

Institutionen för tillämpad mekanik, Chalmers tekniska högskola

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

16 DECEMBER 2009

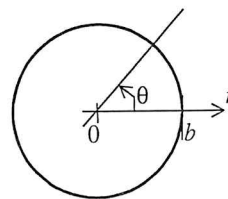
Tid och plats:	8 ³⁰ – 12 ³⁰ i V-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal ca. 9 ³⁰ samt 11 ³⁰ .
Lösningar:	Anslås på anslagstavlan vid ingången till institutionens lokaler senast 7/12. Se även kursens www-sidor på http://www.am.chalmers.se/~moller/index_fem_m3_gk.html
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 29/12 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 4/1 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	Måndag 4/1 13–15 samt tisdag 22/11 12–14.

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta, kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid poängsättningen.
- Förklara/definiera införda beteckningar.
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

Betrakta det rotationssymmetriska randvärdesproblemet

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[kr \frac{du}{dr} \right] &= Q & 0 < r < b \\ u(b) &= u_0 \end{aligned} \right\}$$

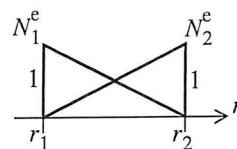


där k , Q , och u_0 är givna konstanter, medan $u = u(r)$ är den obekanta funktionen.

a: Variationsformulera problemet. Du behöver här inte ange regularitetskrav på ingående funktioner, med det måste klart framgå hur randvillkoret kommer in i den svaga formen. (Observera att integrationen måste göras över en volym: $\int_V \dots dV = \int \int \int \dots r d\theta dr dz$ (med lämpliga integrationsgränser)). (2p)

b: FE-formulera problemet med testfunktioner (viktsfunktioner) enligt Galerkin. (2p)

c: Tag fram ett uttryck för en lumpad elementlastvektor för ett lineärt element med längden $h = r_2 - r_1$. (2p)



d: Låt det numeriska värdet på alla ingående variabler vara 1, $k = b = Q = u_0 = 1$, och lös problemet med 2 lika långa lineära element. Lastvektorn får lumpas. För det lineära elementet är elementstyvhetmatrisen

$$K^e = \frac{k(r_1 + r_2)}{2h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3p)$$

Lösning 1a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v = v(r)$ och integrera över volymen

$$\int_0^b \int_0^{2\pi} \int_0^L v \left(Q + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[kr \frac{du}{dr} \right] \right) r d\theta dr dz = 0 \Rightarrow 2\pi L \int_0^b v \left(Qr + \frac{d}{dr} \left[kr \frac{du}{dr} \right] \right) dr = 0.$$

Efter division med $2\pi L$ och partialintegration av den andra termen i integranden,

$$\int_0^b v \left(\frac{d}{dr} \left[kr \frac{du}{dr} \right] \right) dr = \left[vkr \frac{du}{dr} \right]_0^b - \int_0^b kr \frac{dv}{dr} \frac{du}{dr} dr, \text{ fås } \int_0^b kr \frac{dv}{dr} \frac{du}{dr} dr = \left[vkr \frac{du}{dr} \right]_0^b + \int_0^b vrQ dr. \text{ Randtermen blir}$$

$$\left[vkr \frac{du}{dr} \right]_0^b = v(b)bk \frac{du}{dr} \Big|_{r=b} - 0 \text{ och eftersom } \frac{du}{dr} \text{ är obekant vid } r = b \text{ begränsar vi valet av testfunktioner till sådana som uppfyller villkoret } v(b) = 0. \text{ Vi har alltså variationsproblemet}$$

$$\int_0^b kr \frac{dv}{dr} \frac{du}{dr} dr = \int_0^b vrQ dr \quad u(b) = u_0 \quad v(b) = 0$$

Lösning 1b: Approximera den obekanta funktionen med en lineärkombination av basfunktioner $u \approx u_h = N_1 a_1 + N_2 a_2 + \dots + N_n a_n = Na$, där N är en radvektor med basfunktionerna och a är en kolumnvektor med nodvariablerna. Sätt in approximationen i variationsproblemet och låt

$$\frac{du_h}{dr} = \frac{d}{dr}[Na] = \frac{dN}{dr}a = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dr} & \frac{dN_2}{dr} & \dots & \frac{dN_n}{dr} \end{bmatrix} a = Ba : \int_0^b kr \frac{dv}{dr} B dr a = \int_0^b vr Q dr. \text{ V\aa}lj nu basfunktionerna$$

som testfunktioner i tur och ordning (Galerkins metod); varje val ger upphov till en ekvation och

$$\text{ekvationerna samlas radvis, s\aa } v \rightarrow \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \\ N_n \end{bmatrix} \text{ och } \frac{dv}{dr} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dr} \\ \frac{dN_2}{dr} \\ \dots \\ \frac{dN_n}{dr} \end{bmatrix} = B^T. \text{ Vi f\aa}r allts\aa$$

$$\int_0^b kr B^T B dr a = \int_0^b r Q dr. \text{ Nodvariabeln vid } r = b \text{ (} a_n \text{ om vi numrerar fr\aa}n v\aa\text{nster mot h\o}ger) \text{ ska}$$

f\o{reskrivas till } u_0 \text{ och motsvarande basfunktion kan inte anv\aa\text{ndas som testfunktion.}

L\o{sn\i}ng 1c: Den konsistenta elementlastvektorn ges av $f^e = \int_{r_1}^{r_2} (N^e)^T r Q dr$, d\aa{r radvektorn N^e inneh\aa\text{ller de basfunktioner som antar fr\aa}n noll skilda v\aa{rden p\aa} elementet. Eftersom summan av basfunktionerna \u00e4r 1, blir lastresultanten

$$\sum_{i=1}^2 f_i^e = \int_{r_1}^{r_2} (N_1^e + N_2^e) r Q dr = Q \int_{r_1}^{r_2} r dr = Q \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} = Q \frac{(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)}{2} = \frac{Q(r_2 + r_1)h}{2}. \text{ En lumpad last-}$$

$$\text{vektor f\aa}s om lasten f\o{rdelas lika p\aa} de tv\aa\text{ noderna: } f^e \approx \frac{Q(r_2 + r_1)h}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L\o{sn\i}ng 1d: Numrera element och noder med v\aa{x}ande r . Vi f\aa{r d\aa} nodekoordinaterna $r_1 = 0$,

$$r_2 = 1/2 \text{ och } r_3 = 1. \text{ Elementstyvhetismatriserna blir d\aa} K^{e=1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad K^{e=2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ och}$$

$$\text{elementlastvektorerna (lumpade enligt f\o{reg\aa}ende deluppgift) } f^{e=1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f^{e=2} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}. \text{ Med}$$

$$a^{e=1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \text{ och } a^{e=2} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \text{ s\aa} ger assembleringen$$

$$\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vi inf\o{r} nu det v\aa{s}entliga randvillkoret } u(b) = a_3 = 1 \text{ och f\aa}r d\aa \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} - a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 28 \\ -21 \end{bmatrix}.$$

