

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

19 DECEMBER 2012

Lösningar

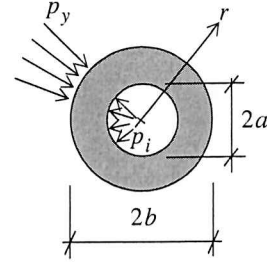
Tid och plats:	14 ⁰⁰ – 18 ⁰⁰ i V-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal ca. 15 ⁰⁰ samt 16 ³⁰ .
Lösningar:	Anslås på anslagstavlan, avdelningen för dynamik, 20/12.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 7/1 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 9/1 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	tisdag 22/1 12–14 samt torsdag 24/1 12–13, Institutionen för tillämpad mekanik, plan 3 i Nya M-huset.

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta, kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid bedömningen av en lösning.
- Förklara/definiera införda beteckningar.
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

1

Betrakta ett tjockväggt rör med radien b och hålets radie a . Om röret är belastat med ett inre tryck p_i och ett yttre tryck p_y , och om plant spänningstillstånd antas, så kan den radiella förskjutningen u beräknas genom att lösa randvärdesproblemet



$$\begin{cases} -\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}[ru]\right] = 0 \\ \sigma_r(a) = -p_i \\ \sigma_r(b) = -p_y \end{cases} \quad (1)$$

När u är känd, kan radiella och tangentiella spänningar beräknas som

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) \quad \sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right)$$

a: Låt $v = v(r)$ vara en testfunktion (viktsfunktion) och härled den svaga formen av randvärdesproblemet (variationsproblemet). Observera att integrationen bör göras över en volym:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_a^b \dots r d\theta dr dz = 2\pi L \int_a^b \dots r dr$$

där L är rörets längd och θ en vinkelkoordinat i det visade snittet. (2p)

b: Antag att problemet FE-diskretiseras med lineära element så att $u \approx u_h = N_1^e a_1^e + N_2^e a_2^e$ på ett element, samt att testfunktionerna väljs enligt Galerkin. Visa att elementstyvhetsmatrisen för ett element med nodkoordinater r_j och r_{j+1} blir

$$K^e = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \begin{bmatrix} \frac{(N_1^e)^2}{r} + 2N_1^e \frac{dN_1^e}{dr} + r \left(\frac{dN_1^e}{dr} \right)^2 & \frac{N_1^e N_2^e}{r} + N_1^e \frac{dN_2^e}{dr} + N_2^e \frac{dN_1^e}{dr} + r \frac{dN_1^e}{dr} \frac{dN_2^e}{dr} \\ \frac{N_1^e N_2^e}{r} + N_1^e \frac{dN_2^e}{dr} + N_2^e \frac{dN_1^e}{dr} + r \frac{dN_1^e}{dr} \frac{dN_2^e}{dr} & \frac{(N_2^e)^2}{r} + 2N_2^e \frac{dN_2^e}{dr} + r \left(\frac{dN_2^e}{dr} \right)^2 \end{bmatrix} dr$$

om $a < r_j < r_{j+1} < b$. (2p)

Lösning 1a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v(r)$ och integrera över voly-

men: $-\int_0^L \left(\int_a^b \int_0^{2\pi} v \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [ru] \right] r d\theta dr \right) dz = 0 \Rightarrow -2\pi L \int_a^b v \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [ru] \right] r dr = 0$. Partialintegration ger:

$$\int_a^b (vr) \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [ru] \right] dr = \left[v \frac{d}{dr} [ru] \right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rv] \frac{d}{dr} [ru] dr = 0$$

Vi måste utveckla randtermerna för att identifiera hur randvillkoren kommer in:

$$\begin{aligned} \left[v \frac{d}{dr} [ru] \right]_a^b &= \left[v \left(u + r \frac{du}{dr} \right) \right]_a^b = \left[vr \left(\frac{u}{r} + \frac{du}{dr} \right) \right]_a^b = \left[vr \left(v \frac{u}{r} + \frac{du}{dr} + (1-v) \frac{u}{r} \right) \right]_a^b \\ &= \frac{1-v^2}{E} \left[vr \frac{E}{1-v^2} \left(v \frac{u}{r} + \frac{du}{dr} + (1-v) \frac{u}{r} \right) \right]_a^b = \frac{1-v^2}{E} \left[vr \left(\sigma_r + \frac{E}{(1+v)r} u \right) \right]_a^b \\ &= \frac{1-v^2}{E} \left[bv(b) \sigma_r(b) + \frac{E}{(1+v)} u(b)v(b) - av(a) \sigma_r(a) - \frac{E}{(1+v)} u(a)v(a) \right] = \\ &= \left(\frac{1-v^2}{E} \left[av(a)p_i - bv(b)p_y + \frac{E}{(1+v)} (u(b)v(b) - u(a)v(a)) \right] \right) \end{aligned}$$

Multiplikation med $\frac{E}{1-v^2}$ ger då

$$\frac{E}{1-v^2} \int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rv] \frac{d}{dr} [ru] dr - \frac{E}{1+v} (u(b)v(b) - u(a)v(a)) = av(a)p_i - bv(b)p_y$$

Lösning 1b: Låt $N^e = \begin{bmatrix} N_1^e & N_2^e \end{bmatrix}$ och $a^e = \begin{bmatrix} a_1^e & a_2^e \end{bmatrix}^T$ vara basfunktionerna respektive nodvariablerna på ett element, så att approximationen (på elementet) kan skrivas $u_h = N^e a^e$. Vi sätter in detta i den svaga formen (variationsproblemet) och väljer testfunktionen enligt Galerkin, dvs $v = N_1^e$ och $v = N_2^e$ — man får då:

$$\frac{E}{1-v^2} \int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r(N^e)^T] \frac{d}{dr} [r(N^e a^e)] dr = \frac{E}{1-v^2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r(N^e)^T] \frac{d}{dr} [r(N^e)] dr a^e = K^e a^e$$

Vi har att $\frac{d}{dr} [r(N^e)] = N^e + r \frac{dN^e}{dr} = \begin{bmatrix} N_1^e + r \frac{dN_1^e}{dr} & N_2^e + r \frac{dN_2^e}{dr} \end{bmatrix}$ samt

$\frac{d}{dr} [r(N^e)^T] = (N^e)^T + r \frac{d(N^e)^T}{dr} = \begin{bmatrix} N_1^e + r \frac{dN_1^e}{dr} & N_2^e + r \frac{dN_2^e}{dr} \end{bmatrix}^T$. Integranden blir alltså

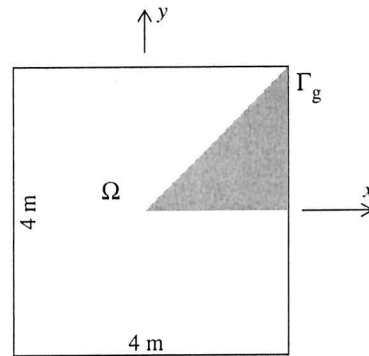
$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r(N^e)^T] \frac{d}{dr} [r(N^e)] &= \frac{1}{r} \begin{bmatrix} N_1^e + r \frac{dN_1^e}{dr} & N_2^e + r \frac{dN_2^e}{dr} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_1^e + r \frac{dN_1^e}{dr} & N_2^e + r \frac{dN_2^e}{dr} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(N_1^e)^2}{r} + 2N_1^e \frac{dN_1^e}{dr} + r \left(\frac{dN_1^e}{dr} \right)^2 & \frac{N_1^e N_2^e}{r} + N_1^e \frac{dN_2^e}{dr} + N_2^e \frac{dN_1^e}{dr} + r \frac{dN_1^e}{dr} \frac{dN_2^e}{dr} \\ \frac{N_1^e N_2^e}{r} + N_1^e \frac{dN_2^e}{dr} + N_2^e \frac{dN_1^e}{dr} + r \frac{dN_1^e}{dr} \frac{dN_2^e}{dr} & \frac{(N_2^e)^2}{r} + 2N_2^e \frac{dN_2^e}{dr} + r \left(\frac{dN_2^e}{dr} \right)^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

varur det efterfrågade resultatet följer.

