

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

28 AUGUSTI 2013

Lösningar

Tid och plats:	14 ⁰⁰ – 18 ⁰⁰ i M-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal ca. kl 15.00 samt 16.30.
Lösningar:	Anslås på kurshemsidan samt på institutionen (3 vån. i M-huset) senast 29/8.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 9/9 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 13/9 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	Tisdag 10/9 12–13 samt torsdag 12/9 12–13 i institutionens lokaler.

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta, kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid poängsättningen.
- Förklara/definiera införda beteckningar.
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

1

Formulera divergensteoremet (definiera införda beteckningar) och visa hur Green–Gauss sats, d.v.s $\int_{\Omega} \phi \operatorname{div}(\mathbf{q}) d\Omega = \oint_{\Gamma} \phi \mathbf{q}^T \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \phi)^T \mathbf{q} d\Omega$, kan härledas från detta. (2p)

Lösning 1: Låt $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \end{bmatrix}^T$ ($|\mathbf{n}| = 1$) vara en utåtriktad normalvektor till randen Γ av ett område Ω och $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_x(x, y) & q_y(x, y) \end{bmatrix}^T$ en vektorvärd. Förutsatt att funktionerna är tillräckligt reguljära, så har vi (divergens teoremet):

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q}) d\Omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{q}^T \mathbf{n} d\Gamma$$

För att från detta härleda Green–Gauss sats, konstruerar vi vektorfältet $\phi \mathbf{q}$, där $\phi = \phi(x, y)$ är tillräckligt reguljär men i övrigt godtycklig. Vi beräknar sedan divergensen av $\phi \mathbf{q}$:

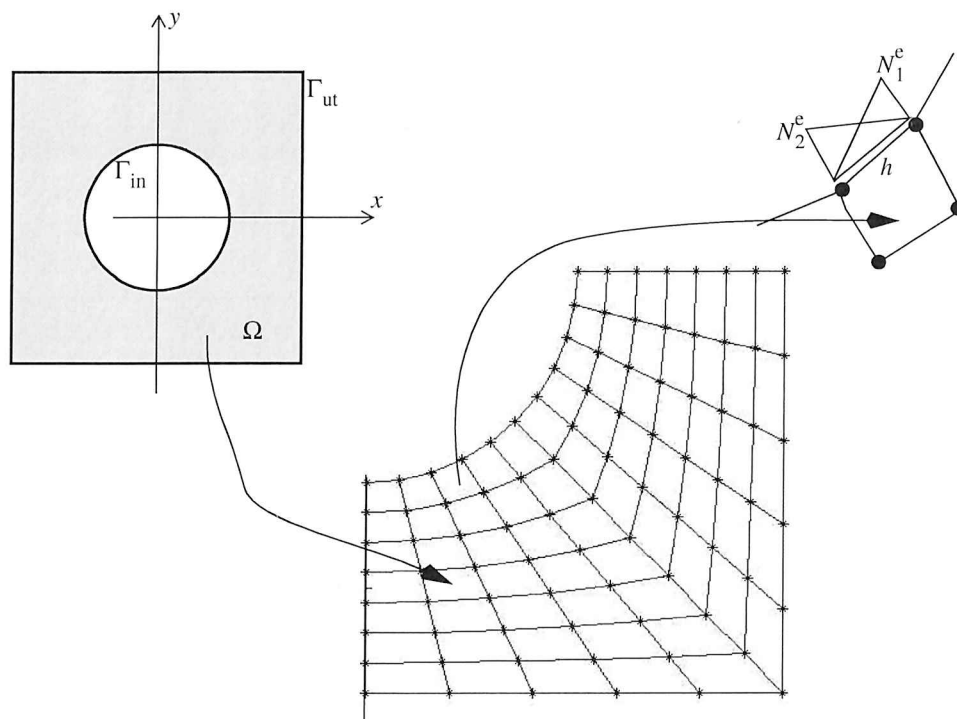
$$\operatorname{div}(\phi \mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial x} [\phi q_x] + \frac{\partial}{\partial y} [\phi q_y] = \phi \frac{\partial q_x}{\partial x} + \phi \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} q_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} q_y = \phi \operatorname{div}(\mathbf{q}) + (\nabla \phi)^T \mathbf{q}$$

Genom att sätta in $\phi \mathbf{q}$ i divergensteoremet och utnyttja likheten $\operatorname{div}(\phi \mathbf{q}) = \phi \operatorname{div}(\mathbf{q}) + (\nabla \phi)^T \mathbf{q}$, erhålls det efterfrågade resultatet.

