

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

27 AUGUSTI 2014

Lösningar

Tid och plats:	14 ⁰⁰ – 18 ⁰⁰ i M-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal ca. kl 15.00 samt 16.30.
Lösningar:	Anslås på kurshemsidan samt på institutionen (3 vån. i M-huset) senast 28/8.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 3/9 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 10/9 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	Torsdag 4/9 12–13 samt måndag 8/9 12–13 i institutionens lokaler.

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta, kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid poängsättningen.
- **Förklara/definiera införda beteckningar.**
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex. förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

1

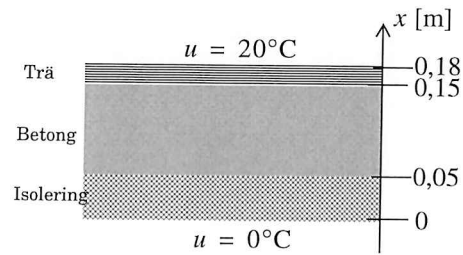
Betrakta värmeledning (1D) genom ett golv som är uppbyggt enligt figuren. Temperaturfördelningen $u(x)$ ges av lösningen till randvärdesproblemet

$$-\frac{d}{dx}\left[k\frac{du}{dx}\right] = 0 \quad 0 < x < 0,18 \text{ m}$$

$$u(0) = 0^\circ\text{C} \quad u(0,18 \text{ m}) = 20^\circ\text{C}$$

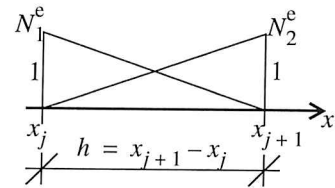
där

$$k = \begin{cases} 0,04 \text{ W/m}^\circ\text{C} & 0 < x < 0,05 \text{ m} \\ 1,7 \text{ W/m}^\circ\text{C} & 0,05 \text{ m} < x < 0,15 \text{ m} \\ 0,14 \text{ W/m}^\circ\text{C} & 0,15 \text{ m} < x < 0,18 \text{ m} \end{cases}$$



är värmekonduktiviteten och $q = -k\frac{du}{dx}$ är värmeflödet (värmeenergi per tids- och areaenhet).

- a: Variationsformulera problemet. (2p)
- b: FE-formulera problemet med testfunktioner enligt Galerkins metod och härled elementstyvhetmatrisen för ett lineärt element med längden h (2p)
- c: Beräkna temperaturen i de två gränsskikten ($x = 0,05 \text{ m}$ respektive $x = 0,15 \text{ m}$) genom att lösa problemet med 3 lineära element. (3p)
- d: Hur stor värme-effekt försvinner per kvadratmeter golvyta? (2p)



Lösning 1a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v = v(x)$ och integrera över

området (intervallet): $-\int_0^{0,18\text{m}} v \frac{d}{dx}\left[k\frac{du}{dx}\right] dx = 0$. Efter partialintegration fås

$$\int_0^{0,18\text{m}} k \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx = \left[k v \frac{du}{dx} \right]_0^{0,18\text{m}}. \text{ Eftersom } \frac{du}{dx} \text{ är obekant vid } x = 0 \text{ och vid } x = 0,18 \text{ m begränsar vi}$$

valet av testfunktioner till de som uppfyller $v(0) = v(0,18 \text{ m}) = 0$. Variationsproblemet blir då att hitta u så att

$$\int_0^{0,18\text{m}} k \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx = 0 \quad v(0) = v(0,18 \text{ m}) = 0 \quad u(0) = 0^\circ\text{C} \quad u(0,18 \text{ m}) = 20^\circ\text{C}$$

Lösning 1b: Approximera den obekanta funktionen med en lineärkombination av basfunktioner:

$u \approx u_h = Na$; här är $N = [N_1(x) \dots N_n(x)]$ en vektor med basfunktionerna och $a = [a_1 \dots a_n]$ är

obekanta nodvariabler. Testfunktionerna väljs enligt Galerkins metod: $v = N_1, \dots, N_n$. Insättning

$$\text{ger } \int_0^{0,18\text{m}} k \left(\frac{dN}{dx} \right)^T \frac{dN}{dx} dx a = \mathbf{0} \text{ med villkoren } N(0)a = 0^\circ\text{C} \text{ och } N(0,18\text{ m})a = 20^\circ\text{C}$$

Ett element på intervallet (x_j, x_{j+1}) ger bidraget $\int_{x_j}^{x_{j+1}} k \left(\frac{dN^e}{dx} \right)^T \frac{dN^e}{dx} dx$ till styvhetsmatrisen; här inne-

håller radvektorn N^e de två basfunktionerna på elementet. Vi har trivialt $\frac{dN^e}{dx} = \begin{bmatrix} -1/h & 1/h \end{bmatrix}$, så

$$\mathbf{K}^e = \int_{x_j}^{x_{j+1}} k \begin{bmatrix} -1/h \\ 1/h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/h & 1/h \end{bmatrix} dx = k(x_{j+1} - x_j) \begin{bmatrix} 1/h^2 & -1/h^2 \\ -1/h^2 & 1/h^2 \end{bmatrix} = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (om } k \text{ är konstant över elementet).}$$

Lösning 1c: Använd ett element för varje material. Om element och nodvariabler numreras nedi-

från och upp, får vi bidragen $\mathbf{K}^{e1} = 0,8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{K}^{e2} = 17 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{K}^{e3} = \frac{14}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$

till vänsterledet i FE-formuleringen. De fyra ekvationerna blir då

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -0,8 & 0 & 0 \\ -0,8 & 17,8 & -17 & 0 \\ 0 & -17 & 21,6667 & -4,6667 \\ 0 & 0 & -4,6667 & 4,6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Randvillkoren ger att $a_1 = 0$ och $a_4 = 20$, så vi får

$$\begin{bmatrix} -0,8 & 0 \\ 17,8 & -17 \\ -17 & 21,6667 \\ 0 & -4,6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 93,333 \\ -93,333 \end{bmatrix}$$

Första och sista ekvationen har fått genom att välja testfunktionerna $v = N_1$ respektive $v = N_4$,

men eftersom dessa val inte uppfyller villkoren $v(0) = v(0,18\text{m}) = 0$ är dessa ekvationer ogilltiga;

vi får då kvar $\begin{bmatrix} 17,8 & -17 \\ -17 & 21,6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 93,333 \end{bmatrix}$, som har lösningen $\begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,4 \\ 17,2 \end{bmatrix}^\circ\text{C}$

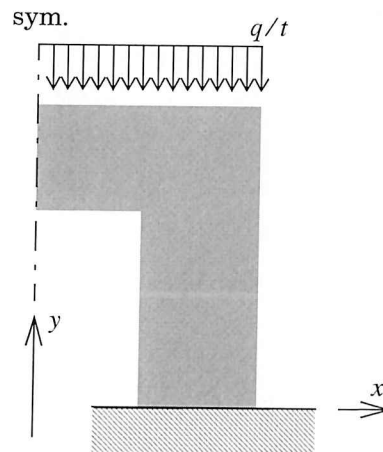
Lösning 1d: Vid stationära förhållanden blir värmeflödet $q = -k \frac{du_h}{dx}$ lika i alla element. Vi räknar

här ut q i det översta elementet: $q = -k \frac{du_h}{dx} = -0,14 \frac{20 - 17,2}{0,18 - 0,15} \approx -13,1 \text{ W/m}^2$ (minustecknet anger att flödet går i negativ x -led). Förlusten är ca 13W per kvadratmeter golvyta.

