

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

26 APRIL 2019

Lösningar

Tid och plats:	14 ⁰⁰ – 18 ⁰⁰ i M-huset
Hjälpmedel:	Typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal 15 ⁰⁰ samt 17 ⁰⁰ .
Lösningar:	Anslås på anslagstavlan, avdelningen för dynamik.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 9/5 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast vecka 20 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	Fredag 10/5 12 ⁰⁰ –13 ⁰⁰ , rum Newton, plan 3 i Nya M-huset.

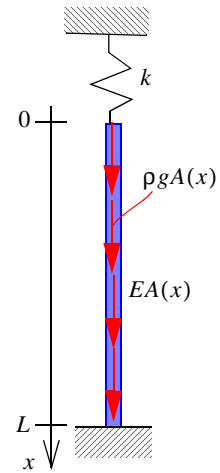
Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid bedömningen av en lösning.
- **Förklara/definiera införda beteckningar.**
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

1

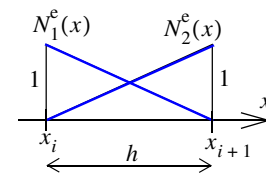
En pelare med axialstyvhetsen $EA(x)$ och längden L är upphängd i en fjäder med styvhetsen k , medan andra änden stöder mot ett stelt golv. Den belastas enbart med sin egentynad $\rho g A(x)$ (kraft/längdenhet). Den axiella förskjutningen $u(x)$ ges då som lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right] = \rho g A & 0 < x < L \\ \left(EA\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=0} - ku(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases}$$



a: Variationsformulera randvärdesproblemet och ange regularitetskraven på ingående funktioner. (2p)

b: FE-formulera problemet med testfunktioner (viktsfunktioner) enligt Galerkin. Härled elementstyvhetsmatrisen K^e och elementlastvektorn f^e för ett element med längden $h = x_{i+1} - x_i$ och två lineära basfunktioner (se figur brevid), i fallet att EA och $\rho g A$ är konstanta. (2p)

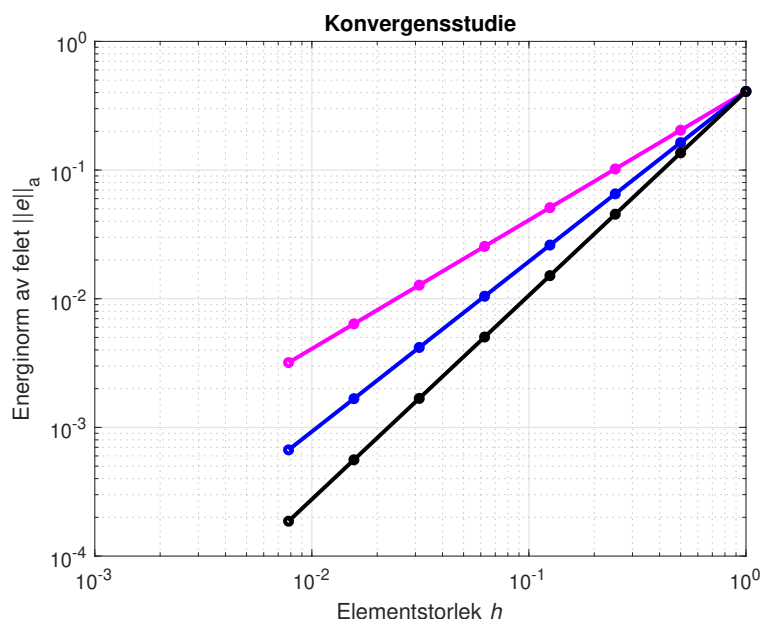


c: Använd numeriska värden $E = A = \rho g = 1$, $k = \frac{1}{2}$ samt $L = 2$ och lös problemet med 2 lika långa lineära element. (2p)

d: Med numeriska värden enligt ovan, är energinormen av den exakta lösningen $\|u\|_a = \sqrt{\frac{5}{3}}$.