Ett rör med kvadratisk tvärsnitt innehåller en fluid med temperaturen u_f . Om rörets yttre rand har temperaturen $u = 0$ och värmeövergången mellan rör och fluid är konvektiv med värmeövergångstalet α , så ges temperaturen i röret som lösningen $u(x, y)$ till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k \nabla u) = 0 & \text{i } \Omega \\ u = 0 & \text{på } \Gamma_{\text{ut}} \\ -(k \nabla u)^T \mathbf{n} = \alpha(u - u_f) & \text{på } \Gamma_{\text{in}} \end{cases}$$

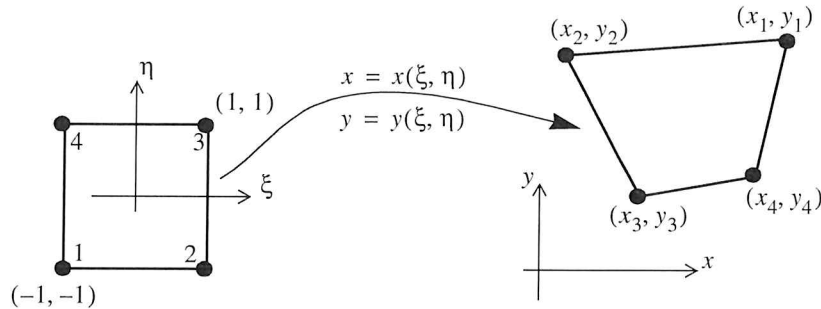
där $\mathbf{n}$ är en utåtriktad enhetsnormal till området Ω och k är rörmaterialiets värmeledningskoefficient.



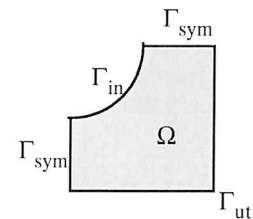
- Eftersom problemet har två symmetrilinjer, räcker det att modellera 1/4-del av området Ω . Formulera, med förklaring, randvillkoren på de två symmetriränderna. (1p)
- Variationsformulera randvärdesproblemet och ange regularitetskrav på ingående funktioner. Det ska klart framgå hur randvillkoren kommer in i variationsproblemet. (2p)
- FE-formulera problemet med testfunktioner enligt Galerkin. (2p)
- Från en elementsida på den konvektiva randen Γ_{in} fås bidrag till både styvhetsmatrisen $\mathbf{K}$ och lastvektorn $\mathbf{f}$. Visa hur dessa bidrag ser ut i fallet att man använder isoparametriska bi-lineära element, så att vi har två lineära basfunktioner på varje elementsidan med längden h . (3p)
- FE-formuleringen enligt Galerkin leder till ett ekvationssystem $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$, där styvhetsmatrisen är symmetrisk och positivt definit. Visa att lösningen $\mathbf{a}$ entydigt minimerar den kvadratiske funktionen $\Pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{f}$, dvs visa att $\Pi(\mathbf{a}) \leq \Pi(\mathbf{v})$ med likhet endast för $\mathbf{v} \equiv \mathbf{a}$. (2p)

f: Antag att vi ska använda isoparametriska bi-lineära element för att diskretisera problemet.

Visa hur de derivator som behövs för att ställa upp B^e beräknas. Du behöver inte ange explicita uttryck för bas- eller formfunktioner, men tänk på att definiera alla beteckningar du inför. (2p)



Lösning 2a: Symmetrivillkoret är att derivatan i riktning vinkelrätt mot randen är noll. Låt $\mathbf{n}$ beteckna en enhetsnormal till randen; då kan randvillkoret skrivas $(\nabla u)^T \mathbf{n} = 0$ på Γ_{sym}



Lösning 2b: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion

$v = v(x, y)$ och integrera över området: $-\int_{\Omega} v \operatorname{div}(k \nabla u) d\Omega = 0$. Vi använder

sedan Green–Gauss sats på integralen i vänsterledet: $\int_{\Omega} (\nabla v)^T k(\nabla u) d\Omega = \oint_{\Gamma} v(k \nabla u)^T \mathbf{n} d\Gamma$. Utveckla nu randintegralen

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} v(k \nabla u)^T \mathbf{n} d\Gamma &= \int_{\Gamma_{\text{ut}}} v(k \nabla u)^T \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{in}}} v(k \nabla u)^T \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{sym}}} v(k \nabla u)^T \mathbf{n} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_{\text{ut}}} v(k \nabla u)^T \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma_{\text{in}}} v \alpha (u - u_f) d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{sym}}} v \cdot 0 d\Gamma \end{aligned}$$

Vi ser att integranden är obekant på Γ_{ut} , så vi begränsar oss därför till testfunktioner sådana att $v = 0$ på denna del av randen. Insättning ger nu

$$\int_{\Omega} (\nabla v)^T k(\nabla u) d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{in}}} v \alpha u d\Gamma = \int_{\Gamma_{\text{in}}} v \alpha u_f d\Gamma$$

som alltså är giltig bara om $v = 0$ på Γ_{ut} . Vidare måste vi få med randvillkoret på Γ_{ut} samt endast betrakta funktioner som är tillräckligt reguljära så att integralerna är begränsade — ingående funktioner måste vara kvadratisk integrerbara och ha kvadratisk integrerbara första derivator. Om vi definierar funktionsrummet

$$V = \left\{ v: v = 0 \text{ på } \Gamma_{\text{ut}} \quad \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty \quad \int_{\Omega} (\nabla v)^T \nabla v d\Omega < \infty \right\}$$

kan variationsproblemet skrivas: Hitta $u \in V$ så att

$$\int_{\Omega} (\nabla v)^T k(\nabla u) d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{in}}} v \alpha u d\Gamma = \int_{\Gamma_{\text{in}}} v \alpha u_f d\Gamma \quad \forall v \in V$$

