

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD (M3) — MHA 021

28 AUGUSTI 2002

Tid och plats:	14 ¹⁵ – 18 ¹⁵ i M-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505
Lösningar:	Anslås på anslagstavlan vid ingången till institutionens lokaler 29/8. Se även kursens www-sidor.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 9/9 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 11/9 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	10/9 13 ⁰⁰ – 15 ⁰⁰ i hållfasthetslabbet.

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta, kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid poängsättningen.
- Förklara/definiera införda beteckningar.
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

1

Betrakta randvärdesproblemet

$$-\frac{d}{dx}\left[k\frac{du}{dx}\right] + v_x \frac{du}{dx} = 0 \quad 0 < x < L$$

$$u(0) = u_0 \quad u(L) = 0$$

där $k > 0$, $v_x \neq 0$ och $u_0 \neq 0$ är givna konstanter.

a: Variations- och FE-formulera problemet med testfunktioner enligt Galerkin; (observera att andra termen i differentialekvationen inte ska partialintegreras). (3p)

b: Antag att man diskretiserar problemet med lineära element och betrakta ett element med noder vid $x = x_i$ samt $x = x_{i+1}$, där $0 < x_i < x_{i+1} \leq L$. Visa att elementstyvhetismatrisen

$$\text{blir } \mathbf{K}^e = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{v_x}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ där } h = x_{i+1} - x_i. \text{ (2p)}$$

2

Den svaga formen av ett plant elasticitetsproblem är: Bestäm $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}^T$, $u_x, u_y \in V$, så att

$$\int_{\Omega} \epsilon_v^T \sigma d\Omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{v}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v}_i \in V$$

om tjockleken t är konstant och det inte finns några volymslaster; i formuleringen är Ω det område på vilket problemet är formulerat, $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x & t_y \end{bmatrix}^T$ är tractionvektorn på randen Γ ,

$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T = \mathbf{D}\epsilon$ är spänningsvektorn, $\mathbf{D}$ en symmetrisk och positivt definit matris

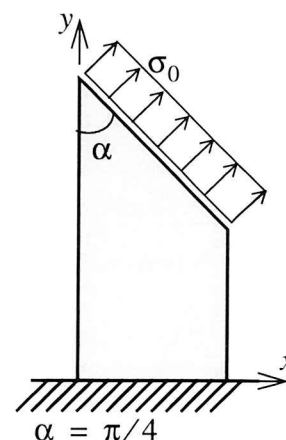
som ges av konstitutiva data, samt $\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T = \tilde{\nabla} \mathbf{u}$, där operatoren ges av

$$\tilde{\nabla}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Vidare har vi använt ε_v för att beteckna $\tilde{\nabla} \mathbf{v}$, där $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}^T$ är en vektor med testfunktioner.

a: Ange de randvillkor som gäller för problemet som illustreras i figuren. (1p)

b: Ange vilka krav som funktionerna i rummet V måste uppfylla. Finit-elementformulera problemet med testfunktioner enligt Galerkin — det ska klart framgå hur randvillkoren för problemet i figuren påverkar FE-formuleringen. Vilka krav måste ställas på basfunktionerna för att FE-metoden ska vara konform? (2p)



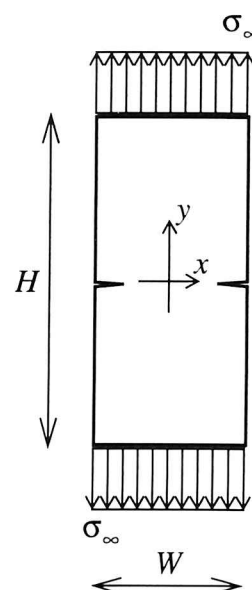
c: Antag att 8-nods Serendipityelement använts för att approximera lösningen till det illustrerade problemet, så att vi har en approximation $\mathbf{u}_h$ till det obekanta förskjutningsfältet $\mathbf{u}$.

