

Mekanik och maritima vetenskaper, Chalmers

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

13 JANUARI 2020

Tid och plats:	14 ⁰⁰ – 18 ⁰⁰ , SB multisal
Hjälpmedel:	Typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal ca. 15 ⁰⁰ samt 16 ³⁰ .
Lösningar:	Anslås på anslagstavlan, avdelningen för dynamik, 14/1; se även kurshemsidan (Canvas).
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 29/1 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 3/2 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	fredag 31/1 kl 12.30–14.00, seminarierum Newton plan 3 i Nya M-huset.

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid bedömningen av en lösning.
- **Förklara/definiera införda beteckningar.**
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

Låt Ω vara ett område i (x, y) -planet och beteckna dess rand med Γ ; $\mathbf{n}$ är en utåtriktad enhetsnormal till området. Vidare låter vi $v = v(x, y)$ vara en (skalär) funktion och $\mathbf{q} = [q_x(x, y) \ q_y(x, y)]^T$ en vektorvärd funktion, som båda är definierade på Ω . Då gäller

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{q} d\Omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{q}^T \mathbf{n} d\Gamma \quad (\text{divergensteoremet})$$

där $\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}$, samt

$$\int_{\Omega} v \operatorname{div} \mathbf{q} d\Omega = \oint_{\Gamma} v \mathbf{q}^T \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla v)^T \mathbf{q} d\Omega \quad (\text{Green-Gauss sats})$$

där $(\nabla v)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$.

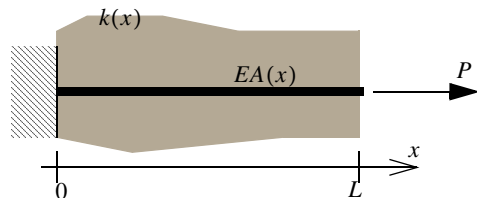
1

Visa hur Green-Gauss sats kan härledas ur divergensteoremet. (1p)

2

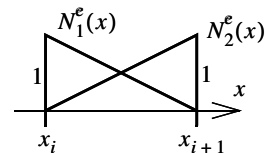
En lineärt elastisk stång med längd L och axialstyvhet $EA(x)$ ligger inbäddad i ett elastiskt medium med styvhet $k(x)$, så att en axiell förskjutning $u(x)$ ger upphov till ett mothåll $(ku)(x)$ (kraft/längd). Stångens ena ände hålls fixerad, medan den andra sidan belastas med en kraft P . Den axiella förskjutningen ges då av lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left[EA \frac{du}{dx} \right] + ku = 0 & 0 < x < L \\ u(0) = 0 \\ \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = \frac{P}{EA(L)} \end{cases}$$



a: Härled den svaga formen av (variationsformulera) randvärdesproblemet och gör sedan en finit-elementformulering med testfunktioner valda enligt Galerkins metod. (2p)

b: Härled elementstyvhetsmatrisen för ett lineärt element med konstanta styvheter (EA och k) och längd $h = x_{i+1} - x_i$. **Ledning:** det går bra att sätta $x_i = 0$ och $x_{i+1} = h$ i beräkningarna (eftersom styvheten här inte beror på var längs x -axeln elementet är placerat). (2p)



c: Sätt $P = 10 \text{ N}$, $EA = 1,00 \text{ kN}$, $k = 6,00 \text{ kPa}$ samt $L = 0,200 \text{ m}$ och approximerar lösningen till randvärdesproblemet med två lika långa element (med lineära basfunktioner). (2p)

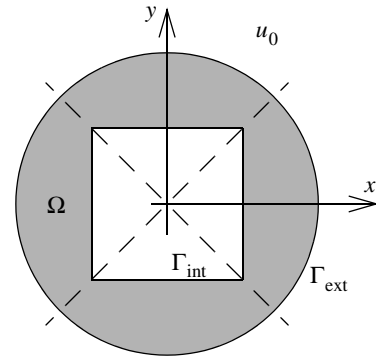
d: Axialkraften i stången är $N = EA \frac{du}{dx}$. Använd FE-approximationen för att beräkna axialkraften i något av elementen — var tydlig med vilket av elementen dina beräkningar avser och ange vid vilken x -koordinat du förväntar dig att det beräknade värdet bäst approximerar det analytiska (exakta). (1p)