Lösning 2c: Välj n basfunktioner $N_i = N_i(x, y)$ ur V (konform metod) och låt $V_h \subset V$ vara rummet av alla funktioner som kan skrivas som en lineärkombination av basfunktionerna. Vi approxi-

merar $u \approx u_h = \sum_{i=1}^n N_i a_i$ och beräknar nodvariablerna a_i genom att lösa problemet i V_h (Galerkins metod). Alltså: hitta $u_h \in V_h$ så att

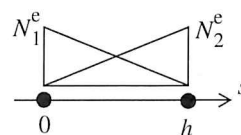
$$\int_{\Omega} (\nabla v)^T k (\nabla u_h) d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{in}}} v \alpha u_h d\Gamma = \int_{\Gamma_{\text{in}}} v \alpha u_f d\Gamma \quad \forall v \in V_h$$

eller med basfunktionerna samlade i en radvektor $N = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n]$ och de obekanta nodvariablerna i en kolumnvektor $a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T$:

$$\left(\int_{\Omega} (\nabla N)^T k (\nabla N) d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{in}}} \alpha N^T N d\Gamma \right) a = \int_{\Gamma_{\text{in}}} \alpha u_f N^T d\Gamma$$

Lösning 2d: Inför en lokal koordinat som varierar från 0 till h längs elementsidan. De två basfunktionerna kan då (på elementsidan) skrivas

$N^e = [N_1^e \ N_2^e]^T = \left[\frac{h-s}{h} \ \frac{s}{h} \right]^T$. Insättning i FE-formuleringens högerled ger nu bidraget till lastvektorn



$$f^e = \int_0^h \alpha u_f N^e d\Gamma = \frac{\alpha u_f h}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bidraget till styvhetsmatrisen fås av randintegralen i vänsterledet

$$K_c^e = \int_0^h \alpha N^{eT} N^e ds = \frac{\alpha}{h^2} \int_0^h \begin{bmatrix} (h-s)^2 & s(h-s) \\ s(h-s) & s^2 \end{bmatrix} ds = \frac{\alpha h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lösning 2e: Låt a vara lösningen till ekvationssystemet $Ka = f$ så att potentiella energin i FE-approximationen blir $\Pi(a) = \frac{1}{2} a^T Ka - a^T f$. Betrakta nu en godtycklig vektor v och låt $w = v - a$. Vi har då

$$\begin{aligned} \Pi(v) &= \Pi(w + a) = \frac{1}{2} (w + a)^T K (w + a) - (w + a)^T f = \\ &= \frac{1}{2} a^T Ka + \frac{1}{2} a^T Kw + \frac{1}{2} w^T Ka + \frac{1}{2} w^T Kw - w^T f - a^T f = \\ &= \{a^T Kw = w^T Ka \text{ ty } K \text{ är sym.}\} = \Pi(a) + \frac{1}{2} w^T Kw + w^T (Ka - f) = \\ &= \{Ka = f \text{ så } Ka - f = 0\} = \Pi(a) + \frac{1}{2} w^T Kw \end{aligned}$$

Men $\mathbf{w}^T \mathbf{K} \mathbf{w} > 0$ (för $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$), ty $\mathbf{K}$ är positivt definit; alltså gäller $\Pi(\mathbf{v}) \geq \Pi(\mathbf{a})$ med likhet endast då $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, d.v.s då $\mathbf{v} = \mathbf{a}$

Lösning 2f: Isoparametriska element innebär att basfunktionerna $N_i^e(\xi, \eta)$ används som form-

funktioner — avbildningen görs då som $x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 x_i N_i^e$ $y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 y_i N_i^e$, där (x_i, y_i) är

koordinaten för nod i . Eftersom basfunktionerna är polynom, beräknar vi enkelt derivatorna

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \quad \text{och motsvarande för derivatorna av } y.$$

Basfunktionernas derivator med avseende på x och y (som behövs för att ställa upp $\mathbf{B}^e$) fås med kedjeregeln:

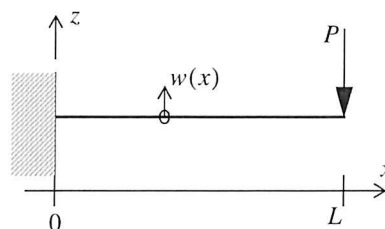
$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{där alltså } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad \text{Med } \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\det \mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \text{fås då de sökta derivatorna som} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

3

Utböjningen $w(x)$ av den i figuren visade konsolbalken ges av lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = 0 & 0 < x < L \\ w(0) = 0 & \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0 \\ \left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 & \left. \frac{d^3 w}{dx^3} \right|_{x=L} = \frac{P}{EI} \end{cases}$$



Om den svaga formen av randvärdesproblemet FE-formuleras med testfunktioner enligt Galerkin, fås ekvationssystemet $\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}$, där

$$\mathbf{K} = \int_0^L EI \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \quad \mathbf{f} = -\mathbf{N}^T(L) P$$

Här är $N = [N_1 \ N_2 \ \dots]$ en vektor med basfunktioner och $B = \frac{d^2 N}{dx^2}$.