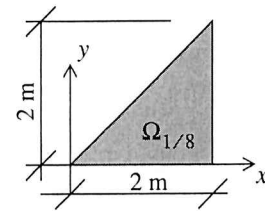
2

Betrakta ett kvadratisk membran med kantlängden 4 m som i z -led belastas med en jämnt fördelad last $q = 150 \text{ N/m}^2$. Om membranet är förspänt med kraften $S = 1000 \text{ N/m}$ så ges utböjningen i z -led av lösningen till randvärdesproblemet

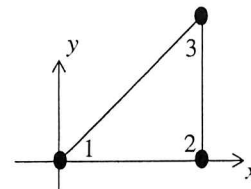
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla w) = \frac{q}{S} & \text{i } \Omega \\ w = 0 & \text{på } \Gamma_g \end{cases} \quad (2)$$



- a: Genom att utnyttja symmetrin i problemet, räcker det med att betrakta 1/8-del av området; i figuren ligger origo, $(x, y) = (0, 0)$, i membranets centrumpunkt. Formulera randvärdesproblemet så att symmetrin beaktas på detta sätt. (1p)

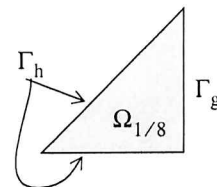


- b: Använd Green–Gauss teorem, dvs $\int_{\Omega} \psi \operatorname{div}(q) d\Omega = \oint_{\Gamma} \psi q^T n d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \psi^T q d\Omega$ (där ψ är en skalär funktion, q en vektorvärd funktion och n en utåtriktad normal till Ω), för att härleda problemets svaga form (variationsformulering). Regularitetskrav på inblandade funktioner ska anges. Det ska också klart framgå hur randvillkoren beaktas i variationsproblemet. (2p)
- c: Finit-elementformulera problemet med test-(vikts-)funktioner enligt Galerkins metod. Visa B^e -matrisens utseende för ett element med 3 basfunktioner. (2p)
- d: Antag att området diskretiseras med en enda 3-nods triangel. Med nodnumrering enligt vidstående figur blir basfunktionerna $N_1 = \frac{1}{2}(2-x)$, $N_2 = \frac{1}{2}(x-y)$, samt $N_3 = \frac{y}{2}$. Beräkna nodvariabelvärdena genom att lösa FE-ekvationerna $Ka = f$. (3p)



Lösning 2a: Normalderivatan av den obekanta funktionen ($w(x, y)$) måste vara noll på symmetriränderna. Randvärdesproblemet blir alltså

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla w) = \frac{q}{S} & \text{in } \Omega_{1/8} \\ w = 0 & \text{on } \Gamma_g \\ (\nabla w)^T n = 0 & \text{on } \Gamma_h \end{cases}$$



där n är en utåtriktad enhetsnormal till randen.

Lösning 2b: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v = v(x, y)$ och integrera över området: $-\int_{\Omega_{1/8}} v \operatorname{div}(\nabla w) d\Omega = \int_{\Omega_{1/8}} v \frac{q}{S} d\Omega$. Tillämpa Green–Gauss sats på vänsterledet:

$$\int_{\Omega_{1/8}} (\nabla v)^T (\nabla w) d\Omega = \int_{\Omega_{1/8}} v \frac{q}{S} d\Omega + \int_{\Gamma} v (\nabla w)^T n d\Gamma. \text{ Betrakta nu randintegralen; från randvillkoren vet vi att}$$

integranden är noll på Γ_h , men vi känner inte normalderivatan $(\nabla w)^T n$ på Γ_g . Det är alltså nödvändigt att begränsa valet av testfunktioner till sådana som uppfyller $v = 0$ på Γ_g . Vi får då

$$\int_{\Gamma} v (\nabla w)^T n d\Gamma = \int_{\Gamma_g} v (\nabla w)^T n d\Gamma + \int_{\Gamma_h} v (\nabla w)^T n d\Gamma = \int_{\Gamma_g} 0 \cdot (\nabla w)^T n d\Gamma + \int_{\Gamma_h} v \cdot 0 d\Gamma = 0$$

För att återstående integraler ska existera, måste inblandade funktioner vara tillräckligt regulara: $\int_{\Omega_{1/8}} v^2 d\Omega < \infty$ $\int_{\Omega_{1/8}} (\nabla v)^T (\nabla v) d\Omega < \infty$. Låt V beteckna rummet av funktioner som uppfyller dessa regularitetskrav och som försvinner på Γ_g ($v = 0$ på denna del av randen); då kan variationsproblemet skrivas som

$$\text{Hitta } w \in V \text{ så att } \int_{\Omega_{1/8}} (\nabla v)^T (\nabla w) d\Omega = \int_{\Omega_{1/8}} v \frac{q}{S} d\Omega \quad \forall v \in V$$

Lösning 2c: Approximera den obekanta med en linärkombination av valda basfunktioner

$N_i(x, y): w \approx w_h = \sum_i N_i a_i = N a$, där radvektorn $N = [N_1 \ N_2 \ \dots]$ innehåller basfunktionerna och

kolumnvektorn $a = [a_1 \ a_2 \ \dots]^T$ innehåller motsvarande nodvariabler. Sätt in approximationen i variationsproblemet och välj testfunktioner enligt Galerkin, d v s använd basfunktionerna, i tur och ordning, som testfunktioner (alternativt välj v som en godtycklig linärkombination av basfunktionerna: $v = N c$). Om vi definierar FE-rummet V_h som alla funktioner som kan skrivas som en linärkombination av basfunktionerna, kan FE-formuleringen enligt Galerkin skrivas

$$\text{Hitta } w_h \in V_h \text{ så att } \int_{\Omega_{1/8}} (\nabla v)^T (\nabla w_h) d\Omega = \int_{\Omega_{1/8}} v \frac{q}{S} d\Omega \quad \forall v \in V_h$$

Samla de basfunktioner som är noll-skiljda på ett element i en radvektor $N^e = [N_1^e \ N_2^e \ N_3^e]$ och motsvarande nodvariabler i kolumnvektorn $a^e = [a_1^e \ a_2^e \ a_3^e]^T$, så att FE-approximationen på elementet kan skrivas $w_h = N^e a^e$. På elementet har vi då $\nabla w_h = \nabla(N^e a^e) = (\nabla N^e) a^e = B^e a^e$ där alltså

$$B^e = \nabla N^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^e & N_2^e & N_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Lösning 2d: Från FE-formuleringen har vi att $\int_{\Omega_{1/8}} (\nabla v)^T (\nabla N) d\Omega a = \int_{\Omega_{1/8}} v \frac{q}{S} d\Omega$ med valet $v = N_1$;

$v = N_2$ och $v = N_3$ kan inte användas eftersom dessa två basfunktioner inte uppfyller kravet $v = 0$ på Γ_g . Vidare kräver randvillkoret på Γ_g att $a_2 = a_3 = 0$, så vi får

$$\int_{\Omega_{1/8}} (\nabla N_1)^T (\nabla N_1) d\Omega a_1 = \int_{\Omega_{1/8}} N_1 \frac{q}{S} d\Omega$$