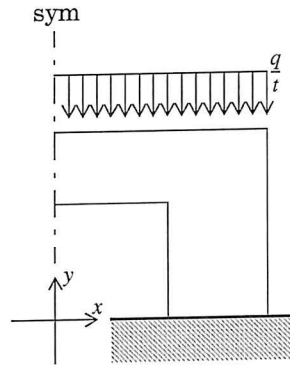
Den sista av dessa 3 ekvationer har erh\aa\text{llits genom att v\aa{lja} testfunktion $v = N_3$, vilken inte uppfyller villkoret $v(b) = 0$ och allts\aa\text{ \u00e4r} ogiltig; vi har d\aa

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 28 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 29/24 \end{bmatrix}$$

2

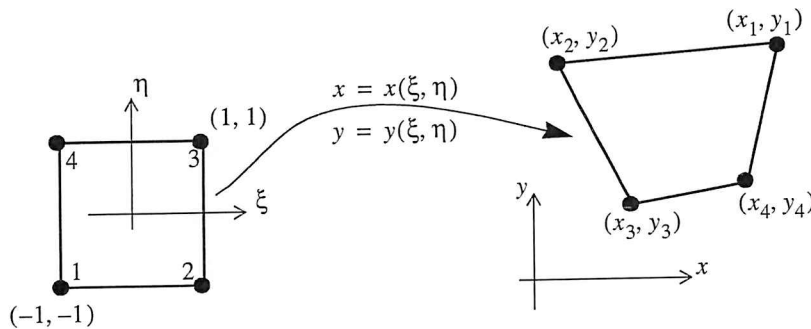
Figuren illustrerar ett elasticitetsproblem som är symmetriskt med avseende på y -axeln. Strukturen belastas med en utbredd last q/t (kraft/yta), där t är områdets tjocklek i z -led; t antas konstant och det råder plant spänningstillstånd. Den svaga formen (variationsproblemet) av elasticitetsproblemet kan skrivas

$$\int_A (\tilde{\nabla} v)^T D(\tilde{\nabla} u) dA = \oint_{\Gamma} v^T \begin{bmatrix} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \end{bmatrix} d\Gamma \quad \tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T$$



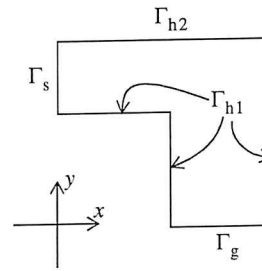
där D är Hooke-matrisen, $\sigma = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}]^T$ är spänningarna, $n = [n_x \ n_y]^T$ är en utåtriktad enhetsnormal till området A , v innehåller testfunktionerna (viktsfunktionerna), och $u = [u_x \ u_y]^T$ är de obekanta förskjutningarna i respektive koordinatriktning; Γ betecknar områdets rand.

- Teckna de randvillkor som gäller för det visade problemet och utveckla randintegralen. (2p)
- FE-formulera problemet med testfunktioner enligt Galerkins metod. Det ska framgå hur den obekanta förskjutningsvektorn u approximeras samt hur man får tillräckligt många ekvationer för att bestämma samtliga obekanta nodvariabler. Visa också hur B^e -matrisen ser ut för ett element med n noder. (3p)
- Antag att vi ska använda isoparametriska bi-lineära element för att diskretisera problemet. Visa hur de derivator som behövs för att ställa upp B^e beräknas. Du behöver inte ange explicita uttryck för bas- eller formfunktioner, men tänk på att definiera alla beteckningar du inför. (2p)



- Antag att problemet löses med en adaptiv FE-metod som använder h -förfining. I vilket eller vilka områden förväntar man sig då att de till storleken minsta elementen kommer att skapas? Motivera svaret. (2p)
- Givet att styvhetsmatrisen K är positivt definit och symmetrisk, visa att FE-approximationen minimerar den potentiella energin $\Pi(x) = \frac{1}{2} x^T K x - x^T f$, dvs att $\Pi(a) < \Pi(x) \quad \forall x \neq a$. (2p)

Lösning 2a: Med beteckningar enligt figuren så är alla förskjutningar förhindrade på Γ_g , på symmetrianden Γ_s måste horisontalförskjutningen och tangentialspänningen vara noll, på Γ_{h1} är normal och tangentialspänningen noll, och på Γ_{h2} är tangentialspänningen noll medan normalspänningen är $-q/t$. Låt $t_x = \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y$ och $t_y = \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y$; vi kan då skriva:



$$\begin{cases} u_x = u_y = 0 & \text{på } \Gamma_g \\ u_x = 0, t_y = 0 & \text{på } \Gamma_s \\ t_x = t_y = 0 & \text{på } \Gamma_{h1} \\ t_x = 0, t_y = \frac{-q}{t} & \text{på } \Gamma_{h2} \end{cases}$$

Insättning i randintegralen ger

$$\oint_{\Gamma} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y \\ \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y \end{bmatrix} d\Gamma = \int_{\Gamma_g} (v_x t_x + v_y t_y) d\Gamma + \int_{\Gamma_s} (v_x t_x + v_y \cdot 0) d\Gamma + \int_{\Gamma_{h1}} (v_x \cdot 0 + v_y \cdot 0) d\Gamma + \int_{\Gamma_{h2}} (v_x \cdot 0 + v_y \cdot \left(\frac{-q}{t}\right)) d\Gamma$$

Eftersom t_x är obekant på Γ_g och Γ_s måste testfunktionen v_x väljas så att $v_x = 0$ på dessa båda delränder; vidare är t_y obekant på Γ_g så vi måste välja v_y så att $v_y = 0$ på denna delrand. Vi får då

$$\text{randintegralen } \oint_{\Gamma} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y \\ \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y \end{bmatrix} d\Gamma = \frac{-q}{t} \int_{\Gamma_{h2}} v_y d\Gamma$$

Lösning 2b: Approximera $u_x \approx u_{xh} = a_{x1}N_1 + a_{x2}N_2 + \dots + a_{xm}N_m$ och

$u_y \approx u_{yh} = a_{y1}N_1 + a_{y2}N_2 + \dots + a_{ym}N_m$. Om vi samlar de $2m$ nodvariablerna i en vektor a och basfunktionerna i en matris N enligt

$$a = [a_{x1} \ a_{y1} \ a_{x2} \ a_{y2} \ \dots \ a_{xm} \ a_{ym}]^T \quad N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_m & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_m \end{bmatrix}$$

kan vi skriva $u \approx u_h = \begin{bmatrix} u_{xh} \\ u_{yh} \end{bmatrix} = Na$. Approximationen sätts in i variationsproblemet och vi väljer

sedan $v = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}^T$ på $2m$ olika sätt, så att vi får lika många ekvationer som obekanta nodvariabler.