a: Det vanligast använda balkelementet har fyra kubiska basfunktioner enligt

$$N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

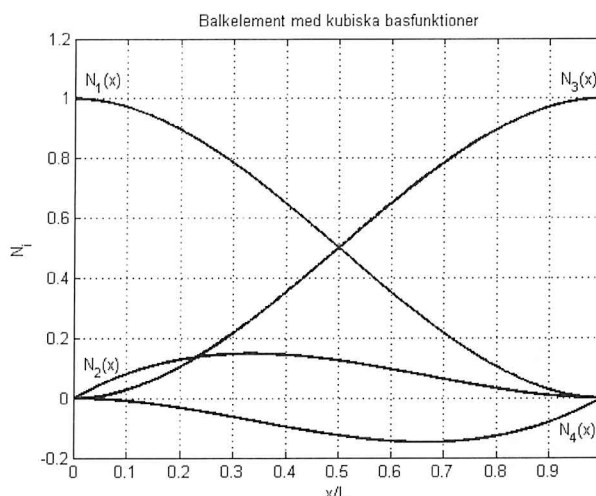
$$N_2(x) = x\left(1 - 2\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

$$N_3(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2\left(3 - 2\frac{x}{L}\right)$$

$$N_4(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)$$

(här betecknar L elementlängden).

Visa att elementet är komplett. (3p)



b: Om böjstyvheten EI är konstant, så blir elementstyvhetsmatrisen för det kubiska elementet

$$K^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Lös konsolproblemet på föregående sida med ett element. (2p)

c: Den potentiella energin i den exakta lösningen kan visas vara $\Pi(w) = -\frac{P^2 L^3}{6EI}$. Är den potentiella energin i FE-lösningen i föregående deluppgift större, mindre eller lika stor som $\Pi(w)$? Svaret ska motiveras eller styrkas genom en beräkning. (1p)

Lösning 3a: Approximationen på elementet, $w_h = \sum_{i=1}^4 a_i N_i(x)$, är komplett om vi kan välja nodvariabelvärden a_i så att (a) w_h blir konstant, (b) $\frac{dw_h}{dx}$ blir konstant och (c) $\frac{d^2 w_h}{dx^2}$ blir konstant.

(a) — Vi ser att bara N_1 och N_3 har funktionsvärden skilda från noll vid $x = 0$ respektive $x = L$. Försök därför med $a_1 = a_3 = c$, där c är en godtycklig konstant, samt $a_2 = a_4 = 0$. Man får då $w_h = c(N_1 + N_3) = c\left(1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right) = c$. Ansatsen kan alltså beskriva en godtycklig konstant förskjutning.

(b) — N_2 och N_4 har derivatan 1 vid $x = 0$ respektive $x = L$, medan derivatorna av både N_1 och N_3 är noll i dessa punkter. För att ha en konstant derivata, c , på elementet måste skillnaden i

funktionsvärderna i de bägge ändpunkterna vara cL . Försök därför med $a_1 = -a_3 = \frac{-c}{2L}$ och

$$a_2 = a_4 = c:$$

$$\begin{aligned} w_h &= \frac{-c}{2L}(N_1 - N_3) + c(N_2 + N_4) = \frac{c}{2} \left(-L + 3\frac{x^2}{L} - 2\frac{x^3}{L^2} + 3\frac{x^2}{L} - 2\frac{x^3}{L^2} + 2x - 4\frac{x^2}{L} + 2\frac{x^3}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^2} - 2\frac{x^2}{L} \right) \\ &= cx - \frac{cL}{2} \end{aligned}$$

Approximationen kan alltså beskriva en godtycklig derivata c ,

(c) — Vi har andraderivatorna

$$\frac{d^2 N_1}{dx^2} = \frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad \frac{d^2 N_2}{dx^2} = \frac{-4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad \frac{d^2 N_3}{dx^2} = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad \frac{d^2 N_4}{dx^2} = \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}$$

och ser att icke-konstanta termer förekommer parvis i omväxlande positiva och negativa tecken.

För att bli av med dessa måste vi ha $a_1 = a_3 = c$ och $a_2 = -a_4 = \frac{c}{L}$, vilket ger

$$\frac{d^2 w_h}{dx^2} = c \left(\frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) + \frac{c}{L} \left(\frac{-4}{L} + \frac{6x}{L^2} - \frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L} \right) = \frac{-2c}{L^2}$$

dvs elementet kan återge en godtycklig konstant andraderivata.

Lösning 3b: Eftersom vi bara har ett element så är styvhetsmatrisen samma som elementstyhetsmatrisen, $K = K^e$, och elementlängden är L . Randvillkoren $x = 0$ gör att vi har $a_1 = a_2 = 0$ så de två första kolumnerna i K multipliceras med nollor. Vi kan inte heller använda vare sig N_1 eller N_2 som testfunktioner eftersom de inte satisfierar de två väsentliga randvillkoren vid $x = 0$;

alltså måste vi stryka de två första ekvationerna. Kvar har vi då $\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = -P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, med

$$\text{lösningen } \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = -\frac{PL^2}{EI} \begin{bmatrix} \frac{L}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Lösning 3c: Den exakta lösningen minimerar den potentiella energin i rummet V med alla funktioner som uppfyller de väsentliga randvillkoren och som är tillräckligt reguljära (i detta fall: kvadratisk integrerbara och med kvadratisk integrerbara första- och andraderivator). FE-lösningen minimerar energin i FE-området V_h ; eftersom detta är ett underområde till V ($V_h \subset V$), så gäller allmänt att $\Pi(w) \leq \Pi(w_h)$ med likhet endast om $w_h \equiv w$. I detta fall har vi konstant böjstyvhet så den exakta lösningen satisfierar $\frac{d^4 w}{dx^4} = 0$, dvs w är ett 3e-gradspolynom och kan uttryckas i basfunktionerna. Alltså har vi att $w \in V_h$ och således $\Pi(w_h) = \Pi(w)$