Visa att felet $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ är energiortogonalt mot FE-rummet V_h (d v s visa Galerkin-ortogonalitet: $\mathbf{a}(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_i \in V_h$, där $\mathbf{a}(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \varepsilon_v^T \sigma_e d\Omega$ med ε_v enligt ovan och

$$\sigma_e = \mathbf{D} \tilde{\nabla} \mathbf{e}). \quad (2p)$$

3

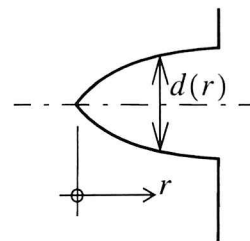
En tunn dubbelsymmetrisk plåtbit har ett par kantsprickor (inre öppningsvinklar 2π) och utsätts för dragning i y -led enligt figuren. Man önskar beräkna spänningstillståndet i komponenten genom att lösa elasticitetsekvationerna med finit-elementmetod. Plant spänningstillstånd antas och materialets elasticitetsmodul är E och Poissons tal är ν . Detaljens tjocklek är konstant och betecknas t .



a: Skissa ett lämpligt elementnät för den önskade spänningsberäkningen. Använd något eller några 10-tal element och beskriv med någon rad text varför du konstruerat elementnätet som du gjort. Samtliga randvillkor på samtliga del-ränder av den analyserade biten ska också framgå av lösningen. (3p)

b: Spänningsintensitetsfaktorn är proportionell mot spricköppningen

$d(r)$ och omvänt proportionell mot $\sqrt{r}$, där r är avståndet från sprickspetsen: $K_I \sim \frac{d(r)}{\sqrt{r}}$. Genom att approximera $d(r)$ med nod-



förskjutningarna enligt FE-beräkningen, kan man få en uppskattning av K_I . Vilket är troligast: att det uppskattade värdet på K_I är

högre eller lägre än ett analytiskt beräknat värde? Svaret ska motiveras! (1p)

4

a: Basfunktionerna för ett bi-lineärt element ges av

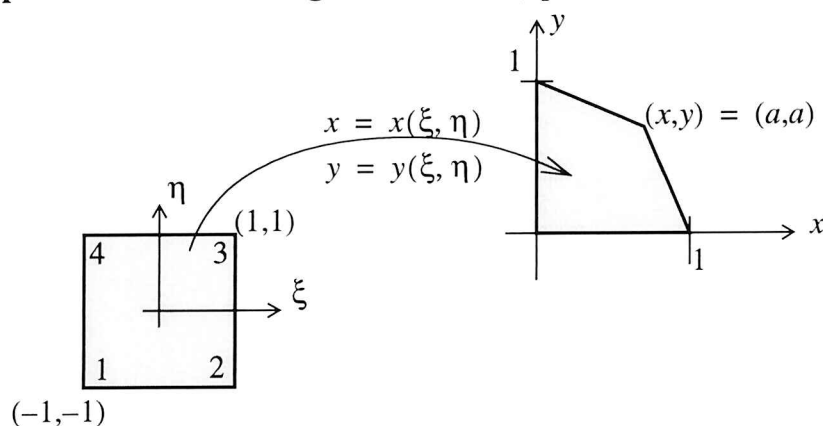
$$\begin{aligned} N_1^e &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & N_2^e &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3^e &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & N_4^e &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned}$$

i ett lokalt koordinatsystem (ξ, η) . Visa (härled) hur derivatorna $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$ och $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$ beräknas då

avbildningen $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ är isoparametrisk. (2p)

b: Beräkna, som funktion av 'läges-parametern' a , determinanten av avbildningens jacobian, för det isoparametriskt avbildade elementet i figuren nedan. För vilka värden på a är avbildningen entydig? (2p)

c: Hur många Gauss-punkter krävs för att exakt beräkna styvhetsmatrisen för ett **rektangulärt** bilineärt element för elasticitetsproblemet? Hur många Gauss-punkter krävs vid en **allmän isoparametrisk avbildning** av elementet? (2p)



TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD (M3) — MHA 021

28 AUGUSTI 2002

Tid och plats:	14 ¹⁵ – 18 ¹⁵ i M-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505
Lösningar:	Anslås på anslagstavlan vid ingången till institutionens lokaler 29/8. Se även kursens www-sidor.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Ansås senast 9/9 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygspeditionen senast 11/9 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	10/9 13 ⁰⁰ – 15 ⁰⁰ i hållfasthetslabor

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta, kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid poängsättningen.
- Förklara/definiera införda beteckningar.
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

1

Betrakta randvärdesproblemet

$$-\frac{d}{dx}\left[k\frac{du}{dx}\right] + v_x \frac{du}{dx} = 0 \quad 0 < x < L$$

$$u(0) = u_0 \quad u(L) = 0$$

där $k > 0$, $v_x \neq 0$ och $u_0 \neq 0$ är givna konstanter.