Galerkins metod: välj $v = \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} N_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} N_m \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_m \end{bmatrix}$. Insättning ger nu

$$\int_A (\tilde{v}N)^T D(\tilde{v}N) dA = \int_{\Gamma_{h2}} N^T \begin{bmatrix} 0 \\ -q/t \end{bmatrix} d\Gamma$$

För ett element med n noder, samlar vi de $2n$ nodvariablerna i en vektor

$$\mathbf{a}^e = \begin{bmatrix} a_{x1}^e & a_{y1}^e & \dots & a_{xn}^e & a_{yn}^e \end{bmatrix}^T \text{ och motsvarande basfunktioner i matrisen } \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & \dots & N_n^e & 0 \\ 0 & N_1^e & \dots & 0 & N_n^e \end{bmatrix}, \text{ så}$$

att approximationen på elementet kan skrivas $\mathbf{u}_h = \mathbf{N}^e \mathbf{a}^e$. Vi har då $\tilde{\mathbf{V}} \mathbf{u}_h = \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{N}^e \mathbf{a}^e) = \mathbf{B}^e \mathbf{a}^e$, där alltså

$$\mathbf{B}^e = \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n^e}{\partial y} & \frac{\partial N_n^e}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Lösning 2c: Isoparametriska element innebär att basfunktionerna $N_i^e(\xi, \eta)$ används som form-

funktioner — avbildningen görs då som $x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 x_i N_i^e$ $y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 y_i N_i^e$, där (x_i, y_i) är

koordinaten för nod i . Eftersom basfunktionerna är polynom, beräknar vi enkelt derivatorna

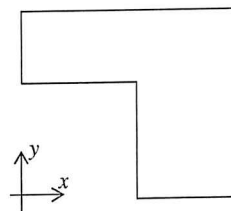
$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \text{ och motsvarande för derivatorna av } y.$$

Basfunktionernas derivator med avseende på x och y (som behövs för att ställa upp $\mathbf{B}^e$) fås med kedjeregeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} \text{ där alltså } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \text{ Med } \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\det \mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \text{ fås då de sökta derivatorna som } \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

Lösning 2d: Man förväntar sig flest element i områden där förstaderivator av lösningen ändras snabbt, dvs där andraderivator är stora. I ett elasticitetsproblem inträffar detta t.ex. där man har spänningskoncentrationer. Vi har 3 sådana områden i exemplet: vid det inåtvända hörnet, samt vid de 2 övergångarna mellan fast inspänning och fri rand.



Lösning 2e: Låt x vara en godtycklig vektor och a vara lösningen till $Ka = f$ (a är entydig eftersom K är positivt definit). Bilda $v = x - a$ — vi har då:

$$\begin{aligned}\Pi(x) &= \Pi(a + v) = \frac{1}{2}(a + v)^T K(a + v) - (a + v)^T f = \\ &= \frac{1}{2}(a^T K a + v^T K a + a^T K v + v^T K v) - a^T f - v^T f\end{aligned}$$

Men $a^T K v = (a^T K v)^T = (K v)^T a = v^T K^T a = v^T K a$, eftersom K är symmetrisk; vi har då

$$\Pi(x) = \frac{1}{2}a^T K a - a^T f + \frac{1}{2}v^T K v + v^T K a - v^T f = \Pi(a) + \frac{1}{2}v^T K v + v^T (K a - f)$$

Men $Ka = f \Rightarrow v^T (K a - f) = 0$ och K är positivt definit så $v^T K v > 0$ då $v \neq 0$, dvs då $x \neq a$, så det följer att $\Pi(x) > \Pi(a)$ för $x \neq a$.

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

22 AUGUSTI 2009

Tid och plats:	14 ⁰⁰ – 18 ⁰⁰ i V-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal ca. kl 15 samt 17.
Lösningar:	Anslås på kurshemsidan samt på institutionen (3 vån. i M-huset) senast 24/8.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 31/8 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 8/9 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	Ti/dag 1/9 12–13 samt torsdag 3/9 12–13 i institutionens lokaler.

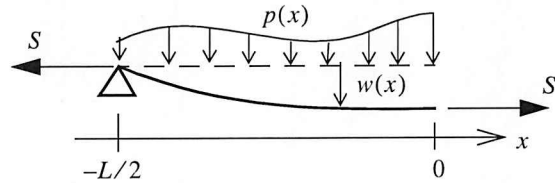
Lösningar

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta, kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid poängsättningen.
- Förklara/definiera införda beteckningar.
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex. förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

1

Betrakta en lina med längden L som har sträckts med en kraft S och sedan belastas med en transversal last med intensiteten $p(x)$. Om problemet är symmetriskt, så är utböjningen $w(x)$ lösningen till randvärdesproblemet



$$\begin{cases} -\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{p(x)}{S} & -\frac{L}{2} < x < 0 \\ w\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 & \frac{dw}{dx}(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

a: Härled den svaga formen (variationsformuleringen) av (1), och gör en finit-elementformulering med testfunktioner (viktsfunktioner) enligt Galerkins metod. Det ska klar framgå hur randvillkoren påverkar formuleringen. Ange också regularitetskrav på funktionerna. (3p)

b: Elementstyvhetmatrisen för ett lineärt element blir $K^e = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, där h är elementlängden.

Använd 2 lika långa element med lineära basfunktioner för att approximera lösningen till (1), för fallet då lastintensiteten p är konstant. (3p)

Lösning 1a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v(x)$ och integrera över

intervallet: $-\int_{-L/2}^0 v(x) \frac{d^2 w}{dx^2} dx = -\int_{-L/2}^0 v(x) \frac{p}{S} dx$. Partialintegration av vänsterledet ger

$$\int_{-L/2}^0 \frac{dv}{dx} \frac{dw}{dx} dx - \left(v(0) \frac{dw}{dx}(0) - v\left(-\frac{L}{2}\right) \frac{dw}{dx}\left(-\frac{L}{2}\right) \right) = \int_{-L/2}^0 v(x) \frac{p}{S} dx.$$

Den första randtermen försvinner eftersom $w'(0) = 0$; den andra randtermen är obekant, så för att bli av med den begränsar vi valet av testfunktion till sådana att $v(-L/2) = 0$. Om vi definierar

$$V = \left\{ v: v(-L/2) = 0, \int_{-L/2}^0 \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx < \infty, \int_{-L/2}^0 v^2 dx < \infty \right\}, \text{ kan då variationsproblemet}$$

skrivas: Hitta $w \in V$ så att $\int_{-L/2}^0 \frac{dv}{dx} \frac{dw}{dx} dx = \int_{-L/2}^0 v \frac{p}{S} dx \quad \forall v \in V.$