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

5 APRIL 2013

Tid och plats:	14 ⁰⁰ – 18 ⁰⁰ i V-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal ca. 15 ⁰⁰ samt 16 ³⁰ .
Lösningar:	Anslås på anslagstavlan, avdelningen för dynamik, 8/4.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på tesen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 17/4 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen vecka 17 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	Torsdag 18/4 12–13 samt tisdag 23/4 12 ³⁰ –13 ³⁰ , Institutionen för tillämpad mekanik, plan 3 i Nya M-huset.

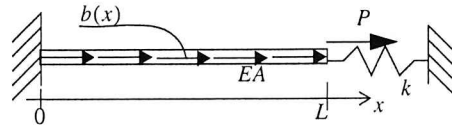
Lösningar

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta, kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid bedömningen av en lösning.
- **Förklara/definiera införda beteckningar.**
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

1

Betrakta stångproblem som illustreras i figuren. Stångens axiella förskjutning $u(x)$ ges av lösningen till randvärdesproblemet



$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right] = b(x) & 0 < x < L \\ u(0) = 0 \\ \frac{du}{dx}\bigg|_{x=L} + \frac{k}{EA}u(L) = \frac{P}{EA} \end{cases}$$

- a: Variationsformulera problemet. Det ska framgå hur randvillkoren kommer in i variationsproblemet. Ange också regularitetskrav på ingående funktioner. (2p)
- b: Finit-elementformulera problemet med testfunktioner (viktsfunktioner) enligt Galerkin. (1p)
- c: Om axialstyvheten EA är konstant fås elementstyvhetsmatrisen $K^e = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ för ett element med längden h och lineära basfunktioner. Antag att fjäderstyvheten är $k = \frac{EA}{L}$ och att $b = \frac{P}{L}$ (konstant); ställ upp ekvationssystemet $Ka = f$ för fallet att problemet löses med två lika långa sådana element. Det ska framgå hur de två randvillkoren påverkar ekvationssystemet. (3p)

Lösning 1a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v(x)$ och integrera över intervallet

$$-\int_0^L v \frac{d}{dx} \left[EA \frac{du}{dx} \right] dx = \int_0^L v b dx$$

Partialintegration av vänsterledet ger

$$\int_0^L EA \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx = \int_0^L v b dx + v(L) \left[EA \frac{du}{dx} \right]_{x=L} - v(0) \left[EA \frac{du}{dx} \right]_{x=0}$$

I den första randtermen kan vi sätta in randvillkoret vid $x = L$, men $\frac{du}{dx}$ är obekant vid $x = 0$ så vi begränsar våra val av testfunktioner till de som uppfyller $v(0) = 0$. Funktionerna måste vidare vara kvadratiskt integrerbara och ha kvadratiskt integrerbar första derivata. Om vi definierar

$$V = \left\{ v: v(0) = 0, \int_0^L \left(v^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right) dx < \infty \right\}$$

Så kan variationsproblemet skrivas: Hitta $u \in V$ så att $\int_0^L EA \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx + k v(L) u(L) = \int_0^L v b dx + P v(L) \quad \forall v \in V$.

Lösning 1b: Approximera u med en lineärkombination av basfunktioner: $u \approx u_h = \sum_i N_i(x) a_i = \mathbf{N} \mathbf{a}$,

där $\mathbf{N} = [N_1(x) \ N_2(x) \ \dots \ N_n(x)]$ är en radvektor med basfunktionerna och $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T$ innehåller nodvariablerna. Insättning i variationsproblemet ger

$$\left(\int_0^L EA \frac{dv}{dx} \frac{dN}{dx} dx + k v(L) N(L) \right) \mathbf{a} - \int_0^L v b dx - P v(L) = 0$$

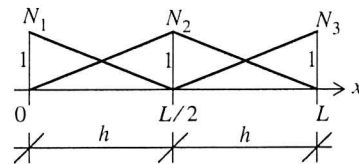
Testfunktionerna väljs nu som basfunktionerna $v = N_1, N_2, \dots, N_n$, dvs Galerkins metod, vilket ger n ekvationer som kan användas för att beräkna nodvariablerna $\mathbf{a}$; detta är ekvivalent med att sätta $v = \mathbf{c}^T \mathbf{N}^T$, där $\mathbf{c}$ är godtycklig. Insättning ger

$$\mathbf{c}^T \left\{ \left(\int_0^L EA \left(\frac{dN}{dx} \right)^T \frac{dN}{dx} dx + k \mathbf{N}^T(L) N(L) \right) \mathbf{a} - \int_0^L \mathbf{N}^T b dx - P \mathbf{N}^T(L) \right\} = 0$$

För att denna likhet ska vara uppfylld för godtyckligt vald vektor $\mathbf{c}$, så måste uttrycket innanför klammer-parentesen vara en nollvektor; med beteckningen $\mathbf{B} = \frac{dN}{dx}$ har vi alltså

$$\left(\int_0^L EA \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx + k \mathbf{N}^T(L) N(L) \right) \mathbf{a} = \int_0^L \mathbf{N}^T b dx + P \mathbf{N}^T(L)$$