2

Figuren illustrerar ett elasticitetsproblem som är symmetriskt med avseende på y -axeln. Strukturen är belastad med en utbredd last q/t (kraft/yta), där t är områdets tjocklek i z -led; t är konstant och det råder plant spänningstillstånd. Den svaga formen (variationsproblemet) av elasticitetsproblemet kan skrivas

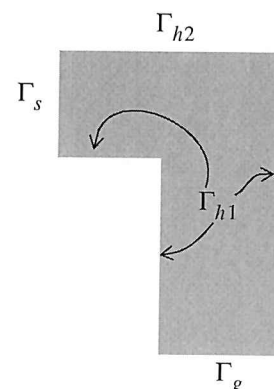
$$\int_{\Omega} (\tilde{\nabla} v)^T D(\tilde{\nabla} u) d\Omega = \oint_{\Gamma} v^T \begin{bmatrix} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \end{bmatrix} d\Gamma \quad \tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$



där D är Hooke-matrisen, $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{xy} \end{bmatrix}^T$ är spänningarna, $n = \begin{bmatrix} n_x & n_y \end{bmatrix}^T$ är en utåtriktad enhetsnormal till området Ω , v innehåller testfunktionerna (viktsfunktioner) och $u = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}^T$ är den obekanta förskjutningsvektorn; Γ betecknar randen till Ω .

- Teckna de randvillkor som gäller för det visade problemet och utveckla randintegralen i variationsproblemet. (2p)
- FE-formulera problemet med testfunktioner enligt Galerkins metod. Det ska framgå hur den obekanta förskjutningsvektorn u approximeras samt hur man får tillräckligt många ekvationer för att bestämma samtliga obekanta nodvariabler. Visa också hur B^e -matrisen ser ut för ett element med n noder. (3p)
- Antag att vi ska använda isoparametriska bi-lineära element för att diskretisera problemet. Visa hur de derivator som behövs för att etablera B^e -matrisen beräknas. Du behöver inte ge explicita uttryck för bas- och formfunktioner, men definiera alla beteckningar du inför. (2p)
- I vilket eller vilka områden (markera i figur) ska man förvänta sig att de till storleken minsta elementen uppkommer, om problemet löses med en adaptiv h -metod? Motivera ditt svar. (2p)
- Givet att styvhetsmatrisen K är positivt definit och symmetrisk, visa att FE-approximationen minimerar den potentiella energin $\Pi(x) = \frac{1}{2} x^T K x - x^T f$, dvs att $\Pi(a) < \Pi(x) \quad \forall x \neq a$ (2p)

Lösning 2a: Med beteckningar enligt figuren så är alla förskjutningar förhindrade på Γ_g , på symmetriranden Γ_s måste horisontalförskjutningen och tangentialspänningen vara noll, på Γ_{h1} är normal- och tangentialspänningarna noll, och på Γ_{h2} är tangentialspänningen noll medan normalspänningen är $-q/t$. Låt $t_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y$ och $t_y = \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y$; vi kan då skriva



$$\begin{cases} u_x = u_y = 0 & \text{på } \Gamma_g \\ u_x = 0, t_y = 0 & \text{på } \Gamma_s \\ t_x = t_y = 0 & \text{på } \Gamma_{h1} \\ t_x = 0, t_y = -q/t & \text{på } \Gamma_{h2} \end{cases}$$

Insättning i randintegralen ger

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \end{bmatrix} d\Gamma = \int_{\Gamma_g} (v_x t_x + v_y t_y) d\Gamma + \int_{\Gamma_s} (v_x t_x + v_y \cdot 0) d\Gamma + \int_{\Gamma_{h1}} (v_x \cdot 0 + v_y \cdot 0) d\Gamma + \int_{\Gamma_{h2}} (v_x \cdot 0 + v_y \cdot \frac{-q}{t}) d\Gamma$$

Eftersom t_x är obekant på Γ_g och Γ_s måste testfunktionen v_x väljas så att $v_x = 0$ på dessa båda delränder; vidare är t_y obekant på Γ_g så v_y måste väljas så att $v_y = 0$ på denna delrand. Vi får då kvar

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \end{bmatrix} d\Gamma = \int_{\Gamma_{h2}} \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -q/t \end{bmatrix} d\Gamma$$

Lösning 2b: Approximera $u_x \approx u_{xh} = a_{x1}N_1 + a_{x2}N_2 + \dots + a_{xm}N_m$ och

$u_y \approx u_{yh} = a_{y1}N_1 + a_{y2}N_2 + \dots + a_{ym}N_m$. Om vi samlar de $2m$ nodvariablerna i en vektor $\mathbf{a}$ och basfunktionerna i en matris N enligt

$$\mathbf{a} = [a_{x1} \ a_{y1} \ a_{x2} \ a_{y2} \ \dots \ a_{xm} \ a_{ym}]^T \quad N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_m & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_m \end{bmatrix}$$

kan vi skriva $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \begin{bmatrix} u_{xh} \\ u_{yh} \end{bmatrix} = N\mathbf{a}$. Approximationen sätts in i variationsproblemet, varefter vi

väljer $\mathbf{v} = [v_x \ v_y]^T$ på $2m$ olika sätt, för att få lika många ekvationer som obekanta nodvariabler.

Med Galerkins metod görs valen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} N_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} N_m \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_m \end{bmatrix}$. Insättning ger nu

$$\int_{\Omega} (\tilde{\nabla} N)^T \mathbf{D} (\tilde{\nabla} N) d\Omega = \int_{\Gamma_{h2}} N^T \begin{bmatrix} 0 \\ -q/t \end{bmatrix} d\Gamma$$

För ett element med n noder, samlar vi de $2n$ nodvariablerna i en vektor

$$\mathbf{a}^e = [a_{x1}^e \ a_{y1}^e \ \dots \ a_{xm}^e \ a_{ym}^e]^T \text{ och motsvarande basfunktioner i en matris } N^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & \dots & N_m^e & 0 \\ 0 & N_1^e & \dots & 0 & N_m^e \end{bmatrix},$$

så att approximationen på elementet kan skrivas $\mathbf{u}_h = N^e \mathbf{a}^e$. Vi har då att

$$\tilde{\nabla} \mathbf{u}_h = \tilde{\nabla} (N^e \mathbf{a}^e) = \mathbf{B}^e \mathbf{a}^e, \text{ där alltså}$$

$$B^e = \tilde{V} N^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_m^e}{\partial y} & \frac{\partial N_n^e}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Lösning 2c: Elementen definieras i ett lokalt koordinatsystem (ξ, η) så att basfunktionerna $N_i^e(\xi, \eta)$ blir enkla polynom. Med isoparametrisk avbildning menas att basfunktionerna används

som formfunktioner: $x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 x_i N_i^e(\xi, \eta)$ $y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 y_i N_i^e(\xi, \eta)$, där (x_i, y_i) är koordinaten för nod i . Vi kan då beräkna derivatorna $\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta}$ och motsvarande för

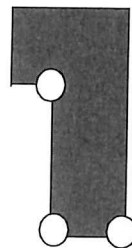
derivatorna av $y(\xi, \eta)$.