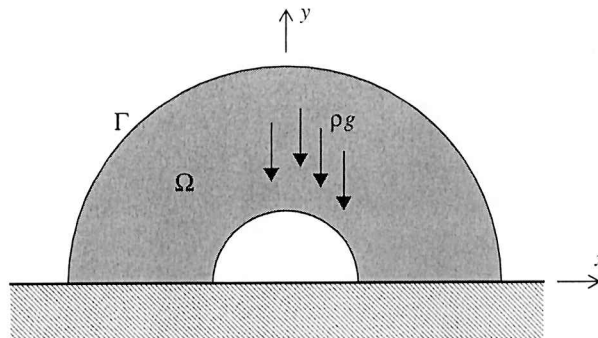
Här är $\nabla N_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$, så $\int_{\Omega_{1/8}} (\nabla N_1)^T (\nabla N_1) d\Omega = \frac{1}{4} \int_{\Omega_{1/8}} d\Omega = \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = \frac{1}{2}$, medan integralen i högerledet

blir $\int_{\Omega_{1/8}} N_1 \frac{q}{S} d\Omega = \frac{q}{S} \int_{\Omega_{1/8}} N_1 d\Omega = \frac{150}{1000} \cdot \frac{1 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2}}{3} = 0,1$. Vi får alltså $\frac{1}{2} a_1 = 0,1$ och lösningen $a = [0,2 \ 0 \ 0]^T$.

3

Betrakta bågkonstruktionen i figuren. Om den enbart belastas av sin egentyngd ρg (kraft/volym i negativ y -led) och tjockleken i z -led är konstant, så kan den svaga formen av de styrande differentialekvationerna enligt 2D-elasticitetsteori skrivas

$$\int_{\Omega} (\tilde{\nabla} v)^T D \tilde{\nabla} u d\Omega = \int_{\Omega} v^T f d\Omega + \oint_{\Gamma} v^T t d\Gamma \quad (3)$$



Här betecknar Ω och Γ området respektive randen. Vidare är $f = [0 \ -\rho g]^T$ den givna volymslasten, $v = [v_x \ v_y]^T$ är en vektor med testfunktioner, $u = [u_x \ u_y]^T$ är den obekanta förskjutningsvektorn,

$$t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \end{bmatrix}$$

är traktionvektorn och $\tilde{\nabla}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$; observera att i (3) har vi inte infört randvillkoren och att

randintegralen är längs hela områdets rand.

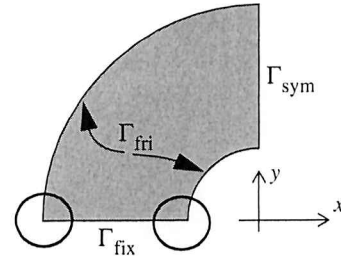
- Eftersom problemet är symmetriskt med avseende på y -axeln räcker det med att studera halva området. Ange för detta fall samtliga randvillkor och utveckla randintegralen i (3). (2p)
- FE-formulera problemet (3) — ta hänsyn till randvillkoren. Av din lösning ska det framgå hur den obekanta vektorn u approximeras. Visa också hur B^e -matrisen ser ut för ett 3-nods triangel-element. (3p)
- Antag att problemet löses med ett adaptivt FE-program. I vilka områden förväntar du dig att programmet kommer att generera de minsta elementen? Motivera svaret. (1p)
- Om vi definierar $a(v, w) = \int_{\Omega} (\tilde{\nabla} w)^T D \tilde{\nabla} v d\Omega$ och $(v, f) = \int_{\Omega} v^T f d\Omega$, samt inte utnyttjar symmetrin, så kan den abstrakta formuleringen av variationsproblemet (den svaga formen) skrivas:

$$\text{Sök } u \in [V]^2 \text{ så att } a(u, v) = (v, f) \quad \forall v \in [V]^2$$

för lämpligt val av funktionsrum V . Betrakta nu en konform FE-formulering av problemet, d.v.s ett FE-rum V_h som är ett underrum till V . Visa att diskretiseringsfelet $e = u - u_h$ är energi-ortogonalt till V_h (d.v.s bevisa Galerkinortogonalitet), samt visa att energin i felet är lika med felet i energi: $a(e, e) = a(u, u) - a(u_h, u_h)$. (2p)

Lösning 3a: Vid den fasta inspänningen är förskjutning i x - och y -led förhindrade; på de fria obelastade ränderna är normal- och tangentialspänningarna noll; på symmetriranden har vi ingen förskjutning i x -led och ingen tangentialspänning. Med t_x och t_y definierade enligt tes, har vi alltså

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ på } \Gamma_{\text{fix}} \quad t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ på } \Gamma_{\text{fri}} \quad u_x = 0, t_y = 0 \text{ på } \Gamma_{\text{sym}}$$



Randintegralen blir

$$\oint_{\Gamma} v^T t d\Gamma = \int_{\Gamma_{\text{fix}}} v^T t d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{fri}}} v^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{sym}}} v^T \begin{bmatrix} t_x \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma = \int_{\Gamma_{\text{fix}}} (v_x t_x + v_y t_y) d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{sym}}} v_x t_x d\Gamma$$

På Γ_{fix} är t_x och t_y obekanta (stödreaktioner) och på Γ_{sym} är t_x obekant; vi måste då begränsa valet av testfunktioner till sådana att $v_x = 0$ på $\Gamma_{\text{fix}} \cup \Gamma_{\text{sym}}$ och $v_y = 0$ på Γ_{fix} . Hela randintegralen blir då noll (vilket är en följd av att vi inte har någon (bekant) randlast).

Lösning 3b: Approximera förskjutningsvektorn $u \approx u_h = \begin{bmatrix} u_{xh} \\ u_{yh} \end{bmatrix} = Na$, där $a = [a_{1x} \ a_{1y} \ a_{2x} \ a_{2y} \ a_{3x} \ \dots]^T$

är nodvariabler (nodförskjutningar) och $N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix}$ är en matris med de n valda

basfunktionerna. Insättning i variationsproblemet (3) ger $\int_{\Omega} (\tilde{\nabla} v)^T D \tilde{\nabla} (Na) d\Omega = \int_{\Omega} v^T f d\Omega$ där vi utnyttjat att randintegralen försvinner om vi väljer bort basfunktioner som inte satisfierar de väsentliga randvillkoren. Med beteckningen $B = \tilde{\nabla} N$ kan vi skriva $\int_{\Omega} (\tilde{\nabla} v)^T D B d\Omega a = \int_{\Omega} v^T f d\Omega$. Vi väljer sedan

testfunktioner enligt Galerkin, dvs $v = \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} N_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} N_n \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_n \end{bmatrix}$; varje val ger en ekvation och om dessa samlas radvis fås

$$\int_{\Omega} \tilde{\nabla} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ \dots & \dots \\ 0 & N_n \end{bmatrix}^T D B d\Omega a = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ \dots & \dots \\ 0 & N_n \end{bmatrix} f d\Omega$$

eller kortare: $\int_{\Omega} B^T D B d\Omega a = \int_{\Omega} N^T f d\Omega$.

För en 3-nods triangel har vi $N^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e \end{bmatrix}$ (de basfunktioner som antar nollskilda vär-

den på elementet), så $B^e = \tilde{\nabla} N^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \end{bmatrix}$

Lösning 3c: Man förväntar sig att till storleken minsta element bildas i områden där andra-derivator av de obekanta funktionerna är stora; detta fås i områden närmast singulära punkter. I exemplet har vi två sådana områden: vid övergångarna från fast inspänning till fri rand (inringade i figuren på föregående sida).