FE-formulering: väl en uppsättning basfunktioner N_i och låt V_h vara rummet av funktioner som

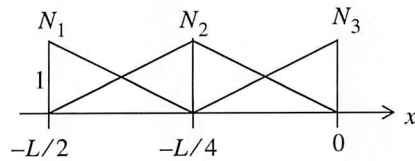
kan skrivas som en lineärkombination av basfunktionerna. Approximera $w \approx w_h = \sum_i N_i a_i = N a$

(där alltså $N = [N_1 \ N_2 \ \dots]$ och $a = [a_1 \ a_2 \ \dots]^T$). Ersätt den obekanta (w) med approximationen och använd basfunktionerna som testfunktioner (dvs Galerkins metod); vi får då:

Hitta $w_h \in V_h$ så att
$$\int_{-L/2}^0 \frac{dw_h}{dx} dx = \int_{-L/2}^0 \frac{p}{S} dx \quad \forall v \in V_h \text{ (eller)} \quad \int_{-L/2}^0 \left(\frac{dN}{dx} \right)^T \frac{dN}{dx} dx \mathbf{a} = \int_{-L/2}^0 \mathbf{N}^T \frac{p}{S} dx).$$

Lösning 1b: Med två lika stora element fås elementlängden $h = \frac{L}{4}$ och alltså elementstyvhetsmatrisen

$$\mathbf{K}^e = \frac{4}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Vänsterledet i FE-formuleringen blir då}$$



$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{K}^{e1} \begin{bmatrix} a_1^{e1} \\ a_1^{e1} \\ a_1^{e1} \end{bmatrix} + \mathbf{K}^{e2} \begin{bmatrix} a_1^{e2} \\ a_1^{e2} \\ a_1^{e2} \end{bmatrix} = \frac{4}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \frac{4}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{4}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Här betecknar $\mathbf{K}^{ei}$ och a_j^{ei} elementstyvhetsmatrisen för element nummer i , respektive nodvariabel j på element i ; $[a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ är nodvariablerna med global numrering.

Högerledet fås som

$$\int_{-L/2}^0 \mathbf{N}^T \frac{p}{S} dx = \frac{p}{S} \int_{-L/2}^0 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} dx = \frac{p}{S} \left(1 \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{pL}{8S} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

där vi utnyttjat att $\frac{p}{S}$ är konstant. Ekvationssystemet blir alltså

$$\frac{4}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{pL}{8S} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Härnäst observerar vi att N_1 inte är en tillåten testfunktion eftersom den inte uppfyller villkoret

att testfunktionerna måste vara 0 vid $x = \frac{-L}{2}$. Första ekvationen måste därför strykas. Vidare har

vi att $w_h\left(\frac{-L}{2}\right) = 0$, så vi sätter $a_1 = 0$ varvid första kolumnen i styvhetsmatrisen multipliceras med 0. Kvar är då

$$\frac{4}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{pL}{8S} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{så } \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{L}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{pL}{8S} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{pL^2}{32S} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vara ett område i (x, y) -planet och Γ dess rand. Potentialfunktionen $\phi = \phi(x, y)$ är lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{D}\nabla\phi) = f & \text{i } \Omega \\ \phi = 0 & \text{på } \Gamma \end{cases}$$

Här är $f = f(x, y)$ en given funktion och $\mathbf{D}$ en symmetrisk och positivt definit konstitutiv matris.

a: Använd Green–Gauss sats, $\int_{\Omega} v \operatorname{div}(\mathbf{q}) d\Omega = \oint_{\Gamma} v \mathbf{q}^T \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla v)^T \mathbf{q} d\Omega$, för att variationsformulera problemet; det måste framgå hur randvillkoret påverkar formuleringen. Redogör också för vilka krav som ställs på testfunktionerna (viktsfunktionerna). (2p)

b: Finit–elementformulera variationsproblemet och visa hur $\mathbf{B}^e$ –matrisen för ett element med n basfunktioner ser ut. (2p)

Lösning 2a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion v och integrera över området

$$\det: - \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\mathbf{D}\nabla\phi) d\Omega = \int_{\Omega} v f d\Omega. \text{ Använd nu Green–Gauss sats (identifiera vektorn } \mathbf{D}\nabla\phi \text{ med } \mathbf{q}); \text{ vi}$$

$$\text{får: } \int_{\Omega} (\nabla v)^T \mathbf{D}(\nabla\phi) d\Omega = \oint_{\Gamma} v (\mathbf{D}\nabla\phi)^T \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} v f d\Omega$$

Ingående funktioner måste vara tillräckligt reguljära för att detta uttryck ska ha någon mening — funktionerna måste vara kvadratiskt integrerbara och ha kvadratiskt integrerbara första derivator. Därtill måste testfunktionerna uppfylla $v = 0$ på Γ , eftersom integranden i randintegralen är obekant ($\nabla\phi$ är okänd). Testfunktionen måste alltså satsifiera *homogena väsentliga* randvillkor. Låt V vara rummet av funktioner som uppfyller dessa villkor. Variationsproblemet kan då skrivas:

$$\text{Hitta } \phi \in V \text{ så att } \int_{\Omega} (\nabla v)^T \mathbf{D}(\nabla\phi) d\Omega = \int_{\Omega} v f d\Omega \quad \forall v \in V$$

Lösning 2b: Välj N basfunktioner N_i ur V (konform metod) och låt $V_h \subset V$ vara rummet av alla funktioner som kan uttryckas som en lineärkombination av basfunktionerna. Speciellt approximerar vi

$$\phi \approx \phi_h = \sum_{i=1}^N N_i a_i \text{ och beräknar nodvariablerna } a_i \text{ så att variationsproblemet satsifieras i } V_h$$

$$\text{(Galerkins metod). Alltså har vi: Hitta } \phi_h \in V_h \text{ så att } \int_{\Omega} (\nabla v)^T \mathbf{D}(\nabla\phi_h) d\Omega = \int_{\Omega} v f d\Omega \quad \forall v \in V_h$$

För ett element med n basfunktioner, dvs ett på vilket bara n av de N basfunktionerna har nollskilda funktionsvärden, kan FE–approximationen skrivas

$$\phi_h = \begin{bmatrix} N_1^e & N_2^e & \dots & N_{N_e}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^e & a_2^e & \dots & a_{N_e}^e \end{bmatrix}^T = \mathbf{N}^e \mathbf{a}^e, \text{ så att } \nabla\phi_h = \nabla(\mathbf{N}^e \mathbf{a}^e) = (\nabla \mathbf{N}^e) \mathbf{a}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{a}^e, \text{ där alltså}$$

$$\mathbf{B}^e = \nabla \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{N_e}^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{N_e}^e}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Betrakta en isoparametrisk avbildning av ett bi-lineärt element som har basfunktionerna