Basfunktionernas derivator med avseende på x och y (som behövs för att etablera B^e) fås sedan med kedjeregeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} \text{ där alltså } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \text{ Med } J^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix},$$

$$\det J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \text{ fås de sökta derivatorna som } \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Lösning 2d: Man förväntar sig flest element i områden där första derivator av lösningen ändras snabbt, dvs där andra derivator är stora. I ett elasticitetsproblem inträffar detta t.ex. där man har spänningskoncentrationer. Vi har tre sådana områden i exemplet: det inåtvända hörnet, samt de två övergångarna mellan fast inspänning och fri kant.



Lösning 2e: Låt x vara en godtycklig vektor och a vara lösningen till $Ka = f$ — a är entydig eftersom K är positivt definit. Bilda $v = x - a$; vi har då

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \Pi(a + v) = \frac{1}{2}(a + v)^T K(a + v) - (a + v)^T f = \\ &= \frac{1}{2}(a^T K a + v^T K a + a^T K v + v^T K v) - v^T f - a^T f \end{aligned}$$

Men $a^T K v = (a^T K v)^T = (K v)^T a = v^T K^T a = v^T K a$ eftersom K är symmetrisk. Vi får då

$$\Pi(x) = \frac{1}{2}a^T Ka - a^T f + \frac{1}{2}v^T Kv + v^T Ka - v^T f = \Pi(a) + \frac{1}{2}v^T Kv + v^T (Ka - f)$$

Men $Ka = f \Rightarrow v^T (Ka - f) = 0$ och K är positivt definit så $v^T Kv > 0$ för $v \neq 0$, dvs då $x \neq a$, så det följer att $\Pi(x) > \Pi(a)$ för $x \neq a$

Institutionen för tillämpad mekanik, Chalmers

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

25 APRIL 2014

Tid och plats:	8 ³⁰ – 12 ³⁰ i M-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal ca. 9 ³⁰ samt 11 ¹⁵ .
Lösningar:	Anslås på anslagstavlan, avdelningen för dynamik, 28/4.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 12/5 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 15/5 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	tisdag 13/5 12 ³⁰ –13 ³⁰ samt torsdag 15/5 12 ⁰⁰ –13 ⁰⁰ , Institutionen för tillämpad mekanik, plan 3 i Nya M-huset.

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid bedömningen av en lösning.
- **Förklara/definiera införda beteckningar.**
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex. förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

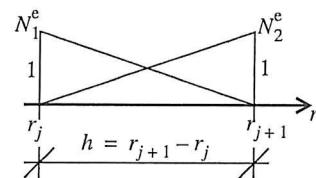
1

Betrakta stationär värmeledning genom en sfärisk vägg. Om väggens inner- och ytterradie är r_i respektive r_o , och temperaturen är u_i på insidan och u_o på utsidan, så ges temperaturen $u(r)$ som lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\frac{d}{dr}\left[kr^2\frac{du}{dr}\right] = 0 & r_i < r < r_o \\ u(r_i) = u_i \\ u(r_o) = u_o \end{cases}$$

där k är värmeledningskoefficienten (termisk konduktivitet).

- a: Variationsformulera problemet. **Ledning:** du behöver **inte** integrera över väggens volym, utan det är tillräckligt med integration i radiell led. (2p)
- b: FE-formulera problemet med testfunktioner enligt Galerkins metod och härled elementstyvhetsmatrisen för ett element med två lineära basfunktioner. (3p)



- c: Betrakta en sfär med $r_i = 1,5$ m och $r_o = 1,9$ m. Använd två lineära element för att approximera temperaturen mitt i väggen, om $u_i = 0^\circ\text{C}$ och $u_o = -20^\circ\text{C}$. (3p)

Lösning 1a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v = v(r)$ och integrera över

intervallet: $\int_{r_i}^{r_o} v \frac{d}{dr} \left[kr^2 \frac{du}{dr} \right] dr = 0$. Partiell integration ger $\int_{r_i}^{r_o} kr^2 \frac{dv}{dr} \frac{du}{dr} dr = \left[kr^2 v \frac{du}{dr} \right]_{r_i}^{r_o}$. Eftersom $\frac{du}{dr}$ är

obekant vid $r = r_i$ och vid $r = r_o$, måste vi här begränsa våra val av testfunktion så att

$v(r_i) = v(r_o) = 0$. Variationsproblemet blir då: Bestäm u så att

$$\int_{r_i}^{r_o} kr^2 \frac{dv}{dr} \frac{du}{dr} dr = 0 \quad u(r_i) = u_i, u(r_o) = u_o \quad v(r_i) = v(r_o) = 0$$

Lösning 1b: Approximera u med en lineärkombination av basfunktioner $N_i(r)$: $u \approx u_h = Na$, med basfunktionerna $N = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n]$ och nodvariablerna $a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T$. Approximation sätts in i variationsproblemet och testfunktionerna väljs enligt Galerkin, dvs $v = N_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; vi får då

$$\int_{r_i}^{r_o} kr^2 \frac{dN_i}{dr} \frac{du_h}{dr} dr = 0, i = 1, 2, \dots, n \text{ — eller på matrisform: } \int_{r_i}^{r_o} kr^2 \left(\frac{dN}{dr} \right)^T \frac{dN}{dr} da = 0.$$

För ett element med två lineära basfunktioner $N^e = [N_1^e \ N_2^e]$ på intervallet $r_j \leq r \leq r_{j+1}$ har vi

$$\frac{dN^e}{dr} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ där } h = r_{j+1} - r_j \text{ är elementets längd. Detta ger att } \left(\frac{dN^e}{dr} \right)^T \frac{dN^e}{dr} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ är kon-}$$

stant. Vi får då:

$$K^e = \int_{r_j}^{r_{j+1}} k r^2 \left(\frac{dN^e}{dr} \right)^T \frac{dN^e}{dr} dr = \frac{k}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_{r_j}^{r_{j+1}} r^2 dr = \frac{k}{3h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [r^3]_{r_j}^{r_{j+1}} = \frac{k(r_{j+1}^3 - r_j^3)}{3h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning 1c: Med två lika långa element har vi nodkoordinaterna $r_1 = r_i = 1,5 \text{ m}$,