Lösning 3d: Med givna beteckningar kan FE-problemet skrivas:

$$\text{Sök } u_h \in [V_h]^2 \text{ så att } a(u_h, v) = \int_{\Gamma} v^T t d\Gamma \quad \forall v \in [V_h]^2$$

Om detta subtraheras från variationsproblemet fås $a(u, v) - a(u_h, v) = 0$, som gäller i den del av funktionsrummen som är gemensam, dvs för testfunktioner $v \in [V_h]^2$. Eftersom $a(\cdot, \cdot)$ är linjär i sitt första argument fås $a(u - u_h, v) = a(e, v) = 0 \quad \forall v \in [V_h]^2$ vilket är Galerkinortogonalitet.

För att visa att energin i felet är lika med felet i energi utnyttjas att $a(\cdot, \cdot)$ är symmetrisk och linjär i båda argumenten:

$$\begin{aligned} a(e, e) &= a(u - u_h, u - u_h) = a(u, u - u_h) - a(u_h, u - u_h) = \\ &= a(u, u) - a(u, u_h) - a(u_h, u) + a(u_h, u_h) = a(u, u) + a(u_h, u_h) - 2a(u, u_h) = \\ &\quad \{ \text{sätt } u = u_h + e \text{ i sista termen} \} = a(u, u) + a(u_h, u_h) - 2a(u_h + e, u_h) = \\ &\quad a(u, u) + a(u_h, u_h) - 2a(u_h, u_h) - 2a(e, u_h) = \\ &\quad \{ u_h \in [V_h]^2 \text{ så sista termen är noll enligt Galerkinorthogonalitet} \} = \\ &\quad a(u, u) - a(u_h, u_h) \end{aligned}$$

alltså $a(e, e) = a(u, u) - a(u_h, u_h)$

Lösningar

Tid och plats:	14 ⁰⁰ – 18 ⁰⁰ i V-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal ca. kl 15.00 samt 16.30.
Lösningar:	Anslås på kurshemsidan samt på institutionen (3 vån. i M-huset) senast 27/8.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 3/9 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 7/9 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	Tisdag 4/9 12–13 samt torsdag 6/9 12–13 i institutionens lokaler.

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta, kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid poängsättningen.
- Förklara/definiera införda beteckningar.
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

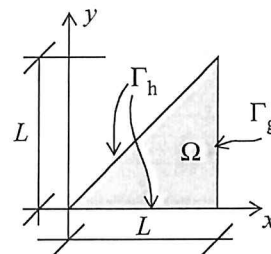
Betrakta ett kvadratisk membran med kantlängden $2L$ som i z -led belastas med en jämnt fördelad last q (konstant). Om membranet är förspänt med S (kraft/längd) så ges utböjningen i z -led av lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla w) = \frac{q}{S} & \text{i } \Omega \\ w = 0 & \text{på } \Gamma_g \\ (\nabla w)^T \mathbf{n} = 0 & \text{på } \Gamma_h \end{cases}$$

om vi utnyttjar symmetrin och bara betraktar 1/8-del av området; här är Γ_g membranets kant, medan Γ_h betecknar symmetrilinjerna.

a: Använd Green–Gauss teorem, d v s

$\int_{\Omega} \psi \operatorname{div}(\mathbf{q}) d\Omega = \oint_{\Gamma} \psi \mathbf{q}^T \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \psi)^T \mathbf{q} d\Omega$ (där ψ är en skalär funktion, $\mathbf{q}$ en vektorvärd funktion och $\mathbf{n}$ en utåtriktad enhetsnormal till Ω), för att härleda problemets variationsformuleringen. Regularitetskrav på inblandade funktioner ska anges. Det ska också klart framgå hur randvillkoren beaktas i variationsproblemet. (2p)



b: Finit–elementformulera problemet med test–(vikts–)funktioner

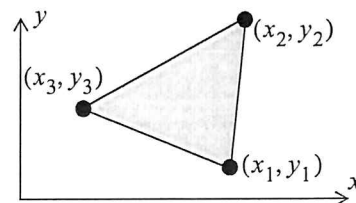
enligt Galerkins metod. Visa $\mathbf{B}^e$ – matrisens utseende för ett element med N_e basfunktioner. (2p)

c: Betrakta ett 3–nodselement för att approximera lösningen till problemet. Om nodkoordinaterna betecknas (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$, så ges basfunktionerna av

$$N_1^e(x, y) = \frac{1}{2A} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$N_2^e(x, y) = \frac{1}{2A} [x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

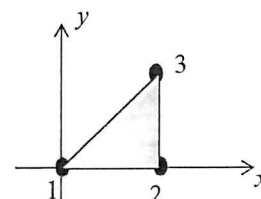
$$N_3^e(x, y) = \frac{1}{2A} [x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$



där $A = \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2)$ är elementets area. Visa hur uttrycken för basfunktionerna $N_i^e(x, y)$ kan tas fram med $\mathbf{C}$ –matrismetoden. Du behöver inte explicit invertera matrisen $\mathbf{C}$. (2p)

d: Visa att elementet är komplett. (2p)

e: Lös problemet med ett triangulärt element. (3p)



Lösning 1a: Multiplicera båda sidor av differentialekvationen med en testfunktion $v = v(x, y)$

och integrera över området: $-\int_{\Omega} \text{div}(\nabla w) d\Omega = \int_{\Omega} v \frac{q}{S} d\Omega$. Använd Green–Gauss sats på vänsterledet:

$$\int_{\Omega} (\nabla v)^T (\nabla w) d\Omega = \int_{\Omega} v \frac{q}{S} d\Omega + \oint_{\Gamma} v (\nabla w)^T \mathbf{n} d\Gamma. \text{ Betrakta nu randintegralen; villkoret på } \Gamma_h \text{ säger att}$$

integranden här är noll, men vi vet inget om värdet på $(\nabla w)^T \mathbf{n}$ på Γ_g . Eftersom det är nödvändigt att kunna beräkna randintegralen, väljer vi bara testfunktioner sådana att $v = 0$ på Γ_g . Alltså,

$$\oint_{\Gamma} v (\nabla w)^T \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_g} v (\nabla w)^T \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_h} v (\nabla w)^T \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_g} 0 \cdot (\nabla w)^T \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_h} v \cdot 0 d\Gamma = 0$$

För att integralerna ska existera, krävs att alla funktioner är tillräckligt reguljära:

$$\int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty \quad \int_{\Omega} (\nabla v)^T (\nabla v) d\Omega < \infty. \text{ Låt } V \text{ beteckna rummet av alla funktioner som uppfyller regu-}$$

laritetskravet och som uppfyller villkoret $v = 0$ på Γ_g . Variationsproblemet kan då skrivas

$$\text{Sök } w \in V \text{ så att } \int_{\Omega} (\nabla w)^T (\nabla w) d\Omega = \int_{\Omega} v \frac{q}{S} d\Omega \quad \forall v \in V$$

Lösning 1b: Approximera den obekanta funktionen med en lineärkombination av valda basfunk-

tioner $N_i(x, y)$: $w \approx w_h = \sum_i N_i a_i = \mathbf{N} \mathbf{a}$ ($\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots]$, $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots]^T$) och sätt in denna i vari-

ationsproblemet. Välj sedan testfunktioner v enligt Galerkins metod, d.v.s som basfunktionerna i tur och ordning; variationsproblemet kommer därmed att vara satisfierat för varje lineärkombination av basfunktioner. Om vi definierar FE-rummet V_h som rummet av alla funktioner som kan skrivas som en lineärkombination av basfunktionerna, så kan FE-formuleringen enligt Galerkin skrivas:

$$\text{Sök } w_h \in V_h \text{ så att } \int_{\Omega} (\nabla w_h)^T (\nabla w_h) d\Omega = \int_{\Omega} v \frac{q}{S} d\Omega \quad \forall v \in V_h$$