3

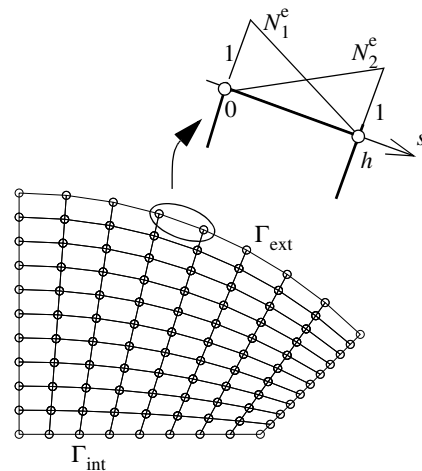
Betrakta värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k\nabla u) = 0 & \text{i } \Omega \\ u = g & \text{på } \Gamma_{\text{int}} \\ -k(\nabla u)^T \mathbf{n} = \alpha(u - u_0) & \text{på } \Gamma_{\text{ext}} \end{cases}$$

Här är u_0 , g , $k > 0$ och $\alpha > 0$ givna konstanter, medan $u = u(x, y)$ är den obekanta temperaturen. Området Ω är enligt figuren till höger; Γ_{ext} och Γ_{int} är yttre respektive inre randen till Ω , medan $\mathbf{n}$ är en normalvektor med längd 1 riktad ut från Ω .



- Eftersom problemet är symmetriskt med avseende på fyra axlar, kan man välja att lösa randvärdesproblemet på 1/8-del av området. Formulera randvärdesproblemet så att detta blir möjligt. (1p)
- Variationsformulera problemet (dvs härled den svaga formen av randvärdesproblemet). Gör sedan en FE-formulering med testfunktioner (viktsfunktioner) enligt Galerkins metod. (3p)
- Antag att vi delar in området med lineära element och betrakta en elementsida med längd h utmed den konvektiva randen Γ_{ext} (se illustration). Inför en lokal koordinat s och beräkna elementsidans bidrag till styvhetsmatrisen och lastvektorn p.g.a det konvektiva randvillkoret. (2p)



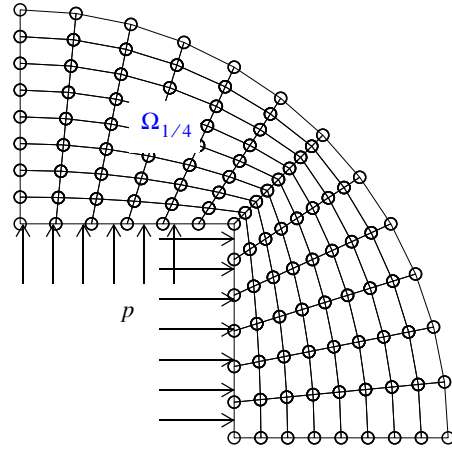
Betrakta återigen området i uppgift 3. Vi vill nu beräkna de spänningar som uppkommer pga ett tryck p på inre randen Γ_{int} och utnyttjar två av symmetrilinjerna så att ett område $\Omega_{1/4}$ enligt figuren, beaktas. Enligt lineär elasticitetsteori är då den svaga formen av problemet

$$\int_{\Omega_{1/4}} (\tilde{\nabla} v)^T D \tilde{\nabla} u d\Omega = \oint_{\Gamma} v^T t d\Gamma$$

där Γ nu betecknar det betraktade områdets rand och där randvillkoren ännu inte införts. Vidare är D en given konstitutiv matris (symmetrisk och positivt

definit), $v = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}^T$ är en vektor med testfunktioner, $u = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}^T$ är den obekanta förskjutnings-

vektorn, $t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \end{bmatrix}$ är traktionvektorn och $\tilde{\nabla}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$



a: Inför lämpliga beteckningar på de olika delränderna och ange samtliga randvillkor. Utveckla sedan randintegralen med hänsyn till randvillkoren samt med beaktande av eventuella villkor på testfunktionerna. (2p)

b: FE-formulera problemet — ta hänsyn till randvillkoren. Av din lösning ska det framgå hur den obekanta vektorn u approximeras. Visa också hur B -matrisen ser ut. (2p)

c: Då vi hittat en FE-approximation u_h till förskjutningen kan vi beräkna spänningarna enligt