$r_2 = \frac{r_i + r_o}{2} = 1,7 \text{ m}$ och $r_3 = r_o = 1,9 \text{ m}$; båda elementen har längden $h = 0,2 \text{ m}$. Elementstyvhetsma-

triserna blir $K_1^e = \frac{k(r_2^3 - r_1^3)}{3h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ respektive $K_2^e = \frac{k(r_3^3 - r_2^3)}{3h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Assemblering ger då

$$\frac{k(r_2^3 - r_1^3)}{3h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \frac{k(r_3^3 - r_2^3)}{3h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{k}{3h^2} \begin{bmatrix} (r_2^3 - r_1^3) & -(r_2^3 - r_1^3) & 0 \\ -(r_2^3 - r_1^3) & (r_3^3 - r_1^3) & -(r_3^3 - r_2^3) \\ 0 & -(r_3^3 - r_2^3) & (r_3^3 - r_2^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = K a$$

Ekvationssystemet blir då

$$\frac{k}{3h^2} \begin{bmatrix} (r_2^3 - r_1^3) & -(r_2^3 - r_1^3) & 0 \\ -(r_2^3 - r_1^3) & (r_3^3 - r_1^3) & -(r_3^3 - r_2^3) \\ 0 & -(r_3^3 - r_2^3) & (r_3^3 - r_2^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

där f_1 och f_3 beror av den okända randtermen (se lösning 1a); eftersom N_1 och N_3 inte uppfyller kraven på testfunktionerna ($v(r_i) = v(r_o) = 0$) måste vi stryka första och tredje ekvationen. Vidare ger randvillkoren att $a_1 = 0^\circ\text{C}$ och $a_3 = -20^\circ\text{C}$, så vi får

$$\frac{k}{3h^2} \begin{bmatrix} -(r_2^3 - r_1^3) & (r_3^3 - r_1^3) & -(r_3^3 - r_2^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^\circ\text{C} \\ a_2 \\ -20^\circ\text{C} \end{bmatrix} = 0$$

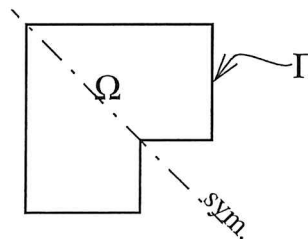
ur vilket $a_2 = \frac{-(r_3^3 - r_2^3) \cdot 20^\circ\text{C}}{(r_3^3 - r_1^3)} \approx -11,2^\circ\text{C}$

Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla\phi) = f & \text{i } \Omega \\ \phi = 0 & \text{på } \Gamma \end{cases}$$

där f är en given konstant, $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^T$ är gradientoperatoren,

$\phi = \phi(x, y)$ den sökta funktionen och Ω ett symmetriskt L -format område med randen Γ .



a: Genom att utnyttja symmetrin i problemet, så räcker det med att räkna på halva området när man t.ex vill approximera lösningen med finit-elementmetod. Ange hur problemet måste formuleras för att utnyttja symmetrin. (1p)

b: Använd Green–Gauss sats, dvs $\int_{\Omega} \psi \operatorname{div}(q) d\Omega = \oint_{\Gamma} \psi q^T n d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla\psi)^T q d\Omega$ (där ψ är en skalär funktion, q en vektorvärd funktion och n en utåtriktad normal till Ω), för att variationsformulera problemet. Det ska klart framgå vilka krav som ställs på inblandade funktioner och hur randvillkoren påverkar formuleringen. (2p)

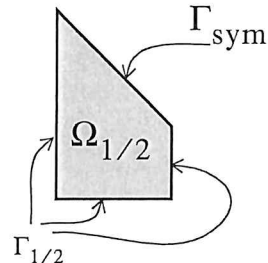
c: Finit-elementformulera problemet och visa hur B^e -matrisen ser ut för ett element med 3 basfunktioner N_i^e , $i = 1, 2, 3$. (2p)

d: Ange elementlastvektorn för ett element med 3 lineära basfunktioner och elementarea A^e (2p)

Lösning 2a: Med beteckningar enligt figuren har vi

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla\phi) = f & \text{i } \Omega_{1/2} \\ \phi = 0 & \text{på } \Gamma_{1/2} \\ (\nabla\phi)^T n = 0 & \text{på } \Gamma_{\text{sym}} \end{cases}$$

dvs problemet definieras på halva området och på symmetrilinjen gäller att normalderivatan av lösningen måste vara noll.



Lösning 2b: Multiplicera båda sidor av differentialekvationen med en testfunktion v och integrera över området: $-\int_{\Omega_{1/2}} v \operatorname{div}(\nabla\phi) d\Omega = \int_{\Omega_{1/2}} v f d\Omega$. Använd Green–Gauss sats på vänsterledet (sätt $\psi = v$ och $q = \nabla\phi$) och flytta randintegralen till högerledet; då fås:

$$\int_{\Omega_{1/2}} (\nabla v)^T (\nabla\phi) d\Omega = \int_{\Omega_{1/2}} v f d\Omega + \int_{\Gamma_{1/2}} v (\nabla\phi)^T n d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{sym}}} v (\nabla\phi)^T n d\Gamma$$

Den sista randintegralen försvinner pga (det naturliga) randvillkoret på Γ_{sym} ; för att bli av även med den andra randintegralen (där $\nabla\phi$ är obekant) ställer vi kravet att $v = 0$ på $\Gamma_{1/2}$ — även ϕ måste uppfylla detta (väsentligt randvillkor). Vidare måste alla inblandade funktioner vara kvadratisk integrerbara, samt ha kvadratisk integrerbara 1:a derivator. Definiera

$$V = \left\{ v: \quad v = 0 \text{ på } \Gamma_{1/2}, \int_{\Omega_{1/2}} v^2 d\Omega < \infty, \int_{\Omega_{1/2}} (\nabla v)^2 d\Omega < \infty \right\}$$

Variationsformuleringen blir då: Bestäm $\phi \in V$ så att

$$\int_{\Omega_{1/2}} (\nabla v)^T (\nabla \phi) d\Omega = \int_{\Omega_{1/2}} v f d\Omega \quad \forall v \in V$$

Lösning 2c: Approximera lösningen som en lineärkombination av basfunktioner:

$$\phi \approx \phi_h = \sum_i N_i a_i = N a; \quad N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots \end{bmatrix}; \quad a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \end{bmatrix}^T$$

Låt $V_h = \left\{ v: v = \sum_i N_i v_i \right\}$, dvs rummet av alla funktioner som kan skrivas som en lineärkombination av basfunktionerna. Vidare bestämmer vi nodvariablerna a_i så att variationsproblemet är uppfyllt i V_h — Galerkins metod (alt. formulering: basfunktionerna används som testfunktioner); varje val av testfunktion ger en ekvation, så vi får lika många ekvationer som obekanta. FE-formuleringen blir alltså: Bestäm $\phi_h \in V_h$ så att

$$\int_{\Omega_{1/2}} (\nabla v)^T (\nabla \phi_h) d\Omega = \int_{\Omega_{1/2}} v f d\Omega \quad \forall v \in V_h$$