Beräkna energinormen $\|e\|_a$ av diskretiseringsfelet $e = u - u_h$, där u_h är FE-approximationen enligt föregående deluppgift. (2p)

e: Antag att man genomför en konvergensstudie genom att successivt halvera elementlängderna, så att problemet löses med 2, 4, 8, ..., 256 element, och sedan plottar $\|e\|_a$ mot h . Vilken kurva (figur nedan) förväntar du dig som resultat? Svaret ska tydligt motiveras. (1p)



2

I frånvaro av volymslast, kan den svaga formen av ett 2D elasticitetsproblem skrivas

$$\int_{\Omega} (\tilde{\nabla} v)^T D \tilde{\nabla} u d\Omega = \oint_{\Gamma} v^T t d\Gamma$$

där randvillkorens inverkan inte tagits med. Här är $u = [u_x(x, y) \ u_y(x, y)]^T$ den obekanta förskjutningsvektorn, $t = [t_x(x, y) \ t_y(x, y)]^T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \end{bmatrix}$ belastningen längs randen (kraft/yta),

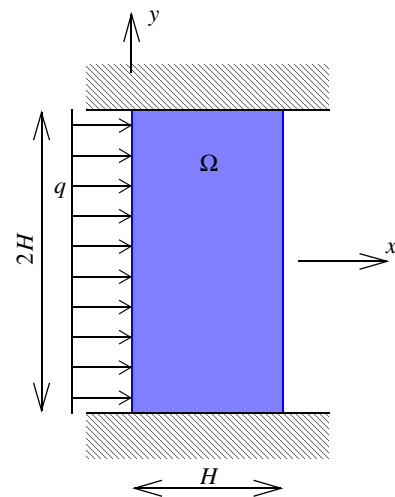
$v = [v_x(x, y) \ v_y(x, y)]^T$ en vektor med testfunktioner (viktsfunktioner) och D en konstitutiv matris som är symmetrisk och positivt definit. Tjockleken t i z -led av det studerade området Ω , med rand Γ , har antagits vara konstant. Vidare är

$$\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

och $n = [n_x \ n_y]^T$ är en utåtriktad enhetsnormal till Ω . Givet förskjutningsfältet u fås töjningarna (deformationerna) som $\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T = \tilde{\nabla} u$ och sedan spänningarna $\underline{\sigma} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}]^T = D \underline{\varepsilon}$.

Betrakta nu en rektangulär skiva i plan spänning i (x, y) -planet. Skivan har höjd $\times$ bredd $2H \times H$ och belastas med en fördelad last med konstant intensitet q (kraft/längd) längs vänstra kanten – se figur.

- Problemet är symmetriskt med avseende på linjen $y = 0$ så vi nöjer oss med att studera den del av området för vilken $y \geq 0$. Teckna samtliga randvillkor och utveckla randintegralen (högerledet i den svaga formen) så långt som möjligt. (2p)
- FE-formulera problemet med testfunktioner (viktsfunktioner) enligt Galerkin och visa hur B^e -matrisen ser ut för ett element med 4 basfunktioner. (2p)
- FE-formuleringen leder till ett ekvationssystem $Ka = f$ där K är en symmetrisk och positivt definit matris, f en bekant lastvektor och a en vektor med de sökta nodvariablerna. Visa att lösningen $a = K^{-1}f$ minimerar den kvadratiske funktionen



$$\Pi(x) = \frac{1}{2} x^T K x - x^T f$$

dvs visa att $\Pi(a) \leq \Pi(x)$, med likhet endast om $x = a$ (2p)

- Ge två exempel på modelleringsfel som kan uppkomma i det skissade problemet. (1p)

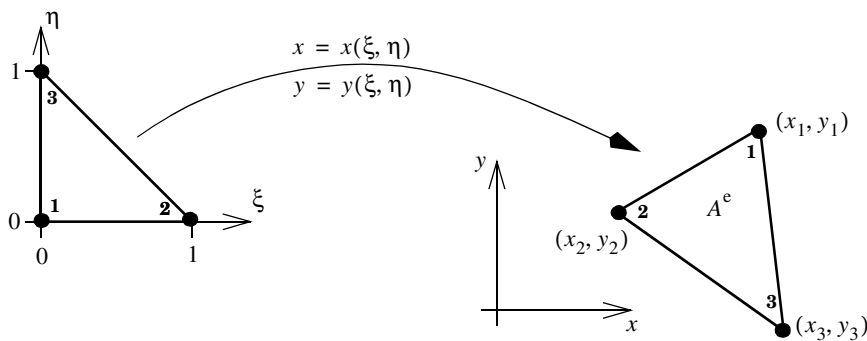
3

Figuren nedan visar en isoparametrisk avbildning av ett lineärt triangel-element, från ett lokalt koordinatsystem (ξ, η) till $(x, y) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$. I det lokala koordinatsystemet ges basfunktionerna av

$$N_1^e = 1 - \xi - \eta \quad N_2^e = \xi \quad N_3^e = \eta$$

a: Visa hur derivatorna $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$ och $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$ ($i = 1, 2, 3$) kan beräknas. Beräkna också dessa derivator för någon av basfunktionerna ($i = 1, 2$ eller 3); svaret ska ges i termer av hörn-koordinaterna (x_i, y_i) . (3p)

b: Beräkna elementarean $A^e = \int_{A^e} dA$ uttryckt i koordinaterna (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$. (1p)