$\tilde{\sigma} \approx \tilde{\sigma}_h = D \tilde{\nabla} u_h$. I vilket eller vilka områden kan man förvänta sig att felet $(\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_h)$ är som störst? Motivera ditt svar. (1p)

d: Beakta nu situationen att vi skrivit en funktion som beräknar elementstyvhetsmatrisen för ett 4-nods isoparametriskt element för att lösa ett värmeledningsproblem (likt det i uppgift 3 ovan). Vilka förändringar måste göras för att istället beräkna elementstyvhetsmatrisen för ett 2D elasticitetsproblem? (1p)

Lösning 1: Låt $v = v(x, y)$ vara en skalär funktion och bilda vektorfunktionen vq ; insättning i divergensteoremet ger då

$$\int_{\Omega} \text{div}(vq) d\Omega = \oint_{\Gamma} v q^T n d\Gamma \quad (1)$$

Vi har nu att

$$\text{div}(vq) = \frac{\partial}{\partial x} [v q_x] + \frac{\partial}{\partial y} [v q_y] = v \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} q_x + \frac{\partial v}{\partial y} q_y = v \text{div}(q) + (\nabla v)^T q$$

Insättning i ekv (1) ger Green–Gauss sats: $\int_{\Omega} v \text{div}(q) d\Omega = \oint_{\Gamma} v q^T n d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla v)^T q d\Omega$

Lösning2a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v(x)$ och integrera över intervallet

$$\int_0^L \left(-v \frac{d}{dx} \left[EA \frac{du}{dx} \right] + kvu \right) dx = 0$$

Integrandens första term partialintegreras

$$-\left[vEA \frac{du}{dx} \right]_0^L + \int_0^L \left(EA \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} + kvu \right) dx = 0$$

och randtermen utvecklas: $-\left[vEA \frac{du}{dx} \right]_0^L = -v(L)EA(L) \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} + v(0)EA(0) \frac{du}{dx} \Big|_{x=0}$. Här kan vi sätta in

randvillkoret vid $x = L$, men $\frac{du}{dx}$ är obekant vid $x = 0$; begränsa därför valet av testfunktion till

sådana att $v(0) = 0$. Då fås $-\left[vEA \frac{du}{dx} \right]_0^L = -Pv(L)$ och den svaga formen av det givna randvärdespro-

blemet blir: Bestäm u så att
$$\begin{cases} \int_0^L \left(EA \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} + kvu \right) dx = Pv(L) \\ u(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

FE-formulering: approximera $u(x)$ med en lineärkombination av valda basfunktioner $N_i(x)$,

$i = 1, 2, \dots, n$. Med $N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_n \end{bmatrix}$ och $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}^T$ kan vi skriva $u \approx u_h = N\mathbf{a}$, där $\mathbf{a}$ är de obekanta nodvariablerna. Om FE-approximationen u_h sätts in i variationsproblemet har vi n obekanta (nodvariablerna a_i); vi får n ekvationer genom att välja testfunktionen $v(x)$ på n olika sätt. Med Galerkins metod väljs $v(x) = N_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, vilket är ekvivalent med att välja v till en godtycklig lineärkombination av basfunktionerna

$$v = N_1c_1 + N_2c_2 + \dots + N_nc_n = N\mathbf{c} = \mathbf{c}^T N^T$$

där $\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}$ är de godtyckligt valda koefficienterna i lineärkombinationen. Insättning av u_h och valt v i variationsproblemet ger

$$\mathbf{c}^T \left\{ \int_0^L EA \frac{dN}{dx} \frac{dN}{dx} + kN^T N dx \mathbf{a} - PN^T(L) \right\} = 0$$

Vektorn inom klammerparentesen är alltså ortogonal mot varje val av $\mathbf{c}$ och måste alltså vara

noll-vektorn. Med $\mathbf{B} = \frac{dN}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} & \dots & \frac{dN_n}{dx} \end{bmatrix}$ har vi alltså

$$\int_0^L EAB^T \mathbf{B} + kN^T N dx \mathbf{a} = PN^T(L)$$

eller $K\mathbf{a} = \mathbf{f}$, där $K = \int_0^L EAB^T \mathbf{B} + kN^T N dx$ och $\mathbf{f} = PN^T(L)$