Detta ger $\left(\int_{\Omega_{1/2}} (\nabla N)^T (\nabla N) d\Omega \right) a = \int_{\Omega_{1/2}} N^T f d\Omega$, där $\nabla N = B$. På ett element med 3 basfunktioner har vi

FE-approximationen $\phi_h = N^e a^e = \begin{bmatrix} N_1^e & N_2^e & N_3^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^e & a_2^e & a_3^e \end{bmatrix}^T$, så B -matrisen på elementet blir

$$B^e = \nabla N^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Lösning 2d: Elementlastvektorn ges av integranden i FE-formuleringens högerled, integrerad över elementet. Med f konstant fås $f^e = f \int_{A^e} \begin{bmatrix} N_1^e & N_2^e & N_3^e \end{bmatrix}^T d\Omega$. Integralen av en basfunktion kan beräknas som volymen mellan (x, y) -planet och funktionens graf, dvs volymen av en tetraedar med basytan A^e och höjden 1. Vi fås alltså

$$f^e = \frac{f A^e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3

Med lämplig definition av skalärprodukt $(*, *)$ och inre produkt $a(*, *)$ kan variationsproblemet i föregående uppgift skrivas

$$\text{Hitta } \phi \in V \text{ så att } a(\phi, v) = (v, f) \quad \forall v \in V$$

och FE-formuleringen med testfunktioner enligt Galerkin blir

$$\text{Hitta } \phi_h \in V_h \text{ så att } a(\phi_h, v) = (v, f) \quad \forall v \in V_h$$

där V är rummet av funktioner som uppfyller de krav problemet ställer (uppgift 2b) och FE-rummet antas vara ett underrum: $V_h \subset V$. Här är den inre produkten och skalärprodukten båda symmetriska och lineära i båda argumenten, så man visar enkelt att diskretiseringsfelet $e = \phi - \phi_h$ är a -ortogonalt mot FE-rummet: $a(e, v) = 0 \quad \forall v \in V_h$.

a: Visa att energin i felet är lika med felet i energi: $a(e, e) = a(\phi, \phi) - a(\phi_h, \phi_h)$ (1p)

b: Visa att lösningen till variationsproblemet minimerar den kvadratiske funktionalen

$$\Pi(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (v, f)$$

d v s visa att $\Pi(\phi) \leq \Pi(v) \quad \forall v \in V$, med likhet endast för $v = \phi$. (2p)

c: Av $V_h \subset V$ och minimeringsegenskapen hos ϕ följer att $\Pi(\phi_h) \geq \Pi(\phi)$ (med likhet endast om

$\phi_h = \phi$), d v s $\frac{1}{2}a^T K a - a^T f \geq \Pi(\phi)$, där K är styvhetsmatrisen, f är lastvektorn och a är nodvariablerna. Visa att detta kan tolkas som att FE-approximationen är 'för styv'. (2p)

Lösning 3a: Utnyttja att $a(., .)$ är symmetrisk och lineär i båda argumenten:

$$\begin{aligned} a(e, e) &= a(\phi - \phi_h, \phi - \phi_h) = a(\phi, \phi - \phi_h) - a(\phi_h, \phi - \phi_h) = \\ &= a(\phi, \phi) - a(\phi, \phi_h) - a(\phi_h, \phi) + a(\phi_h, \phi_h) = a(\phi, \phi) + a(\phi_h, \phi_h) - 2a(\phi, \phi_h) = \\ \{\text{använd att } \phi &= \phi_h + e \text{ i sista termen}\} = a(\phi, \phi) + a(\phi_h, \phi_h) - 2a(\phi_h + e, \phi_h) = \\ &= a(\phi, \phi) + a(\phi_h, \phi_h) - 2a(\phi_h, \phi_h) - 2a(e, \phi_h) = \\ \{\phi_h &\in V_h \text{ så sista termen är 0 enligt Galerkinortogonalitet}\} = \\ &= a(\phi, \phi) - a(\phi_h, \phi_h) \end{aligned}$$

Lösning 3b: Låt $v \in V$ vara godtycklig och definiera funktionen $u = v - \phi$, där ϕ är lösningen till variationsproblemet. Vi har då

$$\begin{aligned} \Pi(v) &= \Pi(\phi + u) = \frac{1}{2}a(\phi + u, \phi + u) - (\phi + u, f) = \{\text{utnyttja linearitet}\} = \\ &= \frac{1}{2}(a(\phi, \phi) + a(\phi, u) + a(u, \phi) + a(u, u)) - (\phi, f) - (u, f) = \{a(., .) \text{ är symmetrisk}\} = \\ &= \frac{1}{2}a(\phi, \phi) - (\phi, f) + \frac{1}{2}a(u, u) + a(\phi, u) - (u, f) = \{(a(\phi, u) = (u, f)) \text{ ty } \phi \text{ löser variationsproblemet}\} = \\ &= \Pi(\phi) + \frac{1}{2}a(u, u) \geq \Pi(\phi) \end{aligned}$$

där den sista olikheten följer av att $a(u, u) \geq 0$, med likhet endast för $u = 0$, d v s för $v = \phi$; alltså $\Pi(v) \geq \Pi(\phi)$, där ϕ är lösningen till variationsproblemet.

Lösning 3c: Vi har att $\Pi(\phi) \leq \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{f} = \{\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}\} = -\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{f}$, så för en given lastvektor $\mathbf{f}$ kan olikheten $\Pi(\phi) \leq \Pi(\phi_h)$ tolkas som att Lösningsvektorn $\mathbf{a}$ är för liten 'i genomsnitt', d v s att styvheten $\mathbf{K}$ är för stor.

Institutionen för tillämpad mekanik, Chalmers

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

18 DECEMBER 2013

Lösningar

Tid och plats:	8 ³⁰ – 12 ³⁰ i M-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal ca. 9 ³⁰ samt 11 ¹⁵ .
Lösningar:	Anslås på anslagstavlan, avdelningen för dynamik, 19/12.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 7/1 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 9/1 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	tisdag 21/1 12–14 samt torsdag 23/1 12–13, Institutionen för tillämpad mekanik, plan 3 i Nya M-huset.