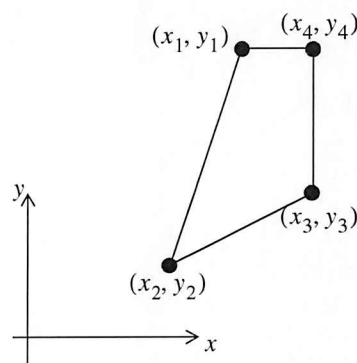
$$N_1(r, s) = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \quad N_2(r, s) = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

$$N_3(r, s) = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \quad N_4(r, s) = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

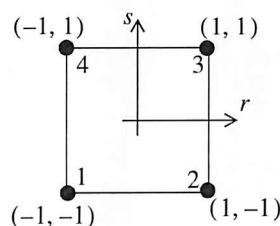
i ett lokalt koordinatsystem (r, s) . På ett element approximerar vi

$$\text{en obekant funktion } u(x, y) \text{ med } u_h(x(r, s), y(r, s)) = \sum_{i=1}^4 u_i N_i(r, s),$$

där u_i är nodvariablerna på elementet.



- a: Härled ett uttryck för gradienten $\begin{bmatrix} \frac{\partial u_h}{\partial x} & \frac{\partial u_h}{\partial y} \end{bmatrix}^T$, givet att nodkoordinaterna (x_i, y_i) och nodvariablerna är kända (4p)



- b: I ett temperaturledningsproblem har man beräknat nodtemperaturerna $u_1 = 70^\circ\text{C}$, $u_2 = 10^\circ\text{C}$, $u_3 = 30^\circ\text{C}$ och $u_4 = 70^\circ\text{C}$, för ett element med nodkoordinaterna $(x_1, y_1) = (3, 4) \text{ m}$, $(x_2, y_2) = (2, 1) \text{ m}$, $(x_3, y_3) = (4, 2) \text{ m}$ och $(x_4, y_4) = (4, 4) \text{ m}$ (se figur). Beräkna temperaturgradienten i elementets mittpunkt. (3p)

Lösning 3a: Isoparametriska element innebär att basfunktionerna $N_i(r, s)$ används som form-

funktioner — avbildningen görs då som $x(r, s) = \sum_{i=1}^4 x_i N_i$ $y(r, s) = \sum_{i=1}^4 y_i N_i$, där (x_i, y_i) är

koordinaten för nod i . Eftersom basfunktionerna är polynom, beräknar vi enkelt derivatorna

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i}{\partial r}, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i}{\partial s} \text{ och motsvarande för derivatorna av } y.$$

Med kedjeregeln kan vi nu beräkna

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_h}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial u_h}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial u_h}{\partial y} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial u_h}{\partial r} \\ \frac{\partial u_h}{\partial s} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_h}{\partial x} \\ \frac{\partial u_h}{\partial y} \end{bmatrix} \text{ där alltså } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}. \text{ Med } \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\det \mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial r}, \text{ fås då den sökta gradienten som } \begin{bmatrix} \frac{\partial u_h}{\partial x} \\ \frac{\partial u_h}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_h}{\partial r} \\ \frac{\partial u_h}{\partial s} \end{bmatrix}.$$

Lösning 3b: Vi behöver derivatorna av basfunktionerna i elementets mitt, dvs i punkten

$(r, s) = (0, 0)$: $\frac{\partial N_1}{\partial r} = -\frac{1}{4}(1-s)$ och $\frac{\partial N_1}{\partial s} = -\frac{1}{4}(1-r)$, så $\frac{\partial N_1}{\partial r}(0, 0) = -\frac{1}{4}$ och $\frac{\partial N_1}{\partial s}(0, 0) = -\frac{1}{4}$. På samma sätt fås

$$\frac{\partial N_2}{\partial r}(0, 0) = \frac{1}{4}, \frac{\partial N_2}{\partial s}(0, 0) = -\frac{1}{4}, \frac{\partial N_3}{\partial r}(0, 0) = \frac{1}{4}, \frac{\partial N_3}{\partial s}(0, 0) = \frac{1}{4}, \frac{\partial N_4}{\partial r}(0, 0) = -\frac{1}{4}, \frac{\partial N_4}{\partial s}(0, 0) = \frac{1}{4}$$

Vi har då $\frac{\partial x}{\partial r} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i}{\partial r} = \frac{1}{4}(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4) = -\frac{1}{4}\text{m}$ och

$\frac{\partial x}{\partial s} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i}{\partial s} = \frac{1}{4}(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) = \frac{3}{4}\text{m}$. På samma sätt får vi

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{1}{4}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4) = -\frac{5}{4}\text{m}, \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{4}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4) = \frac{1}{4}\text{m},$$

$\frac{\partial u_h}{\partial r} = \frac{1}{4}(-u_1 + u_2 + u_3 - u_4) = -25^\circ\text{C}$ samt $\frac{\partial u_h}{\partial s} = \frac{1}{4}(-u_1 - u_2 + u_3 + u_4) = 5^\circ\text{C}$. Insättning i uttrycket för gradienten ger då

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_h}{\partial x} \\ \frac{\partial u_h}{\partial y} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -25 \\ 5 \end{bmatrix} [^\circ\text{C}/\text{m}] = \frac{2}{7} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -25 \\ 5 \end{bmatrix} [^\circ\text{C}/\text{m}] = \frac{2}{7} \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \end{bmatrix} [^\circ\text{C}/\text{m}] = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix} [^\circ\text{C}/\text{m}] \end{aligned}$$

FE-formuleringen av de randvärdesproblem som behandlats i kursen leder fram till ett ekvations-system $Ka = f$, där styvhetsmatrisen blir symmetrisk om testfunktionerna väljs enligt Galerkins metod; väsentliga och/eller konvektiva randvillkor gör att matrisen också blir positivt definit.

a: Visa att FE-approximationen minimerar den potentiella energin $\Pi(x) = \frac{1}{2}x^T Kx - x^T f$, dvs att

$$\Pi(a) < \Pi(x) \quad \forall x \neq a. \quad (2p)$$

b: Visa att lösningen är unik, dvs att Π bara har ett minimum. (1p)

Lösning 4a: Den potentiella energin i FE-approximationen är $\Pi(a) = \frac{1}{2}a^T Ka - a^T f$. Låt v vara en godtycklig vektor och $\varepsilon \ll 1$ vara ett litet reellt tal, och beräkna potentiella energin efter en liten godtycklig variation εv :

$$\begin{aligned} \Pi(a + \varepsilon v) &= \frac{1}{2}(a + \varepsilon v)^T K(a + \varepsilon v) - (a + \varepsilon v)^T f = \\ &= \frac{1}{2}(a^T Ka + \varepsilon v^T Ka + \varepsilon a^T Kv + \varepsilon^2 v^T Kv) - a^T f - \varepsilon v^T f \end{aligned}$$