Om de N_e basfunktioner som är skilda från noll på ett element samlas i en radvektor

$\mathbf{N}^e = [N_1^e \ \dots \ N_{N_e}^e]$, och motsvarande nodvariabler i en kolumnvektor $\mathbf{a}^e = [a_1^e \ \dots \ a_{N_e}^e]^T$, så blir

approximationen på elementet $w_h = \mathbf{N}^e \mathbf{a}^e$. Vi har då $\nabla w_h = \nabla(\mathbf{N}^e \mathbf{a}^e) = (\nabla \mathbf{N}^e) \mathbf{a}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{a}^e$, där alltså

$$\mathbf{B}^e = \nabla \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^e & \dots & N_{N_e}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{N_e}^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{N_e}^e}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Lösning 1c: Vi har en linjär ansatts på elementet: $w_h = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$. Vi vill uttrycka denna

som en linärkombination av basfunktioner, d.v.s $w_h = \sum_{i=1}^3 a_i^e N_i^e$, där N_i^e antar värdet 1 i nod i

och värdet 0 i övriga noder. Vi har alltså $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = \sum_{i=1}^3 a_i^e N_i^e$. Om vi sätter in koordinaten

(x_1, y_1) för nod 1 fås ekvationen $\alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 = a_1^e$; på samma sätt fås en ekvation för var och

en av de andra 2 nodekoordinaterna. De 3 ekvationerna kan skrivas
$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \end{bmatrix}$$
 eller

$C\alpha = a^e$. Alltså fås $\alpha = C^{-1}a^e$. Vi har $w_h = [1 \ x \ y]\alpha = N^e a^e$ som då ger $[1 \ x \ y]C^{-1}a^e = N^e a^e$.

Basfunktionerna fås alltså som $N^e = [1 \ x \ y]C^{-1}$

Lösning 1d: Elementet är komplett om det går att välja nodvariabelvärden a_i^e så att ansattsen

$w_h = \sum_{i=1}^3 a_i^e N_i^e$ på elementet blir en konstant, samt välja värden så att gradienten ∇w_h blir kon-

stant. Det senare villkoret är trivialt uppfyllt eftersom de linjära basfunktionerna har konstanta

gradients: $\nabla N_1^e = \begin{bmatrix} (y_2 - y_3) \\ (x_3 - x_2) \end{bmatrix}$, etc. För att visa att det första villkoret är uppfyllt väljer vi nodvari-

ablerna till en och samma godtyckliga konstant c — vi har då

$$w_h = c(N_1^e + N_2^e + N_3^e) = \frac{c}{2A}(x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1) = \frac{c}{2A}2A = c$$

Lösning 1e: Från FE-formuleringen har vi att $\int_{\Omega} (\nabla v)^T (\nabla N) d\Omega a = \int_{\Omega} v \frac{q}{S} d\Omega$ med $v = N_1$; valen

$v = N_2$ och $v = N_3$ är inte giltiga eftersom N_2 och N_3 inte satisfierar villkoret på Γ_g . Det väsentliga randvillkoret kräver också att $a_2 = a_3 = 0$, så vi får bara kvar

$$\int_{\Omega} (\nabla N_1)^T (\nabla N_1) d\Omega a_1 = \int_{\Omega} N_1 \frac{q}{S} d\Omega. \text{ Trivialt finner vi att } \nabla N_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ så vi har } \frac{1}{L^2} \int_{\Omega} d\Omega a_1 = \frac{q}{S} \int_{\Omega} N_1 d\Omega.$$

Integralen i vänsterledet är storleken på området, d.v.s $\frac{L^2}{2}$, och integralen i högerledet är volymen

av en tetraeder med basytan Ω och höjden 1: $\frac{L^2}{2} \cdot \frac{1}{3}$. Alltså fås slutligen $\frac{a_1}{2} = \frac{qL^2}{6S}$

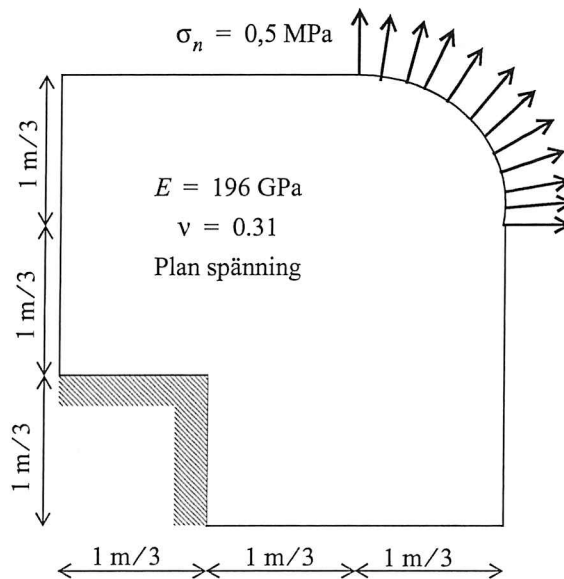
2

Figuren visar ett 2D elasticitetsproblem vars lösning man vill approximerar med en konform finit- elementmetod. Antag att man utgår från en ganska grov diskretisering med lineära 3-nods element och använder en adaptiv h -metod för att approximerar lösningen.

- Redogör för vad som menas med adaptivitet och förklara vad h -metod betyder. (2p)
- I vilket eller vilka områden förväntar du dig att ett adaptivt FE-programmet ska generera de till storleken minsta elementen? Motivera svaret. (2p)
- En konform FE-diskretisering av problemet leder till ekvationssystemet $Ka = f$, där styvhetsmatrisen K är symmetrisk och positivt definit. Visa att lösningen $a = K^{-1}f$

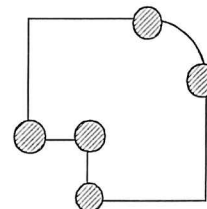
minimerar den potentiella energin $\Pi(v) = \frac{1}{2}v^T Kv - v^T f$, d v s visa att $\Pi(a) \leq \Pi(v)$, med

$\Pi(a) = \Pi(v)$ endast om $a \equiv v$. (2p)



Lösning 2a: Ett adaptivt FE-program uppskattar diskretiseringsfelets storlek. Om felet är större än någon angiven tolerans, ändrar programmet FE-diskretiseringen; med h -metod menas att fler (till storleken mindre) element används. Processen fortgår till dess att den önskade noggrannheten uppnåtts.

Lösning 2b: Med en adaptiv h -metod förväntar man sig de till storleken minsta elementen i områden där förstaderivatorna i lösningen varierar som mest (d.v.s i områden där andraderivator är stora). I ett elasticitetsproblem får man singulära punkter — där spänningarna (förstaderivator) ändras snabbt över korta sträckor — vid t.ex inåtvända hörn, och vid abrupta förändringar i randvillkor. I det givna problemet finns 5 sådana punkter, som visas i figuren här brevid.