Lösning 1c: Med $\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3]$, $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ och den givna elementindelningen får vi $N(L) = [0 \ 0 \ 1]$, så med $k = \frac{EA}{L}$ har vi att



$$k \mathbf{N}^T(L) N(L) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \text{ och } P \mathbf{N}^T(L) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix}$$

Vidare, med $b = \frac{P}{L}$, blir

$$\int_0^L \mathbf{N}^T b dx = \frac{P}{L} \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} dx = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h \\ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2h \\ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P}{4} \\ \frac{P}{2} \\ \frac{P}{4} \end{bmatrix}$$

där vi beräknade integralerna som arean mellan respektive basfunktions graf och x -axeln. Vi har också givet att

$$\int_0^L EAB^T B dx = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi får alltså ekvationssystemet

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{P}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

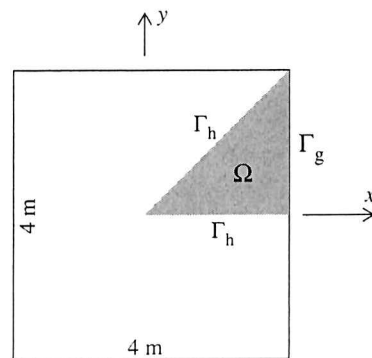
Randvillkoret $u(0) = 0$ innebär att vi måste sätta $a_1 = 0$ varvid 1a kolumnen i styvhetsmatrisen 'försvinner'; vidare kan vi inte använda 1a ekvationen, eftersom den har fått genom att välja testfunktion $v = N_1$ och $N_1(0) \neq 0$, dvs N_1 uppfyller inte randvillkoret vid $x = 0$ vilket vi kräver eftersom vi strukit motsvarande randterm (se uppgift 1a). Ekvationssystemet reduceras alltså till

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{P}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2

Betrakta ett kvadratisk membran med kantlängden 4m som i z -led belastas med en jämnt fördelad last $q = 150 \text{ N/m}^2$. Om membranet är förspänt med kraften $S = 1000 \text{ N/m}$ så ges utböjningen $w(x, y)$ i z -led av lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla w) = \frac{q}{S} & \text{i } \Omega \\ w = 0 & \text{på } \Gamma_g \\ (\nabla w)^T \mathbf{n} = 0 & \text{på } \Gamma_h \end{cases}$$



där vi utnyttjat symmetrin och formulerat problemet på 1/8-del av kvadraten; vidare är $\mathbf{n}$ en utåtriktad enhetsnormal till området Ω .

a: Använd Green–Gauss teorem, dvs $\int_{\Omega} \psi \operatorname{div}(\mathbf{q}) d\Omega = \oint_{\Gamma} \psi \mathbf{q}^T \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \psi^T \mathbf{q} d\Omega$ (där ψ är en skalär funktion, $\mathbf{q}$ en vektorvärd funktion och $\mathbf{n}$ en utåtriktad normal till Ω), för att härleda problemets svaga form (variationsformulering). Regularitetskrav på inblandade funktioner ska anges. Det ska också klart framgå hur randvillkoren beaktas i variationsproblemet. (2p)

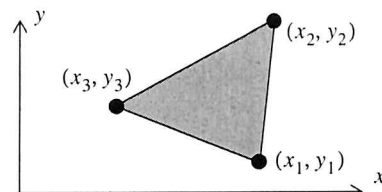
b: Finit-elementformulera problemet med test–(vikts–)funktioner enligt Galerkins metod. (1p)

c: Betrakta ett 3-nodselement för att approximera lösningen till problemet. Om nodkoordinaterna betecknas (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$, så ges basfunktionerna av

$$N_1^e(x, y) = \frac{1}{2A} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

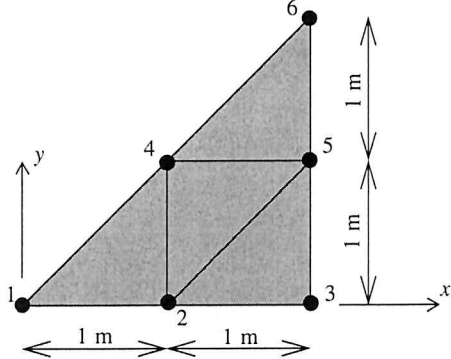
$$N_2^e(x, y) = \frac{1}{2A} [x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

$$N_3^e(x, y) = \frac{1}{2A} [x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$



där $A = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2)$ är elementets area. Visa hur uttrycken för basfunktionerna $N_i^e(x, y)$ kan tas fram med C -matrismetoden. Du behöver inte explicit invertera matrisen C . (2p)

d: Antag att området Ω delas in i fyra lika stora 3-nodstrianglar enligt figuren. Strukturstyvhetmatrisen K och strukturlastvektorn f blir då

$$K = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad f = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \oint_{(\Gamma_g + \Gamma_h)} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} \nabla w^T n d\Gamma$$


där $N_i = N_i(x, y)$ betecknar basfunktionerna. Lös FE-ekvationerna $Ka = f$ för denna elementindelning. (3p)

e: Ställ upp (beräkna) elementstyvhetsmatrisen för elementet med noderna 1, 2 och 4 (se figuren föregående deluppgift). (2p)