Men $a^T Kv = (a^T Kv)^T = (Kv)^T a = v^T K^T a = v^T Ka$, eftersom K är symmetrisk; vi har då

$$\Pi(a + \varepsilon v) = \frac{1}{2}a^T Ka - a^T f + \frac{\varepsilon^2}{2}v^T Kv + \varepsilon v^T Ka - \varepsilon v^T f = \Pi(a) + \frac{\varepsilon^2}{2}v^T Kv + \varepsilon v^T (Ka - f)$$

Förändringen i potentiell energi är därmed

$$\partial \Pi(a) = \Pi(a + \varepsilon v) - \Pi(a) = \frac{\varepsilon^2}{2}v^T Kv + \varepsilon v^T (Ka - f) \approx \varepsilon v^T (Ka - f), \text{ där vi försummar } \varepsilon^2\text{-termen efter-}$$

som $\varepsilon \ll 1$. Eftersom $Ka = f \Rightarrow Ka - f = 0$, ser vi att $\partial \Pi(a) = 0$, dvs FE-approximationen gör potentiella energin stationär. För att se att den stationära punkten är ett minimum beräknar vi andra-variationen: $\partial^2 \Pi(a) = \partial \Pi(a + \varepsilon v) - \partial \Pi(a) = \varepsilon v^T (K(a + \varepsilon v) - f) - \varepsilon v^T (Ka - f) = \varepsilon^2 v^T Kv > 0$, där den sista olikheten följer av att K är positivt definit. Av $\partial^2 \Pi(a) > 0$ följer att den stationära punkten är ett minimum.

Lösning 4b: Antag att a_1 och a_2 minimerar Π . Vi har då att

$\partial \Pi(a_1) = \varepsilon v^T (Ka_1 - f) = 0 \Rightarrow Ka_1 = f$ och på samma sätt att $Ka_2 = f$. Subtraktion ger $Ka_1 - Ka_2 = 0$, eller $K(a_1 - a_2) = 0$. Eftersom K är positivt definit är enda lösningen $a_1 - a_2 = 0$, varvid vi har att $a_1 = a_2$ — dvs Π har bara ett minimum.

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

17 APRIL 2009

Tid och plats:	8 ³⁰ – 12 ³⁰ i V-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal ca. 9 ³⁰ samt 11 ¹⁵ .
Lösningar:	Anslås på anslagstavlan avdelningen för dynamik senast 20/4.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 29/4 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 6/5 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	måndag 4/5 12–13 samt tisdag 5/5 12 ³⁰ –13 ³⁰ .

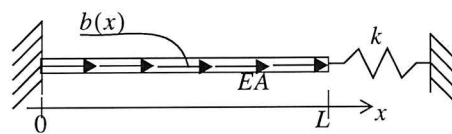
Lösningar

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta, kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid poängsättningen.
- Förklara/definiera införda beteckningar.
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex. förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

1

Betrakta stångproblemet som illustreras i figuren. Stångens axiella förskjutning $u(x)$ ges av lösningen till randvärdesproblemet



$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right] = b & 0 < x < L \\ u(0) = 0 \\ \frac{du}{dx}(L) + \frac{k}{EA}u(L) = \frac{P}{EA} \end{cases}$$

- a: Variationsformulera problemet. Det ska framgå hur randvillkoren kommer in i variationsproblemet. Ange också regularitetskrav på ingående funktioner. (2p)
- b: Finit-elementformulera problemet med testfunktioner (viktsfunktioner) enligt Galerkin. (1p)

Lösning 1a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v(x)$ och integrera över intervallet

$$-\int_0^L v \frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right] dx = \int_0^L v b dx$$

Partialintegration av vänsterledet ger

$$\int_0^L EA \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx = \int_0^L v b dx + v(L) \left[EA\frac{du}{dx}\right]_{x=L} - v(0) \left[EA\frac{du}{dx}\right]_{x=0}$$

I den första randtermen kan vi sätta in randvillkoret vid $x = L$, men $\frac{du}{dx}$ är obekant vid $x = 0$ så vi begränsar våra val av testfunktioner till de som uppfyller $v(0) = 0$. Funktionerna måste vidare vara kvadratiskt integrerbara och ha kvadratiskt integrerbar förstaderivata. Om vi definierar

$$V = \left\{ v: v(0) = 0 \quad \int_0^L \left(v^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right) dx < \infty \right\}$$

Så kan variationsproblemet skrivas: Hitta $u \in V$ så att $\int_0^L EA \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx + kv(L)u(L) = \int_0^L v b dx + Pv(L)$

$\forall v \in V$.

Lösning 1b: Approximera u med en lineärkombination av basfunktioner:

$u \approx u_h = \sum_i N_i(x) a_i = N a$, där $N = [N_1(x) \ N_2(x) \ \dots \ N_n(x)]$ är en radvektor med basfunktionerna

och $a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T$ innehåller nodvariablerna. Insättning i variationsproblemet ger

$$\left(\int_0^L EA \frac{dv}{dx} \frac{dN}{dx} dx + kv(L)N(L) \right) a - \int_0^L v b dx - P v(L) = 0$$

Testfunktionerna väljs nu som basfunktionerna $v = N_1, N_2, \dots, N_n$, dvs Galerkins metod, vilket ger n ekvationer som kan användas för att beräkna nodvariablerna a ; detta är ekvivalent med att sätta $v = c^T N^T$, där c är godtycklig. Insättning ger

$$c^T \left\{ \left(\int_0^L EA \left(\frac{dN}{dx} \right)^T \frac{dN}{dx} dx + k N^T(L) N(L) \right) a - \int_0^L N^T b dx - P N^T(L) \right\} = 0$$

För att denna likhet ska vara uppfylld för godtyckligt vald vektor c , så måste uttrycket innanför klammer-parentesen vara en nollvektor; med beteckningen $B = \frac{dN}{dx}$ har vi alltså

$$\left(\int_0^L EA B^T B dx + k N^T(L) N(L) \right) a = \int_0^L N^T b dx + P N^T(L)$$

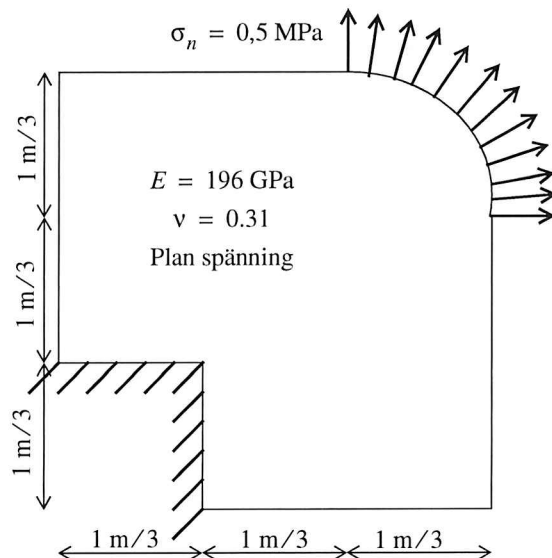
2

Figuren visar ett 2D elasticitetsproblem vars lösning man vill approximera med en konform finit- elementmetod. Antag att man utgår från en ganska grov diskretisering med lineära 3-nods element och använder en adaptiv h -metod för att approximerar lösningen.