Lösning 2c: Låt a vara lösningen till ekvationssystemet $Ka = f$ så att

potentiella energin i FE-approximationen blir $\Pi(a) = \frac{1}{2}a^T Ka - a^T f$. Betrakta nu en godtycklig vektor v och låt $w = v - a$. Vi har då

$$\begin{aligned} \Pi(v) &= \Pi(w + a) = \frac{1}{2}(w + a)^T K(w + a) - (w + a)^T f = \\ &= \frac{1}{2}a^T Ka + \frac{1}{2}a^T Kw + \frac{1}{2}w^T Ka + \frac{1}{2}w^T Kw - w^T f - a^T f = \\ &= \{a^T Kw = w^T Ka \text{ ty } K \text{ är sym.}\} = \Pi(a) + \frac{1}{2}w^T Kw + w^T (Ka - f) = \\ &= \{Ka = f \text{ så } Ka - f = 0\} = \Pi(a) + \frac{1}{2}w^T Kw \end{aligned}$$

Men $w^T Kw > 0$ (för $w \neq 0$), ty K är positivt definit; alltså gäller $\Pi(v) \geq \Pi(a)$ med likhet endast då $w = 0$, d.v.s då $v = a$

Vid numerisk integration approximeras integralen av en funktion $f(x)$ enligt $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n H_i f_i$, där H_i är en integrationsvikt, $f_i = f(x_i)$ är funktionsvärdet i integrationspunkten med koordinaten x_i och n är antalet integrationspunkter.

a: Härled integrationspunkternas läge vid Gauss-integration med $n = 2$. (2p)

b: Hur många (Gauss)integrationspunkter krävs för att beräkna $\int_{-1}^1 (2,4 + x^4 - 2x^7) dx$ exakt? Motivera ditt svar. (1p)

Lösning 3a: Låt $l_1^1(x)$ och $l_2^1(x)$ vara de två lineära Lagrangepolynom som antar funktionsvärdet 1 i ena integrationspunkten samt värdet 0 i den andra punkten. Konstruera andragradspolynomet $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ som antar värdet 0 i bäggepunkterna. Taylorserieutvecklingen av $f(x)$

kan då skrivas $f(x) = f_1 l_1^1(x) + f_2 l_2^1(x) + P(x) \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i$, så vi kan skriva

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \left(f_1 l_1^1(x) + f_2 l_2^1(x) + P(x) \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i \right) dx = \sum_{i=1}^n H_i f_i + \int_{-1}^1 \left(P(x) \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i \right) dx$$

Vid Gauss-integration med n punkter, väljs integrationspunkterna så att så att integralen av de första n termerna i sista integranden försvinner; här fås $\int_{-1}^1 (x^i P(x)) dx = 0$, $i = 0, 1$. Första ekvationen ger $\frac{2}{3} + 2x_1 x_2 = 0$, som med symmetrivillkoret $x_1 = -x_2$ ger lösningen $x_2 = -x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Lösning 3b: Vid Gaussintegration med n punkter, integreras polynom upp till grad $p = 2n - 1$ exakt, så för ett givet p krävs $n \geq \frac{p+1}{2}$ integrationspunkter. Eftersom termer med udda gradtal inte ger något bidrag till integralen, har vi här $p = 4$, så vi behöver $n = 3$ integrationspunkter.

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

13 APRIL 2012

Lösningar

Tid och plats:	8 ³⁰ – 12 ³⁰ i M-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal ca. 9 ³⁰ samt 11 ⁰⁰ .
Lösningar:	Anslås på anslagstavlan, avdelningen för dynamik, 16/4.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 23/4 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen vecka 18 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	torsdag 26/4 12–13 samt onsdag 2/5 12–13, Institutionen för tillämpad mekanik, plan 3 i Nya M-huset.

Tänk på:

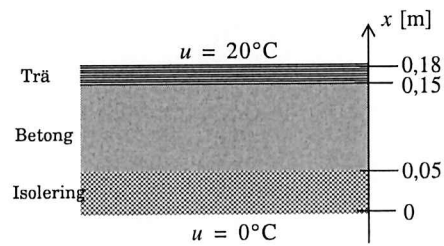
- Skriv så att den som ska rätta, kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid bedömningen av en lösning.
- Förklara/definiera införda beteckningar.
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

1

Betrakta värmeledning (1D) genom ett golv som är uppbyggt enligt figuren. Temperaturfördelningen $u(x)$ ges av lösningen till randvärdesproblemet

$$-\frac{d}{dx}\left[k\frac{du}{dx}\right] = 0 \quad 0 < x < 0,18 \text{ m}$$

$$u(0) = 5^\circ\text{C} \quad u(0,18 \text{ m}) = 20^\circ\text{C}$$



där

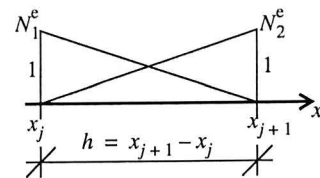
$$k = \begin{cases} 0,04 \text{ W/m}^\circ\text{C} & 0 < x < 0,05 \text{ m} \\ 1,7 \text{ W/m}^\circ\text{C} & 0,05 \text{ m} < x < 0,15 \text{ m} \\ 0,14 \text{ W/m}^\circ\text{C} & 0,15 \text{ m} < x < 0,18 \text{ m} \end{cases}$$

är värmekonduktiviteten.

a: Variationsformulera problemet. (2p)

b: FE-formulera problemet med testfunktioner enligt Galerkins metod och härled elementstyvhetmatrisen för ett lineärt element med längden h (2p)

c: Beräkna temperaturen i de två gränsskikten ($x = 0,05 \text{ m}$ respektive $x = 0,15 \text{ m}$) genom att lösa problemet med 3 lineära element. (3p)



Lösning 1a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v = v(x)$ och integrera över

$$\text{området (intervallet): } - \int_0^{0,18\text{m}} v \frac{d}{dx} \left[k \frac{du}{dx} \right] dx = 0. \text{ Efter partialintegration fås } \int_0^{0,18\text{m}} k \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx = \left[k v \frac{du}{dx} \right]_0^{0,18\text{m}}.$$

Eftersom $\frac{du}{dx}$ är obekant vid $x = 0$ och vid $x = 0,18 \text{ m}$ begränsar vi valet av testfunktioner till de som uppfyller $v(0) = v(0,18 \text{ m}) = 0$. Variationsproblemet blir då att hitta u så att

$$\int_0^{0,18\text{m}} k \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx = 0 \quad v(0) = v(0,18 \text{ m}) = 0 \quad u(0) = 5^\circ\text{C} \quad u(0,18 \text{ m}) = 20^\circ\text{C}$$

Lösning 1b: Approximera den obekanta funktionen med en lineärkombination av basfunktioner:

$u \approx u_h = Na$; här är $N = [N_1(x) \dots N_n(x)]$ en vektor med basfunktionerna och $a = [a_1 \dots a_n]$ är obekanta nodvariabler. Testfunktionerna väljs enligt Galerkins metod: $v = N_1, \dots, N_n$. Insättning ger

$$\int_0^{0,18\text{m}} k \left(\frac{dN}{dx} \right)^T \frac{dN}{dx} dx a = 0 \text{ med villkoren } N(0)a = 5^\circ\text{C} \text{ och } N(0,18 \text{ m})a = 20^\circ\text{C}$$

Ett element på intervallet (x_j, x_{j+1}) ger bidraget $\int_{x_j}^{x_{j+1}} k \left(\frac{dN^e}{dx} \right)^T \frac{dN^e}{dx} dx$ till styvhetsmatrisen; här inne-

håller radvektorn N^e de två basfunktionerna på elementet. Vi har trivialt $\frac{dN^e}{dx} = \begin{bmatrix} -1/h & 1/h \end{bmatrix}$, så

$$K^e = \int_{x_j}^{x_{j+1}} k \begin{bmatrix} \frac{-1}{h} \\ \frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} dx = k(x_{j+1} - x_j) \begin{bmatrix} \frac{1}{h^2} & \frac{-1}{h^2} \\ \frac{-1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{om } k \text{ är konstant över elementet}).$$

Lösning 1c: Använd ett element för varje material. Om element och nodvariabler numreras nedifrån och upp, får vi bidragen $K^{e1} = 0,8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $K^{e2} = 17 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ och $K^{e3} = \frac{14}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$ till vänsterledet i FE-formuleringen. De fyra ekvationerna blir då