Lösning 2b: Vi betraktar vänsterledet i FE-formuleringen. På elementet har vi approximationen

$$u \approx u_h = \begin{bmatrix} N_1^e & N_2^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \end{bmatrix} = \mathbf{N}^e \mathbf{a}^e \text{ och alltså}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(EA \left(\frac{d\mathbf{N}^e}{dx} \right)^T \frac{d\mathbf{N}^e}{dx} + k(\mathbf{N}^e)^T \mathbf{N}^e \right) dx \mathbf{a}^e = \underbrace{\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} EA \left(\frac{d\mathbf{N}^e}{dx} \right)^T \frac{d\mathbf{N}^e}{dx} dx \right) \mathbf{a}^e}_{\mathbf{K}_1^e \mathbf{a}^e} + \underbrace{\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} k(\mathbf{N}^e)^T \mathbf{N}^e dx \right) \mathbf{a}^e}_{\mathbf{K}_2^e \mathbf{a}^e}$$

Här är $\mathbf{N}^e = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} (x_{i+1} - x) & (x - x_i) \end{bmatrix}$ och $\frac{d\mathbf{N}^e}{dx} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$, så med EA och k konstanta fås

$$\mathbf{K}_1^e = \frac{EA}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = \frac{EA}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} h = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

och

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^e &= \frac{k}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} (x_{i+1} - x)^2 & (x_{i+1} - x)(x - x_i) \\ (x_{i+1} - x)(x - x_i) & (x - x_i)^2 \end{bmatrix} dx = \frac{k}{6h^2} \begin{bmatrix} -2[(x_{i+1} - x)^3]_{x_i}^{x_{i+1}} & [(-2x^3 + 3(x_{i+1} + x_i)x^2 - 6x_{i+1}x_x x)]_{x_i}^{x_{i+1}} \\ \text{sym.} & 2[(x - x_i)^3]_{x_i}^{x_{i+1}} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{k}{6h^2} \begin{bmatrix} 2h^3 & h^3 \\ h^3 & 2h^3 \end{bmatrix} = \frac{kh}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Alltså fås } \mathbf{K}^e = \mathbf{K}_1^e + \mathbf{K}_2^e = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{kh}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lösning 2c: Med två element har vi $h = \frac{L}{2}$ och

$$\mathbf{K}^e = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{kL}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,2 & -9,9 \\ -9,9 & 10,2 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ [N/m]}$$

för båda elementen. Om vi numrerar element och noder med stigande x har vi nodvariablerna a_1 och a_2 på element 1, samt a_2 och a_3 på andra elementet. Assemblering ger då

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 10,2 & -9,9 & 0 \\ -9,9 & 10,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10,2 & -9,9 \\ 0 & -9,9 & 10,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,2 & -9,9 & 0 \\ -9,9 & 20,4 & -9,9 \\ 0 & -9,9 & 10,4 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ [N/m]}$$

varefter

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{P}\mathbf{N}^T(L) \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 10,2 & -9,9 & 0 \\ -9,9 & 20,4 & -9,9 \\ 0 & -9,9 & 10,4 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ [N/m]} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 10 \text{ [N]} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Randvillkoret vid $x = 0$ ger att $a_1 = 0$; vidare måste första ekvationen strykas eftersom den erhållits ur valet $v = N_1$ som inte uppfyller kravet $v(0) = 0$. Kvar är då

$$\begin{bmatrix} 20,4 & -9,9 \\ -9,9 & 10,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ [mm]}$$

med lösningen ($a_1 = 0$), $a_2 \approx 0,899$ [mm], $a_3 \approx 1,853$ [mm]

Lösning 2d: Normalkraften i ett element blir $N = EA \frac{du_h}{dx} = EA \frac{dN^e}{dx} \mathbf{a}^e = EA \begin{bmatrix} -1/h & 1/h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \end{bmatrix} = \frac{EA}{h} (a_2^e - a_1^e)$.

För element 1 har vi $\mathbf{a}^e = [a_1 \ a_2]^T$ och får $N_1 = 8,99$ [N]; element 2, med $\mathbf{a}^e = [a_2 \ a_3]^T$, ger $N_2 = 9,54$ [N].