- Redogör för vad som menas med adaptivitet och förklara vad h -metod betyder. (2p)
- I vilket eller vilka områden förväntar du dig att ett adaptivt FE-programmet ska generera de till storleken minsta elementen? Motivera svaret. (1p)
- En konform FE-diskretisering av problemet leder till ekvationssystemet $Ka = f$, där styvhetsmatrisen K är symmetrisk och positivt definit. Visa att lösningen $a = K^{-1}f$

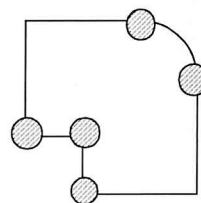
minimerar den potentiella energin $\Pi(v) = \frac{1}{2} v^T K v - v^T f$, dvs visa att $\Pi(a) \leq \Pi(v)$, med

$\Pi(a) = \Pi(v)$ endast om $a \equiv v$. (2p)



Lösning 2a: Ett adaptivt FE-program uppskattar diskretiseringsfelets storlek. Om felet är större än någon angiven tolerans, ändrar programmet FE-diskretiseringen; med h -metod menas att fler (till storleken mindre) element används. Processen fortgår till dess att den önskade noggrannheten uppnåtts.

Lösning 2b: Med en adaptiv h -metod förväntar man sig de till storleken minsta elementen i områden där förstaderivatorna i lösningen varierar som mest (d.v.s i områden där andraderivator är stora). I ett elasticitetsproblem får man singulära punkter — där spänningarna (förstaderivator) ändras snabbt över korta sträckor — vid t.ex inåtvända hörn, och vid abrupta förändringar i randvillkor. I det givna problemet finns 5 sådana punkter, som visas i figuren här brevid.



Lösning 2c: Låt a vara lösningen till ekvationssystemet $Ka = f$ så att

potentiella energin i FE-approximationen blir $\Pi(a) = \frac{1}{2}a^T Ka - a^T f$. Betrakta nu en godtycklig vektor v och låt $w = v - a$. Vi har då

$$\begin{aligned}\Pi(v) &= \Pi(w + a) = \frac{1}{2}(w + a)^T K(w + a) - (w + a)^T f = \\ &= \frac{1}{2}a^T Ka + \frac{1}{2}a^T Kw + \frac{1}{2}w^T Ka + \frac{1}{2}w^T Kw - w^T f - a^T f = \\ &= \{a^T Kw = w^T Ka \text{ ty } K \text{ är sym.}\} = \Pi(a) + \frac{1}{2}w^T Kw + w^T (Ka - f) = \\ &= \{Ka = f \text{ så } Ka - f = 0\} = \Pi(a) + \frac{1}{2}w^T Kw\end{aligned}$$

Men $w^T Kw > 0$ (för $w \neq 0$), ty K är positivt definit; alltså gäller $\Pi(v) \geq \Pi(a)$ med likhet endast då $w = 0$, d.v.s då $v = a$.

3

Betrakta ett kvadratisk membran med kantlängden $2L$ som i z -led belastas med en jämnt fördelad last q (konstant). Om membranet är förspänt med S (kraft/längd) så ges utböjningen i z -led av lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla w) = \frac{q}{S} & \text{i } \Omega \\ w = 0 & \text{på } \Gamma_g \end{cases}$$

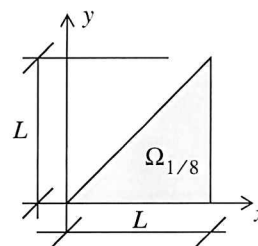
a: Genom att utnyttja symmetrin i problemet, räcker det med att betrakta 1/8-del av området. Formulera randvärdesproblemet så att symmetrin beaktas på detta sätt. (1p)

b: Använd Green–Gauss teorem, d v s

$$\int_{\Omega} \psi \operatorname{div}(q) d\Omega = \oint_{\Gamma} \psi q^T n d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \psi)^T q d\Omega \quad (\text{där } \psi \text{ är en skalär}$$

funktion, q en vektorvärd funktion och n en utåtriktad enhetsnormal till $\Omega_{1/8}$), för att härleda problemets variationsformulering.

Regularitetskrav på inblandade funktioner ska anges. Det ska också klart framgå hur randvillkoren beaktas i variationsproblemet. (2p)



c: Finit-elementformulera problemet med test-(vikts-)funktioner enligt Galerkins metod. Visa

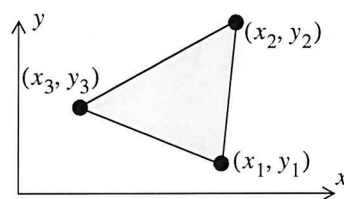
B^e – matrisens utseende för ett element med N_e basfunktioner. (2p)

- d: Betrakta ett 3-nodselement för att approximera lösningen till problemet. Om nodkoordinaterna betecknas (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$, så ges basfunktionerna av

$$N_1^e(x, y) = \frac{1}{2A} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$N_2^e(x, y) = \frac{1}{2A} [x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

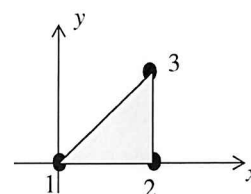
$$N_3^e(x, y) = \frac{1}{2A} [x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$



där $A = \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2)$ är elementets area. Visa hur uttrycken för basfunktionerna $N_i^e(x, y)$ kan tas fram med C -matrismetoden. Du behöver inte explicit invertera matrisen C . (2p)

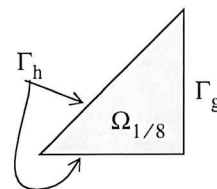
- e: Visa att elementet är komplett. (2p)

- f: Antag att $\Omega_{1/8}$ diskretiseras med ett enda 3-nodselement. Visa att detta leder till ekvationen $Ka = f$, med $K = [1/2]$, $a = [a_1]$ och $f = [(qL^2)/(6S)]$. (3p)



Lösning 3a: Normalderivatan måste vara noll utmed symmetriränderna. Randvärdesproblemet blir alltså

$$\begin{cases} -\text{div}(\nabla w) = \frac{q}{S} & \text{in } \Omega_{1/8} \\ w = 0 & \text{on } \Gamma_g \\ (\nabla w)^T \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma_h \end{cases}$$



där $\mathbf{n}$ är en utåtriktad enhetsnormal till randen.