Lösning 1a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v(x)$ och integrera över intervallet

$$-\int_0^L v \frac{d}{dx} \left[EA \frac{du}{dx} \right] dx = \int_0^L v \rho g A dx$$

Efter partialintegration av vänsterledet fås

$$-\left[v EA \frac{du}{dx} \right]_0^L + \int_0^L \frac{dv}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = \int_0^L v \rho g A dx$$

Randtermen utvecklas nu enligt

$$\left[v EA \frac{du}{dx} \right]_0^L = v(L) \left(EA \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} - v(0) \left(EA \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} = v(L) \left(EA \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} - kv(0)u(0)$$

Eftersom derivatan $\frac{du}{dx}$ är obekant vid $x = L$ begränsar vi valet av testfunktion till sådana att

$v(L) = 0$ för att bli av med den obekanta randtermen. Vidare måste ingående funktioner vara kvadratisk integrerbara och ha kvadratisk integrerbar första derivata. Om vi definierar funktionsrummet

$$V = \left\{ v: v(L) = 0, \int_0^L v^2 dx < \infty, \int_0^L \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx < \infty \right\}$$

kan variationsproblemet skrivas: Bestäm $u \in V$ så att $\int_0^L \frac{dv}{dx} EA \frac{du}{dx} dx + kv(0)u(0) = \int_0^L v \rho g A dx \quad \forall v \in V$

Lösning 1b: Låt $N = [N_1(x) \dots N_n(x)]$ vara en radvektor med valda basfunktioner och

$a = [a_1 \dots a_n]^T$ vara en kolumnvektor med (obekanta) nodvariabler. Approximera den obekanta

funktionen genom $u \approx u_h = Na$. Vi har då $\frac{du}{dx} \approx \frac{du_h}{dx} = \frac{dN}{dx} a = Ba$, där alltså $B = \frac{dN}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \dots & \frac{dN_n}{dx} \end{bmatrix}$

innehåller förstaderivatorna av basfunktionerna. Sätt in approximationen i variationsproblemet och välj sedan testfunktionen enligt Galerkins metod, d.v.s välj basfunktionerna i tur och ordning; om ekvationerna samlas radvis i ett ekvationssystem fås

$$\int_0^L \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} \\ \dots \\ \frac{dN_n}{dx} \end{bmatrix} EAB dx a + k \begin{bmatrix} N_1(0) \\ \dots \\ N_n(0) \end{bmatrix} N(0)a = \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 \\ \dots \\ N_n \end{bmatrix} \rho g A dx$$

eller $Ka = f$ med $K = \int_0^L B^T EAB dx + kN^T(0)N(0)$ och $f = \int_0^L N^T \rho g A dx$

Elementstyvhetmatrisen och elementlastvektorn fås genom att integrera över elementet

$$K^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} B^{eT} EAB^e dx \quad f^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N^{eT} \rho g A dx$$

där $N^e = [N_1^e \ N_2^e]$ är basfunktionerna på elementet och $B^e = \frac{dN^e}{dx} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix}$. Integralerna av basfunktionerna beräknas enklast som arean mellan x -axeln och respektive funktionsgraf:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1^e dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_2^e dx = \frac{1 \cdot h}{2}. \text{ Insättning ger}$$

$$K^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} B^{eT} EAB^e dx = \frac{EA}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

samt

$$f^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N^{eT} \rho g A dx = \frac{\rho g A h}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösning 1c: Numrera noder och element med stigande x -koordinat; med två lika långa element, $h = \frac{L}{2} = 1$, konstant last $\rho g A$ och konstant axialstyvhets EA , har vi två lika elementstyvhetsmatriser och elementlastvektorer enligt ovan. Vi får styvhetsmatrisen genom att summera de expanderade elementstyvhetsmatriserna och bidraget från randtermen