Tänk på:

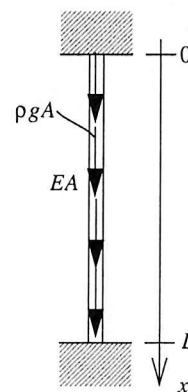
- Skriv så att den som ska rätta kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid bedömningen av en lösning.
- Förklara/definiera införda beteckningar.
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

1

En pelare med axialstyvhets EA och längden L är fast inspänd i båda ändar. Den belastas enbart med sin egentyngd $\rho g A$ (kraft/längdenhet). Den axiella förskjutningen $u(x)$ ges som lösningen till randvärdesproblemet

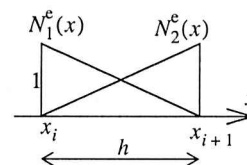
$$-\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right] = \rho g A \quad 0 < x < L$$

$$u(0) = 0, \quad u(L) = 0$$



a: Variationsformulera randvärdesproblemet och ange regularitetskraven på ingående funktioner. (1p)

b: FE-formulera problemet med testfunktioner (viktsfunktioner) enligt Galerkin. Härled elementstyvhetsmatrisen K^e och elementlastvektorn f^e för ett element med längden $h = x_{i+1} - x_i$ och två linjära basfunktioner (se figur brevid); antag att EA och $\rho g A$ är konstanta. (2p)



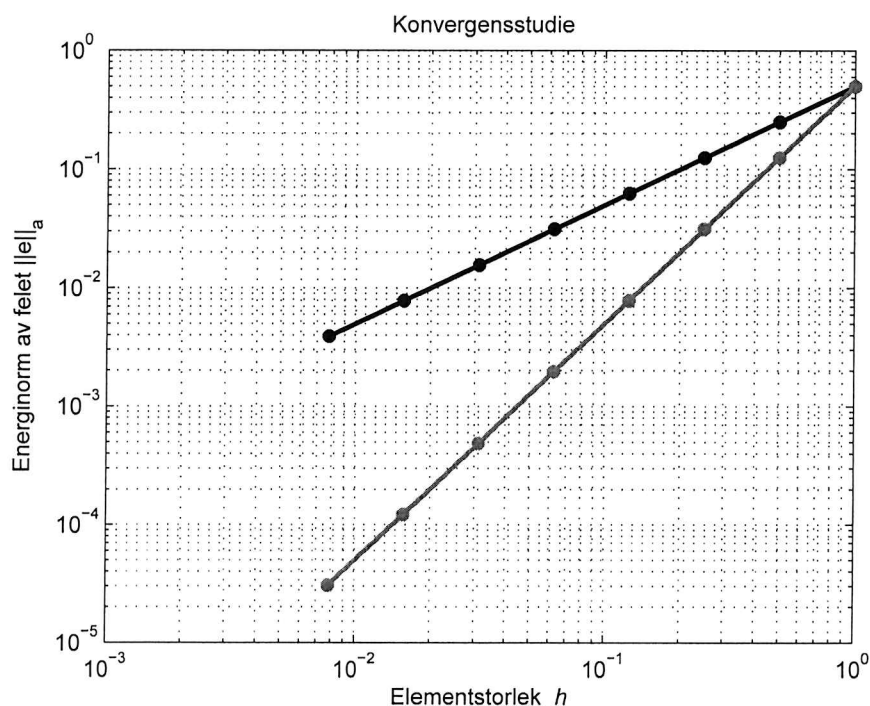
c: Sätt $EA = 1$, $\rho g A = 1$ samt $L = 3$ och lös problemet med 3 lika långa linjära element. (2p)

d: Enligt den exakta lösningen blir normalkraften överst i pelaren $N(0) = EA \frac{du}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{\rho g AL}{2} = \frac{3}{2}$.

Hur stor blir $N(0)$ enligt FE-lösningen? (1p)

e: Energinormen av den exakta lösningen är $\|u\|_a = \sqrt{a(u, u)} = 1,5 \frac{\rho g A}{\sqrt{EA}} = 1,5$. Beräkna energinormen $\|e\|_a$ av diskretiseringsfelet $e = u - u_h$, där u_h är FE-approximationen. (2p)

f: Antag att man genomför en konvergensstudie genom att successivt halvera elementlängderna, så att problemet löses med 3, 6, 12, ..., 384 element, och sedan plottar $\|e\|_a$ mot h . Vilken av de två kurvorna (figur nedan) förväntar du dig då? Svaret ska tydligt motiveras. (1p)



Lösning 1a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v(x)$ och integrera över intervallet

$$-\int_0^L v \frac{d}{dx} \left[EA \frac{du}{dx} \right] dx = \int_0^L v \rho g A dx$$

Efter partialintegration av vänsterledet fås

$$-\left[v EA \frac{du}{dx} \right]_0^L + \int_0^L \frac{dv}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = \int_0^L v \rho g A dx$$

Eftersom derivatan $\frac{du}{dx}$ är obekant vid $x = 0$ och $x = L$, begränsar vi val av testfunktion till sådana att $v(0) = v(L) = 0$ för att bli av med den obekanta randtermen. Vidare måste ingående funktioner vara kvadratiskt integrerbara och ha kvadratiskt integrerbar första derivata. Om vi definierar funktionsrummet

$$V = \left\{ v: v(0)=0, v(L)=0, \int_0^L v^2 dx < \infty, \int_0^L \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\}$$

kan variationsproblemet skrivas: Bestäm $u \in V$ så att $\int_0^L \frac{dv}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = \int_0^L v \rho g A dx \quad \forall v \in V$

Lösning 1b: Låt $N = [N_1(x) \dots N_n(x)]$ vara en radvektor med valda basfunktioner och

$a = [a_1 \dots a_n]^T$ vara en kolumnvektor med (obekanta) nodvariabler. Approximera den obekanta

funktionen genom $u \approx u_h = Na$. Vi har då $\frac{du}{dx} \approx \frac{du_h}{dx} = \frac{dN}{dx} a = Ba$, där alltså $B = \frac{dN}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \dots & \frac{dN_n}{dx} \end{bmatrix}$

innehåller förstaderivatorna av basfunktionerna. Sätt in approximationen i variationsproblemet och välj sedan testfunktionen enligt Galerkins metod, d.v.s välj basfunktionerna i tur och ordning; om ekvationerna samlas radvis i ett ekvationssystem fås

$$\int_0^L \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} \\ \dots \\ \frac{dN_n}{dx} \end{bmatrix} EA B dx a = \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 \\ \dots \\ N_n \end{bmatrix} \rho g A dx$$

eller $Ka = f$ med $K = \int_0^L B^T EAB dx$ och $f = \int_0^L N^T \rho g A dx$

Elementstyvhetsmatrisen och elementlastvektorn fås genom att integrera över elementet

$$K^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} B^e{}^T EAB^e dx \quad f^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N^e{}^T \rho g A dx$$

där $N^e = \begin{bmatrix} N_1^e & N_2^e \end{bmatrix}$ är basfunktionerna på elementet och $B^e = \frac{dN^e}{dx} = \begin{bmatrix} -1/h & 1/h \end{bmatrix}$. Integralerna av basfunktionerna beräknas enklast som arean mellan x -axeln och respektive funktionsgraf:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1^e dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_2^e dx = \frac{1 \cdot h}{2}. \text{ Insättning ger}$$

$$K^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} B^{eT} EAB^e dx = \frac{EA}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

samt

$$f^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N^{eT} \rho g A dx = \frac{\rho g A h}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösning 1c: Numrera noder och element med stigande x -koordinat; med lika långa element $h = 1$, konstant last $\rho g A$ och konstant axialstyvhets EA , har vi tre lika elementstyvhetsmatriser och elementlastvektorer enligt ovan. Vi får styvhetsmatrisen genom att summera de expanderade elementstyvhetsmatriserna

$$K_A = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} + \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} + \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