Lösning 2a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v = v(x, y)$ och integrera över området: $-\int_{\Omega} \text{div}(\nabla w) d\Omega = \int_{\Omega} v \frac{q}{S} d\Omega$. Tillämpa Green-Gauss sats på vänsterledet:

$$\int_{\Omega} (\nabla v)^T (\nabla w) d\Omega = \int_{\Omega} v \frac{q}{S} d\Omega + \oint_{\Gamma} v (\nabla w)^T n d\Gamma. \text{ Betrakta nu randintegralen; från randvillkoren vet vi att}$$

integranden är noll på Γ_h , men vi känner inte normalderivatan $(\nabla w)^T n$ på Γ_g . Det är alltså nödvändigt att begränsa valet av testfunktioner till sådana som uppfyller $v = 0$ på Γ_g . Vi får då

$$\oint_{\Gamma} v (\nabla w)^T n d\Gamma = \int_{\Gamma_g} v (\nabla w)^T n d\Gamma + \int_{\Gamma_h} v (\nabla w)^T n d\Gamma = \int_{\Gamma_g} 0 \cdot (\nabla w)^T n d\Gamma + \int_{\Gamma_h} v \cdot 0 d\Gamma = 0$$

För att återstående integraler ska existera, måste inblandade funktioner vara tillräckligt reguljära: $\int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty$ $\int_{\Omega} (\nabla v)^T (\nabla v) d\Omega < \infty$. Låt V beteckna rummet av funktioner som uppfyller dessa

regularitetskrav och som försvinner på Γ_g ($v = 0$ på denna del av randen); då kan variationsproblemet skrivas som

$$\text{Hitta } w \in V \text{ så att } \int_{\Omega} (\nabla v)^T (\nabla w) d\Omega = \int_{\Omega} v \frac{q}{S} d\Omega \quad \forall v \in V$$

Lösning 2b: Approximera den obekanta med en lineärkombination av valda basfunktioner

$N_i(x, y): w \approx w_h = \sum_i N_i a_i = Na$, där radvektorn $N = [N_1 \ N_2 \ \dots]$ innehåller basfunktionerna och

kolumnvektorn $a = [a_1 \ a_2 \ \dots]^T$ innehåller motsvarande nodvariabler. Sätt in approximationen i variationsproblemet och välj testfunktioner enligt Galerkin, dvs använd basfunktionerna, i tur och ordning, som testfunktioner (alternativt välj v som en godtycklig lineärkombination av bas-

funktionerna: $v = Nc$). Om vi definierar FE-rummet V_h som alla funktioner som kan skrivas som en lineärkombination av basfunktionerna, kan FE-formuleringen enligt Galerkin skrivas

$$\text{Hitta } w_h \in V_h \text{ så att } \int_{\Omega} (\nabla w)^T (\nabla w_h) d\Omega = \int_{\Omega} v \frac{q}{S} d\Omega \quad \forall v \in V_h$$

Alternativt: med $w_h = Na$ och med $v = N^T$ insatt, fås

$$\int_{\Omega} B^T B d\Omega a = \int_{\Omega} N^T \frac{q}{S} d\Omega$$

där alltså $B = \nabla N$

Lösning 2c: På ett element har vi en lineär ansatt, $w_h = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$, och vi vill uttrycka

denna som en lineärkombination av basfunktioner, d.v.s $w_h = \sum_{i=1}^3 a_i^e N_i^e$, där N_i^e antar värdet 1 i

nod i och värdet 0 i övriga noder. Vi har alltså $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = \sum_{i=1}^3 a_i^e N_i^e$. Om vi sätter in koordi-

naten (x_1, y_1) för nod 1 fås ekvationen $\alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 = a_1^e$; på samma sätt fås en ekvation för

var och en av de andra 2 nodekoordinaterna. De 3 ekvationerna kan skrivas

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \end{bmatrix}$$

eller $C\alpha = a^e$, där $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T$. Alltså fås $\alpha = C^{-1}a^e$. Vi har $w_h = [1 \ x \ y]\alpha = N^e a^e$ som då ger

$$[1 \ x \ y]C^{-1}a^e = N^e a^e. \text{ Basfunktionerna fås alltså som } N^e = [1 \ x \ y]C^{-1}$$

Lösning 2d: Det väsentliga randvillkoret, $w = 0$ på Γ_g , gör att $a_3 = a_5 = a_6 = 0$ så ekvationssystemet reduceras till

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \oint_{(\Gamma_g + \Gamma_h)} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} \nabla w^T n d\Gamma$$

(dvs kolumn 3, 5 och 6 multipliceras med noll). Betrakta nu randintegralen: längs Γ_h är

$(\nabla w)^T n = 0$ så det räcker med att integrera längs delen Γ_g ; längs denna del av randen är det bara N_3 , N_5 och N_6 som antar funktionsvärde skilda från noll. Vi har då

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \oint_{\Gamma_s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_3 \\ 0 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} \nabla w^T \mathbf{n} d\Gamma$$

Vi har alltså 6 ekvationer, men bara 3 obekanta. Dock är $(\nabla w)^T \mathbf{n}$ obekant längs Γ_g , så vi kan inte utnyttja ekvationerna 3, 5 och 6 för att beräkna nodvariablerna; stryks dessa ekvationer får vi

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

För att lösa systemet adderar vi första ekvationen till den andra: $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Multipli-

cera nu den (nya) andra ekvationen med 2 och addera till tredje: $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}$.