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 + \frac{kh}{EA} & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

och lastvektorn genom summation av expanderade elementlastvektorer

$$\mathbf{f} = \frac{\rho g A h}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho g A h}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \rho g A h \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Randvillkoren kräver att $a_3 = 0$ så vi får ekvationssystemet

$$\frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 + \frac{kh}{EA} & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \rho g A h \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Vi ser att sista kolumnen i styvhetsmatrisen 'försvinner' (multipliceras med noll); vidare kan vi inte använda sista ekvationen eftersom de har fått genom att använda $v = N_3$ — detta val av testfunktion inte är giltigt eftersom N_3 har noll-skiljt funktionsvärde vid $x = L$. Kvar är då

$$\frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 + \frac{kh}{EA} & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \rho g A h \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

med lösningen

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{\rho g h^2}{E \left(1 + \frac{2kh}{EA} \right)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 + \frac{kh}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\rho g h^2}{E \left(1 + \frac{2kh}{EA} \right)} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 + \frac{kh}{EA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösning 1d: Vi söker $\|e\|_a = \sqrt{a(e, e)}$. Energin i felet är lika med felet i energi:

$a(e, e) = a(u, u) - a(u_h, u_h)$. Här är $a(u, u) = \|u\|_a^2 = \frac{5}{3}$ givet; vi söker $a(u_h, u_h)$.

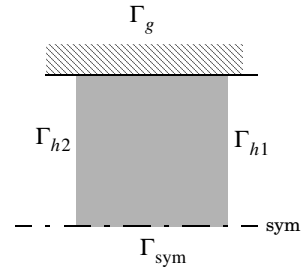
$$a(u_h, u_h) = \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Då fås } \|e\|_a = \sqrt{a(e, e)} = \sqrt{a(u, u) - a(u_h, u_h)} = \sqrt{\frac{5}{3} - \frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Lösning 1e: I frånvaro av singulariteter i den exakta lösningen är felet i FE-approximationen Ch^{p+1} om basfunktionerna är kompletta polynom av grad p . Energinormen är ett mått på första-

derivatans storlek så vi har att $\|e\|_a = Ch^p$ och alltså $\log\|e\|_a = \log C + p \log h$. Här är $p = 1$ konvergensgrafens lutning i log-log-diagrammet. Den översta kurvan visar alltså konvergens för h -metod och lineära element.

Lösning 2a: Vid den fasta inspänningen är alla förskjutningar förhindrade, dvs $u_x = u_y = 0$. På den fria obelastade högra randen är normal- och tangentialspänningen noll; med tractionvektorns komponenter definierade enligt tes har vi här alltså $t_x = t_y = 0$. På den belastade vänstra randen Γ_{h2} gäller att $t_x = q/t$ samt $t_y = 0$. På symmetriranden har vi ingen förskjutning vinkelrätt randen, $u_y = 0$, och jämvikt i x -led kräver att $t_x = 0$. Vi sammanställer:



$$\begin{cases} u_x = u_y = 0 & \text{på } \Gamma_g \\ t_x = t_y = 0 & \text{på } \Gamma_{h1} \\ t_x = \frac{q}{t}, t_y = 0 & \text{på } \Gamma_{h2} \\ t_x = 0, u_y = 0 & \text{på } \Gamma_{\text{sym}} \end{cases}$$

Vi utvecklar nu randintegralen och för till att börja med in naturliga randvillkor:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v}^T \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Gamma_g} \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_{h1}} \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_{h2}} \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q/t \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{sym}}} \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t_y \end{bmatrix} d\Gamma$$

På Γ_g är t_x och t_y obekanta (stödreaktioner) så vi begränsar oss till testfunktioner sådana att $v_x = v_y = 0$ på denna del av randen; analogt är tractionvektorns y -komponent obekant på symmetriranden så vi inför också villkoret $v_y = 0$ på Γ_{sym} . Variationsproblemet kan då skrivas: hitta $\mathbf{u}$ så att

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\tilde{\nabla} \mathbf{v})^T \mathbf{D} \tilde{\nabla} \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma_{h2}} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} q/t \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma \\ \mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{på } \Gamma_g \\ u_y = v_y = 0 & \text{på } \Gamma_{\text{sym}} \end{cases}$$

Lösning 2b: Approximera $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \approx \mathbf{u}_h = \begin{bmatrix} u_{xh} \\ u_{yh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n N_i a_{xi} \\ \sum_{i=1}^n N_i a_{yi} \end{bmatrix}$, där $N_i = N_i(x, y)$ är n valda basfunktioner och de $2n$ nodvariablerna har betecknats a_{xi}/a_{yi} . Om vi definierar

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{x1} & a_{y1} & a_{x2} & a_{y2} & \dots & a_{xn} & a_{yn} \end{bmatrix}^T$$

kan vi kortare skriva $\mathbf{u}_h = \mathbf{N} \mathbf{a}$. Insättning i variationsproblemet ger då

$$\left(\int_{\Omega} (\tilde{\nabla} \mathbf{v})^T \mathbf{D} \tilde{\nabla} \mathbf{N} d\Omega \right) \mathbf{a} = \int_{\Gamma_{h2}} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} q/t \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma$$

som innehåller $2n$ obekanta nodvariabler. Testfunktionerna väljs nu enligt Galerkin som