För element med lineära basfunktioner blir derivatorna bäst approximerade i elementmitt, dvs $x = 0,05$ [m] och $x = 0,15$ [m] för element 1 respektive 2. (De beräknade normalkrafterna kan jämföras med den analytiska lösningen, som ger $N(0,05) = 8,98$ [N] och $N(0,15) = 9,52$ [N])

Lösning 3a: Låt Γ_{sym} beteckna symmetriränderna; derivatan av temperaturen tvärs dessa ränder måste vara noll. Vi har då

$$\begin{cases} -\text{div}(k \nabla u) = 0 & \text{i } \Omega \\ u = g & \text{på } \Gamma_{\text{int}} \\ -k(\nabla u)^T \mathbf{n} = \alpha(u - u_0) & \text{på } \Gamma_{\text{ext}} \\ (\nabla u)^T \mathbf{n} = 0 & \text{på } \Gamma_{\text{sym}} \end{cases}$$

Lösning 3b: Vi multiplicerar differentialekvationen med en nästan godtycklig testfunktion

$v = v(x, y)$ och integrerar över området: $-\int_{\Omega} v \text{div}(k \nabla u) d\Omega = 0$. Green–Gauss sats ger då

$$\int_{\Omega} (\nabla v)^T k(\nabla u) d\Omega = \oint_{\Gamma} v k(\nabla u)^T \mathbf{n} d\Gamma$$

utveckla nu randintegralen: $\oint_{\Gamma} v k(\nabla u)^T \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_{\text{ext}}} v k(\nabla u)^T \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{int}}} v k(\nabla u)^T \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{sym}}} v k(\nabla u)^T \mathbf{n} d\Gamma$

På Γ_{int} är derivatan $(\nabla u)^T \mathbf{n}$ obekant, så vi begränsar valet av testfunktioner till sådana att $v = 0$ på denna del av randen; på Γ_{ext} kan vi sätta in randvillkoret så att integranden blir $-v\alpha(u - u_0)$; på symmetriränderna blir integranden noll enligt symmetrivillkoret. Vi har då variationsproblemet: hitta u så att

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\nabla v)^T k(\nabla u) d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \alpha v u d\Gamma = \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \alpha v u_0 d\Gamma \\ u = g, v = 0 & \text{på } \Gamma_{\text{int}} \end{cases}$$

Inför nu approximationen $u \approx u_h = Na$ där $N = [N_1(x, y) \dots N_n(x, y)]$ är en radvektor med valda basfunktioner och $a = [a_1 \dots a_n]^T$ är obekanta nodvariabler. Insättning i variationsproblemet ger

$$\left(\int_{\Omega} (\nabla v)^T k B d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \alpha v N d\Gamma \right) a = \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \alpha v u_0 d\Gamma, \text{ där } B = \nabla N = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix}. \text{ Vi väljer sedan test funktionen}$$

enligt Galerkins metod, dvs $v = N_1, N_2, \dots, N_n$, och får då lika många ekvationer som obekanta nodvariabler; ekvationerna samlas radvis i ett ekvationssystem, varvid vi får

$$\left(\int_{\Omega} B^T k B d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \alpha N^T N d\Gamma \right) a = \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \alpha N^T u_0 d\Gamma \text{ (alternativt: låt } v \text{ vara en godtycklig lineärkombination av}$$

de valda basfunktionerna $v = c^T N^T$, där $c^T = [c_1 \ c_2 \dots c_n]$ väljs godtyckligt), eller

$$Ka = f$$

$$\text{där } K = \int_{\Omega} B^T k B d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \alpha N^T N d\Gamma \quad f = \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \alpha N^T u_0 d\Gamma.$$

Lösning 3c: Låt $N^e = \begin{bmatrix} \frac{h-s}{h} \\ \frac{s}{h} \end{bmatrix}$ beteckna basfunktionerna på en elementrand. Bidraget till lastvektorn blir då $f^e = \int_0^h \alpha N^{eT} u_0 ds = \alpha u_0 \int_0^h \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \end{bmatrix} ds = \alpha u_0 \int_0^h \begin{bmatrix} \frac{h-s}{h} \\ \frac{s}{h} \end{bmatrix} ds = \frac{\alpha u_0 h}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (integralerna av basfunktionerna