Sista ekvationen ger $2a_2 = \frac{11}{40}$, så $a_2 = \frac{11}{80} = 0,1375$. Den första ekvationen ger då $\frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{40} + \frac{a_2}{2}$,

varur $a_1 = \frac{3}{16} = 0,1875$, medan den andra ekvationen ger $-a_4 = \frac{4}{40} - \frac{3a_2}{2}$ vilket ger

$$a_4 = \frac{17}{160} = 0,10625$$

Lösning 2e: Med $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (1, 0)$, $(x_3, y_3) = (1, 1)$ samt $A = 1/2$, fås (se tes delupp-gift c)

$$N_1^e(x, y) = 1 - x \quad N_2^e(x, y) = x - y \quad N_3^e(x, y) = y$$

Med $N^e = [N_1^e \ N_2^e \ N_3^e]^T$ har vi då $B^e = \nabla N^e = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Elementets bidrag till vänsterledet i FE-formuleringen (se lösningsförslag till 2c) blir då

$$K^e = \int_{\Omega_e} B^{eT} B^e d\Omega = A \cdot B^{eT} B^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3

Man önskar beräkna spänningarna som uppkommer på grund av ett övertryck p i rörtvärssnitt enligt figuren. Eftersom problemet har två symmetrilinjer, nöjer man sig med att diskretisera nedre vänstra fjärdedelen av området. Elasticitetsekvationerna på svag form blir då

$$\int_A (\tilde{\nabla} v)^T D \tilde{\nabla} u dA = \int_{\Gamma_c} v^T t d\Gamma$$

med lämpliga restriktioner på de obekanta förskjutningarna $u = [u_x \ u_y]^T$

och testfunktionerna $v = [v_x \ v_y]^T$. Här

är D en symmetrisk positivt definit konstitutiv matris och traktionvektorn t på Γ_c ges

av $\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -pn_x \\ -pn_y \end{bmatrix}$, där n_x och n_y är komponenterna till en utåtriktad enhetsnormalvektor på randen.

Vidare ges differentialoperatoren av

$$\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T$$

a: Ange randvillkoren på de båda symmetrilinjerna Γ_1 och Γ_2 , samt på de yttre, fria obelastade, begränsningslinjerna Γ_3 och Γ_4 . (2p)

b: Finit-elementformulera problemet med testfunktioner enligt Galerkin och visa hur B^e ser ut för ett 3-nods triangelement. Definiera införda beteckningar. (2p)

Lösning 3a: De båda yttre begränsningslinjerna, Γ_3 och Γ_4 , är fria och obelastade så normal- och tangentialspänningarna måste vara 0 på dessa. Med beteckningarna $t_x = \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y$ och $t_y = \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y$ kan detta uttryckas som $t_x = t_y = 0$.

För en symmetrirand gäller att tangentialspänningen och förskjutningen ortogonalt mot randen är 0.

$$\text{Sammanfattningsvis: } \begin{cases} u_x = 0, t_y = 0 & \text{på } \Gamma_1 \\ t_x = 0, u_y = 0 & \text{på } \Gamma_2 \\ t_x = 0, t_y = 0 & \text{på } (\Gamma_3 \cup \Gamma_4) \end{cases}$$

Lösning 3b: Approximera de obekanta förskjutningarna, $u_x \approx u_{xh} = \sum_i a_{ix} N_i$ och $u_y \approx u_{yh} = \sum_i a_{iy} N_i$, där a_{ix} och a_{iy} är obekanta nodvariabler, medan $N_i = N_i(x, y)$ är valda basfunktioner. Om vi definierar

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad a = [a_{1x} \ a_{1y} \ \dots \ a_{nx} \ a_{ny}]^T$$

kan vi skriva $u \approx u_h = Na$. Vidare ska testfunktionerna enligt Galerkin vara en godtycklig lineärkombination av basfunktionerna (alternativt: väljs i tur och ordning som

$v = \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} N_n \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_n \end{bmatrix}$); låt $c = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{2n-1} \ c_{2n}]^T$ vara en kolumnvektor med $2n$ godtyckligt

valda koefficienter. Vi har då $v = Nc$. Insättning i den svaga formen ger nu

$$\int_A (\tilde{\nabla} N c)^T D \tilde{\nabla} (Na) dA - \int_{\Gamma_c} (Nc)^T t d\Gamma = c^T \left[\int_A (\tilde{\nabla} N)^T D \tilde{\nabla} N dA - \int_{\Gamma_c} N^T t d\Gamma \right] = 0$$

Eftersom c är en godtycklig vektor måste uttrycket inom parentes vara en nollvektor, så med

$$B = \tilde{\nabla} N \text{ fås alltså } \int_A B^T D B dA = \int_{\Gamma_c} N^T t d\Gamma \text{ eller } Ka = f.$$

Låt $N^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e \end{bmatrix}$ vara de basfunktioner som antar från noll skilda funktionsvärden på

ett element. Elementets bidrag till B -matrisen blir då

$$B^e = \tilde{\nabla} N^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \end{bmatrix}$$