och lastvektorn genom summation av expanderade elementlastvektorer

$$f = \frac{\rho g A h}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho g A h}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho g A h}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \rho g A h \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Randvillkoren kräver att $a_1 = a_4 = 0$ så vi får ekvationssystemet

$$\frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \rho g A h \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Vi ser att första och sista kolumnen i styvhetsmatrisen 'försvinner' (multiplieras med nollor); vidare kan vi inte använda första och sista ekvationen eftersom de har fått genom att använda $v = N_1$ respektive $v = N_4$ — dessa val av testfunktion inte är giltiga eftersom de har noll-skilda funktionsvärden vid $x = 0$ respektive $x = L$. Kvar är då

$$\frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \rho g A h \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

med lösningen

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{\rho g A h^2}{3EA} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\rho g A h^2}{3EA} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösning 1d: Vi behöver derivatan av FE-approximationen på element 1:

$$\frac{dN^e}{dx} \mathbf{a}^e = \begin{bmatrix} -1/h & 1/h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{a_2 - a_1}{h} = \frac{\rho g A h}{EA}. \text{ Normalkraften enligt FE-lösningen blir då}$$

$$N(0) \approx EA \frac{dN^e}{dx} \mathbf{a}^e = \rho g A h = 1$$

Lösning 1e: Vi söker $\|e\|_a = \sqrt{a(e, e)}$. Energin i felet är lika med felet i energi:

$$a(e, e) = a(u, u) - a(u_h, u_h). \text{ Här är } a(u, u) = (1,5)^2 = 2,25 \text{ givet; vi söker } a(u_h, u_h).$$

$$a(u_h, u_h) = \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{Då fås } \|e\|_a = \sqrt{a(e, e)} = a(u, u) - a(u_h, u_h) = \sqrt{2,25 - 2} = \frac{1}{2}$$

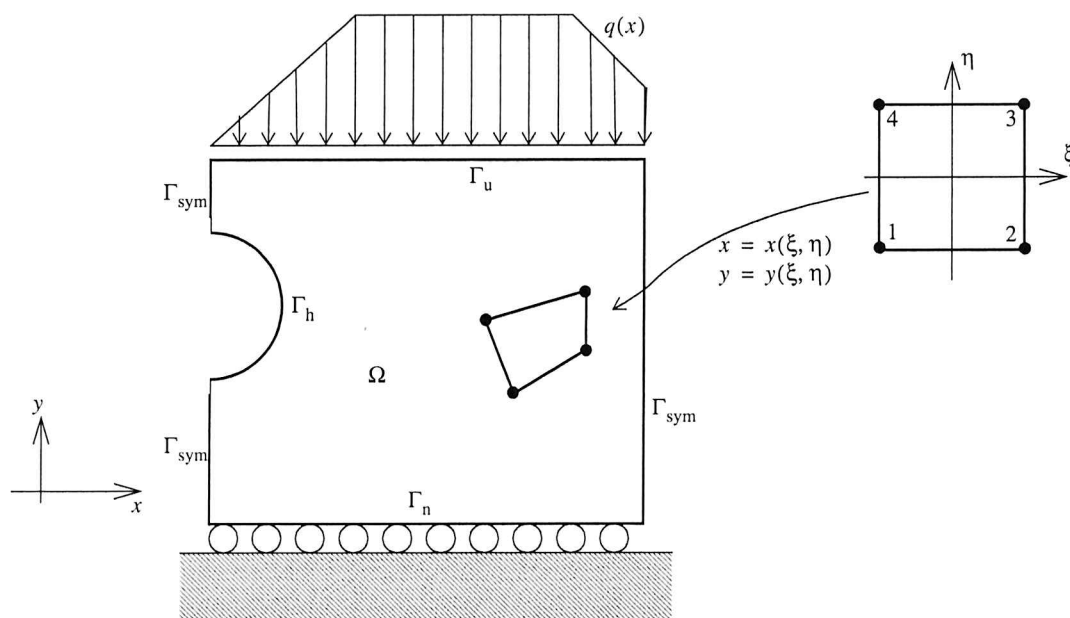
Lösning 1f: I frånvaro av singulariteter i den exakta lösningen är felet i FE-approximationen Ch^{p+1} om basfunktionerna är kompletta polynom av grad p . Energinormen är ett mått på första-derivatans storlek så vi har att $\|e\|_a = Ch^p$ och alltså $\log \|e\|_a = \log C + p \log h$. Här är $p = 1$ konvergensgrafens lutning i log-log-diagrammet. Den svarta kurvan visar alltså konvergens för h -metod och lineära element.

Den svaga formen av ett 2D elasticitetsproblem kan skrivas

$$\int_{\Omega} (\tilde{\nabla} v)^T D \tilde{\nabla} u d\Omega = \int_{\Omega} v^T b d\Omega + \oint_{\Gamma} v^T t d\Gamma$$

där randvillkorens inverkan inte tagits med. Här är $u = [u_x(x, y) \ u_y(x, y)]^T$ den obekanta förskjutningsvektorn, $b = [b_x(x, y) \ b_y(x, y)]^T$ en given volymslast (kraft/volym), $t = [t_x(x, y) \ t_y(x, y)]^T$ belastningen längs randen (kraft/yta), $v = [v_x(x, y) \ v_y(x, y)]^T$ en vektor med testfunktioner (viktsfunktioner) och D en konstitutiv matris som är symmetrisk och positivt definit. Tjockleken t i z -led av det studerade området Ω , med rand Γ , har antagits vara konstant.

- a: Betrakta området Ω i figuren nedan. Det vertikala begränsningslinjerna Γ_{sym} är symmetrilinjer, ovankanten Γ_u är belastad med en linjelast med intensitet $q(x)$ (kraft/längd), medan underkanten Γ_n är understödd i vertikalled. Ange samtliga randvillkor på samtliga delränder och utveckla randintegralen. (2p)
- b: FE-formulera problemet med testfunktioner enligt Galerkin. Visa hur B -matrisen ser ut då vi har n noder i FE-nätet. (2p)
- c: Antag att vi använder isoparametriska bilineära (4-nods) element i beräkningarna. Visa hur derivatorna av basfunktionerna ($\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$ och $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$) i B^e -matrisen beräknas då basfunktionerna är givna i (ξ, η) -systemet. Du behöver inte teckna uttrycken för basfunktionerna, men visa hur $x(\xi, \eta)$ och $y(\xi, \eta)$ konstrueras. (2p)



Lösning 2a: På symmetriränderna gäller att $u_x = 0$ och $t_y = 0$ (eller $\sigma_{xy} = 0$ eftersom $t_y = \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y$).

På Γ_u har vi $t_x = \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y = \sigma_{xy} = 0$ och $t_y = \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y = \sigma_{yy} = \frac{-q}{t}$.

Randen Γ_h är fri och obelastad: $t_x = t_y = 0$. På Γ_n gäller att $u_y = 0$ och $t_x = 0$ (alt. $\sigma_{xy} = 0$).