Lösning 3b: Multiplicera båda sidor av differentialekvationen med en testfunktion $v = v(x, y)$

och integrera över området: $-\int_{\Omega_{1/8}} v \text{div}(\nabla w) d\Omega = \int_{\Omega_{1/8}} v \frac{q}{S} d\Omega$. Använd Green–Gauss sats på vänster-

ledet: $\int_{\Omega_{1/8}} (\nabla v)^T (\nabla w) d\Omega = \int_{\Omega_{1/8}} v \frac{q}{S} d\Omega + \oint_{\Gamma} v (\nabla w)^T \mathbf{n} d\Gamma$. Betrakta nu randintegralen; villkoret på Γ_h

säger att integranden här är noll, men vi vet inget om värdet på $(\nabla w)^T \mathbf{n}$ på Γ_g . Eftersom det är nödvändigt att kunna beräkna randintegralen, väljer vi bara testfunktioner sådana att $v = 0$ på

Γ_g . Alltså, $\oint_{\Gamma} v (\nabla w)^T \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_g} v (\nabla w)^T \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_h} v (\nabla w)^T \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_g} 0 \cdot (\nabla w)^T \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_h} v \cdot 0 d\Gamma = 0$

För att integralerna ska existera, krävs att alla funktioner är tillräckligt reguljära:

$$\int_{\Omega_{1/8}} v^2 d\Omega < \infty \quad \int_{\Omega_{1/8}} (\nabla v)^T (\nabla v) d\Omega < \infty. \text{ Låt } V \text{ beteckna rummet av alla funktioner som uppfyller}$$

regularitetskravet och som uppfyller villkoret $v = 0$ på Γ_g . Variationsproblemet kan då skrivas

$$\text{Sök } w \in V \text{ så att } \int_{\Omega_{1/8}} (\nabla v)^T (\nabla w) d\Omega = \int_{\Omega_{1/8}} v \frac{q}{S} d\Omega \quad \forall v \in V$$

Lösning 3c: Approximera den obekanta funktionen med en lineärkombination av valda basfunktioner

$N_i(x, y): w \approx w_h = \sum_i N_i a_i = \mathbf{N} \mathbf{a}$ ($\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots]$, $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots]^T$) och sätt in denna i

variationsproblemet. Välj sedan testfunktioner v enligt Galerkins metod, d.v.s som basfunktionerna i tur och ordning; variationsproblemet kommer därmed att vara satisfierat för varje lineärkombination av basfunktioner. Om vi definierar FE-rummet V_h som rummet av alla funktioner som kan skrivas som en lineärkombination av basfunktionerna, så kan FE-formuleringen enligt Galerkin skrivas:

$$\text{Sök } w_h \in V_h \text{ så att } \int_{\Omega_{1/8}} (\nabla v)^T (\nabla w_h) d\Omega = \int_{\Omega_{1/8}} v \frac{q}{S} d\Omega \quad \forall v \in V_h$$

Om de N_e basfunktioner som är skilda från noll på ett element samlas i en radvektor

$\mathbf{N}^e = [N_1^e \ \dots \ N_{N_e}^e]$, och motsvarande nodvariabler i en kolumnvektor $\mathbf{a}^e = [a_1^e \ \dots \ a_{N_e}^e]^T$, så blir

approximationen på elementet $w_h = \mathbf{N}^e \mathbf{a}^e$. Vi har då $\nabla w_h = \nabla(\mathbf{N}^e \mathbf{a}^e) = (\nabla \mathbf{N}^e) \mathbf{a}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{a}^e$, där alltså

$$\mathbf{B}^e = \nabla \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^e & \dots & N_{N_e}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{N_e}^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{N_e}^e}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Lösning 3d: Vi har en lineär ansatts på elementet: $w_h = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$. Vi vill uttrycka denna

som en lineärkombination av basfunktioner, d.v.s $w_h = \sum_{i=1}^3 a_i^e N_i^e$, där N_i^e antar värdet 1 i nod i

och värdet 0 i övriga noder. Vi har alltså $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = \sum_{i=1}^3 a_i^e N_i^e$. Om vi sätter in koordinaten

(x_1, y_1) för nod 1 fås ekvationen $\alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 = a_1^e$; på samma sätt fås en ekvation för var och

en av de andra 2 nodekoordinaterna. De 3 ekvationerna kan skrivas $\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \end{bmatrix}$ eller

$C\alpha = a^e$. Alltså fås $\alpha = C^{-1}a^e$. Vi har $w_h = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \alpha = N^e a^e$ som då ger $\begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} C^{-1} a^e = N^e a^e$.

Basfunktionerna fås alltså som $N^e = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} C^{-1}$

Lösning 3e: Elementet är komplett om det går att välja nodvariabelvärden a_i^e så att ansatsen

$w_h = \sum_{i=1}^3 a_i^e N_i^e$ på elementet blir en konstant, samt välja värden så att gradienten ∇w_h blir konstant. Det senare villkoret är trivialt uppfyllt eftersom de lineära basfunktionerna har konstanta

gradienter: $\nabla N_1^e = \begin{bmatrix} (y_2 - y_3) \\ (x_3 - x_2) \end{bmatrix}$, etc. För att visa att det första villkoret är uppfyllt väljer vi nodvari-

ablerna till en och samma godtyckliga konstant c — vi har då

$$w_h = c(N_1^e + N_2^e + N_3^e) = \frac{c}{2A}(x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1) = \frac{c}{2A} 2A = c$$

Lösning 3f: Från FE-formuleringen har vi att $\int_{\Omega_{1/8}} (\nabla v)^T (\nabla N) d\Omega a = \int_{\Omega_{1/8}} v \frac{q}{S} d\Omega$ med $v = N_1$; valen

$v = N_2$ och $v = N_3$ är inte giltiga eftersom N_2 och N_3 inte satisfierar villkoret på Γ_g . Det väsentliga randvillkoret kräver också att $a_2 = a_3 = 0$, så vi får bara kvar

$$\int_{\Omega_{1/8}} (\nabla N_1)^T (\nabla N_1) d\Omega a_1 = \int_{\Omega_{1/8}} N_1 \frac{q}{S} d\Omega. \text{ Trivialt finner vi att } \nabla N_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ L \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ så vi har}$$

$$\frac{1}{L^2} \int_{\Omega_{1/8}} d\Omega a_1 = \frac{q}{S} \int_{\Omega_{1/8}} N_1 d\Omega. \text{ Integralen i vänsterledet är storleken på området, d.v.s } \frac{L^2}{2}, \text{ och integra-}$$

len i högerledet är volymen av en tetraeder med basytan $\Omega_{1/8}$ och höjden 1: $\frac{L^2}{2} \cdot \frac{1}{3}$. Alltså fås slut-

$$\text{ligen } \frac{a_1}{2} = \frac{qL^2}{6S}.$$