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} N_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} N_n \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_n \end{bmatrix}$$

Varje val ger en ekvation och samlas dessa radvis fås

$$\left(\int_{\Omega} (\tilde{\nabla} \mathbf{N})^T \mathbf{D} \tilde{\nabla} \mathbf{N} d\Omega \right) \mathbf{a} = \int_{\Gamma_{h2}} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} q/t \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma$$

eller $\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}$, med $\mathbf{f} = \int_{\Gamma_{h2}} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} q/t \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma$ och $\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$, där $\mathbf{B} = \tilde{\nabla} \mathbf{N}$.

På ett element med fyra basfunktioner har vi $\mathbf{u}_h = \mathbf{N}^e \mathbf{a}^e$, där $\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & \dots & N_4^e & 0 \\ 0 & N_1^e & \dots & 0 & N_4^e \end{bmatrix}$ är de noll-skilda

basfunktionerna på elementet och $\mathbf{a}^e$ en kolumnvektor med motsvarande nodvariabler. Vi har då

$$\mathbf{B}^e = \tilde{\nabla} \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & \dots & N_4^e & 0 \\ 0 & N_1^e & \dots & 0 & N_4^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_4^e}{\partial y} & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Lösning 2c: Låt $\mathbf{x}$ vara en godtycklig vektor och $\mathbf{a}$ vara lösningen till $\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}$ — $\mathbf{a}$ är entydig eftersom $\mathbf{K}$ är positivt definit. Bilda $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$; vi har då

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{x}) &= \Pi(\mathbf{a} + \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{v})^T \mathbf{K}(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - (\mathbf{a} + \mathbf{v})^T \mathbf{f} = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} + \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v}) - \mathbf{v}^T \mathbf{f} - \mathbf{a}^T \mathbf{f} \end{aligned}$$

Men $\mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{v} = (\mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{v})^T = (\mathbf{K} \mathbf{v})^T \mathbf{a} = \mathbf{v}^T \mathbf{K}^T \mathbf{a} = \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{a}$ eftersom $\mathbf{K}$ är symmetrisk. Vi får då

$$\Pi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{f} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{v}^T \mathbf{f} = \Pi(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} + \mathbf{v}^T (\mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{f})$$

Men $\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{v}^T (\mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{f}) = 0$ och $\mathbf{K}$ är positivt definit så $\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} > 0$ för $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, dvs då $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, så det följer att $\Pi(\mathbf{x}) > \Pi(\mathbf{a})$ för $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$

Lösning 2d: Modelleringsfel är saker som gör att den matematiska modellen bara är en approximation av det verkliga (fysiska) problemet och vi kan här tänka oss en mängd olika sådana, och nöjer oss med några exempel: skivans infästningar är inte helt stela utan har en viss flexibilitet;

egentyngden är inte medtagen i den matematiska modellen; belastningens intensitet q är inte exakt konstant; problemet kan innehålla små osymmetrier; etc.

Lösning 3a: Isoparametriska element innebär att basfunktionerna $N_i^e(\xi, \eta)$ används som form-

funktioner — avbildningen görs då som $x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 x_i N_i^e$ $y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 y_i N_i^e$, där (x_i, y_i) är

koordinaten för nod i . Eftersom basfunktionerna är polynom, beräknar vi enkelt derivatorna

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} = x_2 - x_1, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} = x_3 - x_1 \quad \text{och motsvarande för derivatorna av } y, \text{ dvs vi}$$

$$\text{får } \frac{\partial y}{\partial \xi} = y_2 - y_1 \quad \text{och} \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = y_3 - y_1$$

Basfunktionernas derivator med avseende på x och y fås med kedjeregeln:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\text{där alltså } \mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \text{ Med}$$

$$\mathbf{J}^{-T} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} \begin{bmatrix} (y_3 - y_1) & -(y_2 - y_1) \\ -(x_3 - x_1) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix}$$

$$\text{fås då de sökta derivatorna som } \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{För t.ex } i = 2 \text{ fås}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_2^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$$

Lösning 3b: Gör en variabelsubstitution och integrera i det lokala koordinatsystemet; eftersom

$\det \mathbf{J} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$ är konstant för 3-nodselementet och elementarean är $\frac{1}{2}$ i

$$\text{det lokala systemet fås trivialt } A^e = \int_{A^e} dA = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \det \mathbf{J} d\eta d\xi = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}{2}$$