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -0,8 & 0 & 0 \\ -0,8 & 17,8 & -17 & 0 \\ 0 & -17 & 21,6667 & -4,6667 \\ 0 & 0 & -4,6667 & 4,6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Randvillkoren ger att $a_1 = 5$ och $a_4 = 20$, så vi får

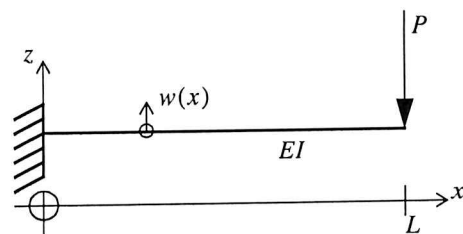
$$\begin{bmatrix} -0,8 & 0 \\ 17,8 & -17 \\ -17 & 21,6667 \\ 0 & -4,6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 93,333 \\ -93,333 \end{bmatrix}$$

Första och sista ekvationen har fått genom att välja testfunktionerna $v = N_1$ respektive $v = N_4$, men eftersom dessa val inte uppfyller villkoren $v(0) = v(0,18\text{m}) = 0$ är dessa ekvationer ogilliga; vi får då kvar $\begin{bmatrix} 17,8 & -17 \\ -17 & 21,6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 93,333 \end{bmatrix}$, som har lösningen $\begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,3 \\ 17,9 \end{bmatrix} ^\circ\text{C}$

2

En konsolbalk med längden L och konstant böjstyvheten EI är belastad med en kraft P enligt figuren. Balkens utböjning $w(x)$ fås som lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} EI \frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \\ w(0) = 0 & \frac{dw}{dx}(0) = 0 \\ \frac{d^2 w}{dx^2}(L) = 0 & \frac{d^3 w}{dx^3}(L) = \frac{P}{EI} \end{cases}$$



- Härled den svaga formen av randvärdesproblemet. Det ska framgå hur randvillkoren påverkar variationsproblemet. Ange också krav på ingående funktioner. (2p)
- Finit-elementformulera problemet med testfunktioner enligt Galerkin och visa hur B -matrisen ser ut. (2p)

- c: Det vanligaste balkelementet har 4 kubiska basfunktioner och nodvariablerna representerar förskjutningar och rotationer i de 2 noderna. För detta element blir elementstyvhetsmatrisen (med konstant böjstyvhets)

$$K^e = \frac{EI}{L_e} \begin{bmatrix} \frac{12}{L_e^2} & \frac{6}{L_e} & -\frac{12}{L_e^2} & \frac{6}{L_e} \\ \frac{6}{L_e} & 4 & -\frac{6}{L_e} & 2 \\ -\frac{12}{L_e^2} & -\frac{6}{L_e} & \frac{12}{L_e^2} & -\frac{6}{L_e} \\ \frac{6}{L_e} & 2 & -\frac{6}{L_e} & 4 \end{bmatrix}$$

där L_e är elementets längd. Lös problemet med 1 element. (2p)

Lösning 2a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v(x)$ och integrera över

intervallet: $\int_0^L EI v \frac{d^4 w}{dx^4} dx = 0$. Två partialintegreringar ger $\int_0^L EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx = \left[\frac{dv}{dx} EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_0^L - \left[v EI \frac{d^3 w}{dx^3} \right]_0^L$.

Använd nu randvillkoren för att utveckla randtermerna:

$$\left[\frac{dv}{dx} EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_0^L - \left[v EI \frac{d^3 w}{dx^3} \right]_0^L = \left(0 - \frac{dv}{dx} EI \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} \right) - \left(P v(L) - v EI \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=0} \right)$$

Eftersom vi inte känner värdena på $\frac{d^2 w}{dx^2}$ och $\frac{d^3 w}{dx^3}$ vid $x = 0$, begränsar vi valen av testfunktioner

till sådana som uppfyller $v(0) = 0$ och $\frac{dv}{dx}(0) = 0$ för att bli av med obekanta randtermer. Dessutom måste integralen existera, så vi måste också begränsa oss till funktioner som har kvadratisk integrerbara andra derivator. Om vi definierar

$$V = \left\{ v(x): \int_0^L \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx < \infty, v(0) = 0, \frac{dv}{dx}(0) = 0 \right\}$$

så kan den svaga formen skrivas:

$$\text{Hitta } w \in V \text{ så att } \int_0^L EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx = -P v(L) \quad \forall v \in V$$

Lösning 2b: Approximera w med en linearkombination av n valda basfunktioner

$w \approx w_h = \sum_{i=1}^n N_i(x) a_i$ och välj testfunktionerna som basfunktionerna i tur och ordning (Galerkin) så

att vi får lika många ekvationer som obekanta nodvariabler a_i . Låt V_h vara rummet av funktioner som kan skrivas som en linearkombination av basfunktionerna — FE-formuleringen kan då skrivas

$$\text{Hitta } w_h \in V_h \text{ så att } \int_0^L EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w_h}{dx^2} dx = -Pv(L) \quad \forall v \in V_h$$

Om vi sätter in $w_h = \sum_{i=1}^n N_i a_i = Na$, där $N = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n]$ och $a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T$, i integralen samt

samlar ekvationerna som fås för valen $v = N_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, så får vi $\int_0^L EI B^T B dx \ a = -P N^T(L)$, där

$$B = \frac{d^2 N}{dx^2} = \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \dots & \frac{d^2 N_n}{dx^2} \end{bmatrix}.$$

Lösning 2c: Eftersom vi bara har ett element så är styvhetsmatrisen samma som elementstyvhetsmatrisen, $K = K^e$, och elementlängden är L . Randvillkoren $x = 0$ gör att vi har $a_1 = a_2 = 0$ så de två första kolumnerna i K multipliceras med nollor. Vi kan inte heller använda vare sig N_1 eller N_2 som testfunktioner eftersom de inte satisfierar de två väsentliga randvillkoren vid $x = 0$; alltså

måste vi stryka de två första ekvationerna. Kvar har vi då $\begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = -\frac{PL}{EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, med lösningen

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = -\frac{L^2}{12} \begin{bmatrix} 4 & 6/L \\ 6/L & 12/L^2 \end{bmatrix} \frac{PL}{EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{PL^2}{EI} \begin{bmatrix} L/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

3

Jämvikt i ett 2D elasticitetsproblem kräver att $-\tilde{\nabla}^T(\sigma t) = bt$ där $\sigma = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T$ är spännings-

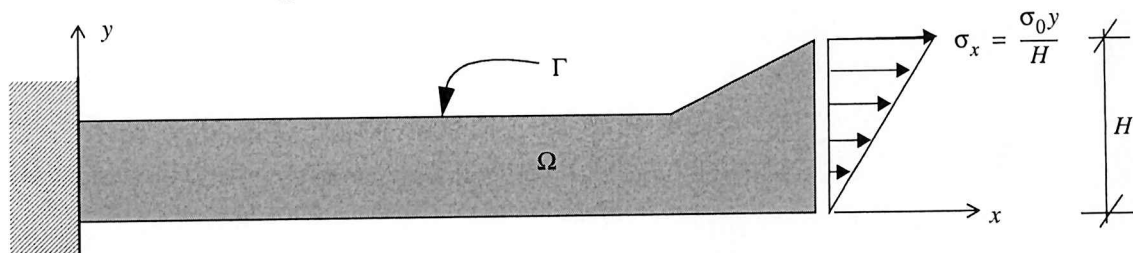
vektorn, $b = [b_x \ b_y]^T$ en given volymslast, t är tjockleken i z -led och $\tilde{\nabla}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$. Hookes lag

relaterar spänningarna med töjningarna $\varepsilon = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T$ enligt $\sigma = D\varepsilon$, och kinematik ger att