Betrakta nu integranden i rand integralen: $\mathbf{v}^T \mathbf{t} = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$. På Γ_{sym} är t_x obekant, så vi måste välja testfunktions vektorer sådana att $v_x = 0$ på denna rand; på Γ_n är t_y obekant, så vi väljer också $\mathbf{v}$ så att $v_y = 0$ på Γ_n . Införs randvillkoren och kraven på testfunktionerna fås alltså

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v}^T \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -q/t \end{bmatrix} d\Gamma$$

Lösning 2b: Approximera den obekanta förskjutningsvektorn genom $\mathbf{u} \approx \begin{bmatrix} u_{xh} \\ u_{yh} \end{bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{a}$ där

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix}$$

innehåller valda basfunktioner, och

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{x1} & a_{y1} & a_{x2} & a_{y2} & \dots & a_{xn} & a_{yn} \end{bmatrix}^T$$

är obekanta nodvariabler. Vi har då $\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{u} \approx \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{u}_h = \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{N}\mathbf{a} = \mathbf{B}\mathbf{a}$ där

$$\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Sätt in approximationen i den svaga formen och välj testfunktioner enligt Galerkin

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} N_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} N_n \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_n \end{bmatrix}$$

Om ekvationerna samlas radvis i ett ekvationssystem fås

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix} DB d\Omega a = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ \dots & \dots \\ N_n & 0 \\ 0 & N_n \end{bmatrix} b d\Omega + \int_{\Gamma_u} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ \dots & \dots \\ N_n & 0 \\ 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -q/t \end{bmatrix} d\Gamma$$

eller $Ka = f$ med $K = \int_{\Omega} B^T DB d\Omega$ och $f = \int_{\Omega} N^T b d\Omega + \int_{\Gamma_u} N^T \begin{bmatrix} 0 \\ -q/t \end{bmatrix} d\Gamma$

Lösning 2c: Isoparametriska element innebär att basfunktionerna $N_i^e(\xi, \eta)$ används som form-

funktioner — avbildningen görs då som $x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 x_i N_i^e$ $y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 y_i N_i^e$, där (x_i, y_i) är

koordinaten för nod i . Eftersom basfunktionerna är polynom, beräknar vi enkelt derivatorna

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \quad \text{och motsvarande för derivatorna av } y.$$

Basfunktionernas derivator med avseende på x och y (som behövs för att ställa upp B^e) fås med kedjeregeln:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix}$$

där alltså $J^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$. Med $J^{-T} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}$, $\det J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$, fås då de sökta deriva-

torna som $\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-T} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix}$

Betrakta randvärdesproblemet

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f \quad \text{i } \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{på } \Gamma$$

Här är $u = u(x, y)$ obekant, $f = f(x, y)$ en given funktion, Ω är ett område i (x, y) -planet och Γ dess rand. Låt

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla v)^T \nabla u d\Omega \quad (v, f) = \int_{\Omega} v f d\Omega$$

där v är en nästan godtycklig testfunktion (viktsfunktion) och $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^T$ är gradientoperatören.

Den inre produkten $a(*, *)$ och skalärprodukten $(*, *)$ är båda symmetriska och lineära i båda sina argument. Det gäller också att $a(v, v) \geq 0$, med $a(v, v) = 0 \Leftrightarrow v \equiv 0$. Variationsproblemet, den svaga formen av randvärdesproblemet, kan då skrivas: Bestäm $u \in V$ så att

$$a(u, v) = (v, f) \quad \forall v \in V$$

a: Definiera funktionsrummet V för detta problem (1p)

b: Visa att lösningen till variationsproblemet minimerar den kvadratiske funktionalen

$$\Pi(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (v, f), \text{ d.v.s visa att } \Pi(u) \leq \Pi(v) \quad \forall v \in V, \text{ med likhet endast om } v = u \quad (2p)$$

c: Visa att variationsproblemet har en entydig lösning (1p)

d: Betrakta en konform FE-approximation. Med konform menas att FE-rummet V_h är ett under-
rum till V : $V_h \subset V$. FE-formuleringen, med testfunktioner (viktsfunktioner) enligt Galerkin,
blir: Bestäm $u_h \in V_h$ så att $a(u_h, v) = (v, f) \quad \forall v \in V_h$.

Visa att diskretiseringsfelet $e = u - u_h$ är energiortogonalt mot V_h : $a(e, v) = 0 \quad \forall v \in V_h$ (1p)

Lösning 3a: Ingående funktioner (u och v) måste uppfylla väsentliga randvillkor, d.v.s vara noll på randen, vara kvadratiskt integrerbara samt ha kvadratiskt integrerbara första derivator.

$$V = \left\{ v: v = 0 \text{ på } \Gamma, \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty, \int_{\Omega} (\nabla v)^T \nabla v d\Omega < \infty \right\}$$

Lösning 3b: Välj godtycklig funktion $v \in V$ och bilda $w = v - u$ där u är lösningen till variationsproblemet. Vi har då

$$\begin{aligned} \pi(v) &= \pi(u + w) = \frac{1}{2}a(u + w, u + w) - (u + w, f) = \frac{1}{2}(a(u, u + w) + a(w, u + w)) - (u, f) - (w, f) \\ &= \frac{1}{2}(a(u, u) + a(u, w) + a(w, u) + a(w, w)) - (u, f) - (w, f) = \pi(u) + \frac{1}{2}a(w, w) + \frac{1}{2}(a(w, u) + a(u, w)) - (w, f) \end{aligned}$$

där vi utnyttjat att $a(*, *)$ och $(*, *)$ båda är lineära i sina argument. Vidare är den inre produkten symmetrisk, så de två sista termerna blir $a(u, w) - (w, f)$; men $a(u, w) = (w, f)$ eftersom u är en lös-

ning till variationsproblemet. Slutligen konstaterar vi att $a(w, w) \geq 0$, med likhet endast om $w = 0$ d.v.s då $v = u$. Vi har då att $\pi(v) = \pi(u) + \frac{1}{2}a(w, w) \geq 0$, med $\pi(v) = \pi(u)$ endast då $v = u$

Lösning 3c: Antag att u_1 och u_2 båda löser variationsproblemet:

$$a(u_1, v) = (v, f) \quad \forall v \in V$$

$$a(u_2, v) = (v, f) \quad \forall v \in V$$

Subtrahera de två ekvationerna från varandra

$$a(u_1, v) - a(u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V$$

där sista ledet följer från lineäritet. Välj nu $v = u_1 - u_2$: $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ — d.v.s det finns bara en lösning.

Lösning 3d: Vi har enligt variationsproblemet att $a(u, v) = (v, f) \quad \forall v \in V$ och enligt FE-problemet att $a(u_h, v) = (v, f) \quad \forall v \in V_h \subset V$. Subtraheras dess får vi $a(u, v) - a(u_h, v) = 0 \quad \forall v \in V_h$. Utnyttja lineäritet i första argumentet: $a(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in V_h$ eller $a(e, v) = 0 \quad \forall v \in V_h$