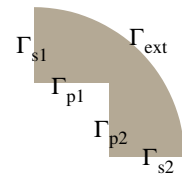
beräknas här enklast som arean mellan s -axeln och respektive funktions graf). Bidraget till styvhetsmatrisen fås som

$$\int_0^h \alpha N^{eT} N^e d\Gamma = \frac{\alpha}{h^2} \int_0^h \begin{bmatrix} (h-s)^2 & (hs-s^2) \\ (hs-s^2) & s^2 \end{bmatrix} ds = \frac{\alpha h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lösning 4a: Yttre randen är obelastad: $t_x = t_y = 0$ på Γ_{ext}

På inre randen är tractionvektorns komponent ortogonalt randen p — positiv i positiv koordinatriktning — medan komponenten längs randen är noll

$$\begin{array}{lll} t_x = 0 & t_y = p & \text{på } \Gamma_{p1} \\ t_x = p & t_y = 0 & \text{på } \Gamma_{p2} \end{array}$$



Förskjutningen är noll tvärs symmetrilinjerna, medan traktionvektorns komponent är noll längs med dessa linjer:

$$\begin{array}{lll} u_x = 0 & t_y = 0 & \text{på } \Gamma_{s1} \\ t_x = 0 & u_y = 0 & \text{på } \Gamma_{s2} \end{array}$$

Insättning i randintegralen ger

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v}^T \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_{p1}} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_{p2}} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_{s1}} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} t_x \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_{s2}} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} 0 \\ t_y \end{bmatrix} d\Gamma$$

På de symmetriska randerna Γ_{s1} och Γ_{s2} är t_x respektive t_y obekanta (stödreaktioner), så vi måste begränsa valet av testfunktionerna till sådana som uppfyller $v_x = 0$ på Γ_{s1} samt $v_y = 0$ på Γ_{s2} ;

$$\text{kvar blir då } \oint_{\Gamma} \mathbf{v}^T \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Gamma_{p1}} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_{p2}} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma$$

Lösning 4b: Approximera $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \approx \mathbf{u}_h = \begin{bmatrix} u_{xh} \\ u_{yh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n N_i a_{xi} \\ \sum_{i=1}^n N_i a_{yi} \end{bmatrix}$, där $N_i = N_i(x, y)$ är n valda bas-

funktioner och de $2n$ nodvariablerna har betecknats a_{xi}/a_{yi} . Om vi definierar

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = [a_{x1} \ a_{y1} \ a_{x2} \ a_{y2} \ \dots \ a_{xn} \ a_{yn}]^T$$

kan vi kortare skriva $\mathbf{u}_h = \mathbf{N}\mathbf{a}$. Insättning i variationsproblemet ger då

$$\left(\int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{v})^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{N} d\Omega \right) \mathbf{a} = \int_{\Gamma_{p1}} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_{p2}} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma$$

som innehåller $2n$ obekanta nodvariabler. Testfunktionerna väljs nu enligt Galerkin som

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} N_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} N_n \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_n \end{bmatrix}$$

Varje val ger en ekvation och samlas dessa radvis fås

$$\left(\int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{N})^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{N} d\Omega \right) \mathbf{a} = \int_{\Gamma_{p1}} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_{p2}} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma$$

eller $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$, med $\mathbf{f} = \int_{\Gamma_{p1}} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_{p2}} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma$ och $\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$, där

$$\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Lösning 4c: Vid det inåtvända hörnet, på den belastade randen, har den analytiska lösningen en singularitet med spänningar (förstaderivator) som går mot oändligheten då man närmar sig hörnet. Här blir den approximerade spänningen som sämst.

Lösning 4d: I värmeledningsproblemet har vi bara en obekant funktion $u = u(x, y)$ så approximationen på elementet är $u \approx u_h = N^e a^e$ med basfunktionerna $N^e = [N_1^e \ N_2^e \ N_3^e \ N_4^e]$ och motsvarande

nodvariabler samlade i a^e , samt differentialoperatören $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$ (istället för $\tilde{\nabla}$), så vi har B^e -matrisen:

sen: $B^e = \nabla N^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \end{bmatrix}$. Basfunktionernas derivatorna beräknas som innan eftersom den isoparametriska avbildningen är oförändrad, men vi måste nu ställa upp en annan B^e -matris (se uppgift 4b ovan).

Den konstitutiva matrisen D , som i det (2D) skalära problemet är en 2×2 matris, är i elasticitetsproblemet en 3×3 matris, så elementstyvhetsmatrisen blir nu 8×8 , jämfört med 4×4 i fallet värmeledning (eller, mer allmänt, Poissonproblem).