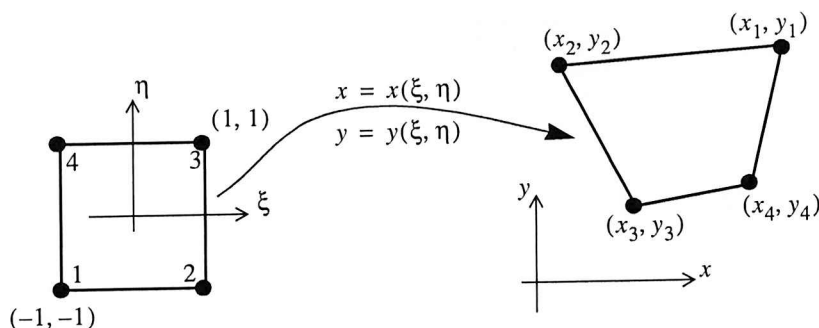
$\varepsilon = \tilde{\nabla} u$, där $u = [u_x \ u_y]^T$ är förskjutningsvektorn. Kombinerar de tre ekvationerna fås två andra ordningens partiella differentialekvationer, vars lösning ger den primärt obekanta förskjutningsvektorn. Om $b = 0$ så kan den svaga formen av problemet skrivas

$$a(u, v) = \oint_{\Gamma} v^T t t d\Gamma \quad (1)$$

där vi infört randlasten $t = [t_x \ t_y]^T$, testfunktionerna $v = [v_x \ v_y]^T$, samt den bi-lineära symmetriska formen $a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla v)^T D(\nabla u) t d\Omega$.

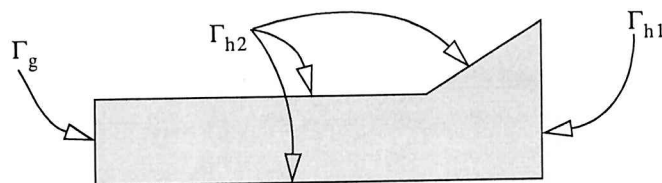


- a: Ange randvillkoren som krävs för att lösa elasticitetsproblemet som illustreras av figuren ovan (2p)
- b: Utgå från ekv (1) för att finit-elementformulera det givna problemet med testfunktioner enligt Galerkin. Det ska framgå hur randvillkoren påverkar formuleringen. Ange också den integral som ger styvhetsmatrisen för ett element med N_e basfunktioner — B^e — matrisens utseende ska visas. (2p)
- c: I vilket eller vilka områden ska man förvänta sig att de till storleken minsta elementen kommer att skapas, om en adaptiv h — metod används för att approximera lösningen till ekv (1)? Motivera ditt svar. (1p)
- d: Antag att vi ska använda isoparametriska bi-lineära element för att diskretisera problemet. Visa hur de derivator som behövs för att ställa upp B^e beräknas. Du behöver inte ange explicita uttryck för bas- eller formfunktioner, men tänk på att definiera alla beteckningar du inför. (2p)



Lösning 3a: Problemet innehåller två andra ordningens partiella differentialekvationer, så vi behöver två randvillkor på varje del av randen. Med beteckningar enligt figuren nedan har vi

$$\left. \begin{matrix} u_x = 0 \\ u_y = 0 \end{matrix} \right\} \text{ på } \Gamma_g \quad \left. \begin{matrix} t_x = \sigma_0 y / H \\ t_y = 0 \end{matrix} \right\} \text{ på } \Gamma_{h1} \quad \left. \begin{matrix} t_x = 0 \\ t_y = 0 \end{matrix} \right\} \text{ på } \Gamma_{h2}.$$



Högerledet i variationsproblemet blir då $\oint_{\Gamma} \mathbf{v}^T \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Gamma_{h1}} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} \sigma_{0y}/H \\ 0 \end{bmatrix} t d\Gamma$, eftersom testfunktionerna måste uppfylla de väsentliga randvillkoren: $v_x = v_y = 0$ på Γ_g .

Lösning 3b: Approximera $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = [\mathbf{u}_{hx} \ \mathbf{u}_{hy}]^T = \mathbf{N} \mathbf{a}$, där $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix}$ är valda bas-

funktioner och $\mathbf{a} = [u_{x1} \ u_{y1} \ u_{x2} \ u_{y2} \ \dots \ u_{xn} \ u_{yn}]^T$ är obekanta nodvariabler. Låt V_h vara rummet av funktioner som kan skrivas som en lineärkombination av de valda basfunktionerna; dessa har

valts så att $N_i = 0$ på Γ_g . Välj nu testfunktioner enligt Galerkin: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} N_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ N_n \end{bmatrix}$; vi har då

formuleringen: Hitta $\mathbf{u}_h = [\mathbf{u}_{hx} \ \mathbf{u}_{hy}]^T$, $\mathbf{u}_{hx}, \mathbf{u}_{hy} \in V_h$, så att $\mathbf{a}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_{h1}} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} \sigma_{0y}/H \\ 0 \end{bmatrix} t d\Gamma \quad \forall \mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y \in V_h$

På ett element har vi approximationen $\mathbf{u}_h = \mathbf{N}^e \mathbf{a}^e$, där $\mathbf{a}^e$ innehåller nodvariablerna på elementet

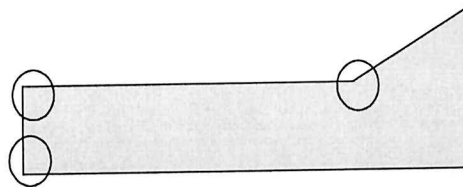
och $\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & \dots & N_{ne}^e & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & N_2^e & \dots & 0 & N_{ne}^e \end{bmatrix}$ är basfunktionerna på elementet. Bidraget till vänsterledet i FE-

formuleringen, från elementet, blir

$$\int_{\Omega_e} (\tilde{\nabla} \mathbf{N})^T \mathbf{D} (\tilde{\nabla} \mathbf{N} \mathbf{a}) t d\Omega = \int_{\Omega_e} (\tilde{\nabla} \mathbf{N}^e)^T \mathbf{D} (\tilde{\nabla} \mathbf{N}^e) t d\Omega \mathbf{a}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}^e t d\Omega \mathbf{a}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e, \text{ där alltså}$$

$$\mathbf{B}^e = \tilde{\nabla} \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{ne}^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{ne}^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{ne}^e}{\partial y} & \frac{\partial N_{ne}^e}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Lösning 3c: Man förväntar sig flest element i områden där förstaderivator av den exakta lösningen ändras snabbt, dvs där man har stora andraderivator. I ett elasticitetsproblem inträffar detta där man har spänningskoncentrationer; vi har tre sådana områden i det givna problemet: det inåtvända skarpa hörnet, samt de två övergångarna från fast inspänning till fri rand.



Lösning 3d: Isoparametriska element innebär att basfunktionerna $N_i^e(\xi, \eta)$ används som form-

funktioner — avbildningen görs då som $x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 x_i N_i^e$ $y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 y_i N_i^e$, där (x_i, y_i) är koordinaten för nod i . Eftersom basfunktionerna är polynom, beräknar vi enkelt derivatorna

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta}, \text{ och motsvarande för derivatorna av } y.$$

Basfunktionernas derivator med avseende på x och y (som behövs för att ställa upp B^e) fås med

kedjeregeln:
$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} \text{ där alltså } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \text{ Med } J^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$\det J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$, fås då de sökta derivatorna som
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$