacobianen
% jac = [dx/dxsi dy/dxsi;
%         dx/deta dy/deta]
jac = [ dN(1,:)*ex' dN(1,:)*ey'; dN(2,:)*ex' dN(2,:)*ey'];

% kontrollera att determinanten är > 0
detJ = det(jac);

if ( detJ < minDetJ)
    fprintf(1,'Bad element geometry in function EL4N: detJ =
%0.5g\n',detJ);
    return;
end

%
% Invertera Jacobianen
iJac = [jac(2,2) -jac(1,2); -jac(2,1) jac(1,1)]/detJ;

%
% Beräkna gradienten av basfunktionerna; 2x4
% En kolumn för varje basfunktion; rad 1: derivatorna m.a.p x
% rad 2: derivatorna m.a.p y
dNxy = iJac*dN;

%
% Be-matrisen enl. Ottosen&Petersson ekv 19.58
Be = zeros(3,8);
Be(1,1:2:7) = dNxy(1,:);
Be(2,2:2:8) = dNxy(2,:);
Be(3,1:2:7) = dNxy(2,:);
Be(3,2:2:8) = dNxy(1,:);

%
% Bidrag till elementstyvheten från Gauss-punkten
Ke = Ke + weta*wxs*detJ*(Be'*D*Be);

%
% nästa integrationspunkt i xsi-riktning
end

%
% nästa integrationspunkt i eta-riktning
end
% end el4nV2

```