a: Variations- och FE-formulera problemet med testfunktioner enligt Galerkin; (observera att andra termen i differentialekvationen inte ska partialintegreras). (3p)

b: Antag att man diskretiserar problemet med lineära element och betrakta ett element med noder vid $x = x_i$ samt $x = x_{i+1}$, där $0 < x_i < x_{i+1} \leq L$. Visa att elementstyvhetismatrisen

$$\text{blir } \mathbf{K}^e = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{v_x}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ där } h = x_{i+1} - x_i. \text{ (2p)}$$

Lösning 1a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v(x)$ och integrera över

intervallet $0 < x < L$: $-\int_0^L \left(v \frac{d}{dx} \left[k \frac{du}{dx} \right] - v_x v \frac{du}{dx} \right) dx = 0$. Partialintegrera första termen:

$$\int_0^L \left(k \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} + v_x v \frac{du}{dx} \right) dx = \left[k v \frac{du}{dx} \right]_0^L$$

Eftersom $\frac{du}{dx}$ inte ges av randvillkoren, måste vi välja testfunktioner som uppfyller homogena väsentliga randvillkor, så att randtermen blir bestämd. Testfunktionerna måste vidare vara kvadratisk integrerbara och ha kvadratisk integrerbara förstaderivator; låt V_0 beteckna rummet av alla sådana funktioner, d v s

$$V_0 = \left\{ v(x): v(0) = v(L) = 0 \quad \int_0^L v^2 dx < \infty \quad \int_0^L \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\}$$

Låt vidare V vara rummet av alla funktioner som uppfyller givna väsentliga randvillkor, som är kvadratiskt integrerbara och har kvadratiskt integrerbara förstaderivator, d v s

$$V = \left\{ v(x): v(0) = u_0, v(L) = 0 \quad \int_0^L v^2 dx < \infty \quad \int_0^L \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\}$$

Den obekanta funktionen u tillhör uppenbarligen V . Vi får då variationsformuleringen:

$$\text{Bestäm } u \in V \text{ så att } \int_0^L k \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx + \int_0^L v_x v \frac{du}{dx} dx = 0 \quad \forall v \in V_0.$$

För att FE-formulera approximerar vi u med en lineärkombination av basfunktioner $N_i(x)$:

$u \approx u_h = \sum_i a_i N_i$. Låt vidare V_h vara rummet av alla funktioner som kan skrivas som en lineärkombination av de basfunktioner som är noll vid $x = 0$:

$$V_h = \left\{ v: v(x) = \sum_i v_i N_i(x) \quad v_i = 0 \text{ om } N_i(0) \neq 0 \right\}$$

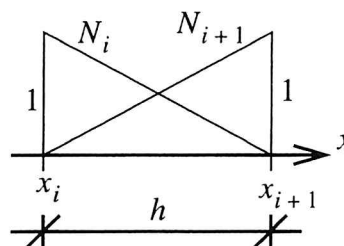
FE-formuleringen kan nu skrivas: Bestäm $u_h = \sum_i a_i N_i$, med nodvariabler a_i så att

$$u_h(0) = u_0, \text{ så att } \int_0^L k \frac{dv}{dx} \frac{du_h}{dx} dx + \int_0^L v_x v \frac{du_h}{dx} dx = 0 \quad \forall v \in V_h.$$

Lösning 1b: Från figuren över elementet ser vi omedel-

bart att $\frac{dN_i}{dx} = \frac{-1}{h}$, $\frac{dN_{i+1}}{dx} = \frac{1}{h}$ och

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i+1} dx = 1 \cdot h \cdot \frac{1}{2} = \frac{h}{2}. \text{ På elementet}$$



$$\text{har vi approximationen } u \approx u_h = a_i N_i + a_{i+1} N_{i+1} = \begin{bmatrix} N_i & N_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & N_{i+1} \end{bmatrix} \mathbf{a},$$

som vi sätter in i FE-formuleringens vänsterled:

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} k \frac{dv}{dx} \left[\frac{dN_i}{dx} \frac{dN_{i+1}}{dx} \right] dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_x v \left[\frac{dN_i}{dx} \frac{dN_{i+1}}{dx} \right] dx \right\} \mathbf{a} = \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} k \frac{dv}{dx} \left[\frac{-1}{h} \frac{1}{h} \right] dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_x v \left[\frac{-1}{h} \frac{1}{h} \right] dx \right\} \mathbf{a}$$

Vi väljer nu testfunktioner enligt Galerkin, dvs $v = N_i$ och $v = N_{i+1}$; dessa val samlas i en kolumnvektor och sätts in i FE-formuleringens vänsterled. Vi får då:

$$\left\{ k \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} \frac{-1}{h} \\ \frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} dx + v_x \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} dx \right\} \mathbf{a} = \mathbf{K}^e \mathbf{a}$$

Beräkna nu första termen i uttrycket för $\mathbf{K}^e$:

$$k \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} \frac{-1}{h} \\ \frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} dx = k \begin{bmatrix} \frac{1}{h^2} & \frac{-1}{h^2} \\ \frac{-1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = k \begin{bmatrix} \frac{1}{h^2} & \frac{-1}{h^2} \\ \frac{-1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} h = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Andra termen blir:

$$v_x \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} dx = v_x \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} = v_x \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \\ h \\ \frac{h}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} = \frac{v_x}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Sammantal-}$$

$$\text{get alltså: } \mathbf{K}^e = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{v_x}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2

Den svaga formen av ett plant elasticitetsproblem är: Bestäm $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}^T$, $u_x, u_y \in V$, så att

$$\int_{\Omega} \varepsilon_v^T \sigma d\Omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{v}^T t d\Gamma \quad \forall \mathbf{v}_i \in V$$

om tjockleken t är konstant och det inte finns några volymslaster; i formuleringen är Ω det

område på vilket problemet är formulerat, $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x & t_y \end{bmatrix}^T$ är tractionvektorn på randen Γ ,

$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T = \mathbf{D}\varepsilon$ är spänningsvektorn, $\mathbf{D}$ en symmetrisk och positivt definit matris

som ges av konstitutiva data, samt $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T = \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{u}$, där operatoren ges av

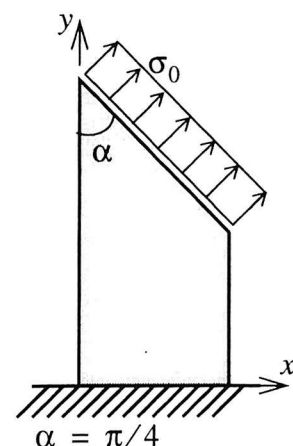
$$\tilde{\mathbf{V}}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Vidare har vi använt ε_v för att beteckna $\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{v}$, där $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}^T$ är en vektor med testfunktioner.

a: Ange de randvillkor som gäller för problemet som illustreras i figuren. (1p)

b: Ange vilka krav som funktionerna i rummet V måste uppfylla.

Finit-elementformulera problemet med testfunktioner enligt Galerkin — det ska klart framgå hur randvillkoren för problemet i figuren påverkar FE-formuleringen. Vilka krav måste ställas på basfunktionerna för att FE-metoden ska vara konform? (2p)



c: Antag att 8-nods Serendipityelement använts för att approximera lösningen till det illustrerade problemet, så att vi har en approximation $\mathbf{u}_h$ till det obekanta förskjutningsfältet $\mathbf{u}$.

Visa att felet $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ är energiortogonalt mot FE-rummet V_h (d v s visa Galerkin-orto-

gonalitet: $a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_i \in V_h$, där $a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \epsilon_v^T \sigma_e d\Omega$ med ϵ_v enligt ovan och

$$\sigma_e = D \tilde{\nabla} \mathbf{e}. \quad (2p)$$

Lösning 2a: Problemet beskrivs av 2 st andra ordningens differential-
ekvationer $\Rightarrow$ det behövs 2 randvillkor på varje del av randen.

Med referens till beteckningarna i figuren här brevid, har vi på delran-
den Γ_1 de väsentliga villkoren:

$$\begin{cases} u_x = 0 \\ u_y = 0 \end{cases}.$$

På Γ_2 har vi homogena naturliga randvillkor: $\begin{cases} t_x = 0 \\ t_y = 0 \end{cases}$

medan tractionvektorns komponenter på Γ_3 är $t_x = t_y = \sigma_0/\sqrt{2}$ ($t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y$,

$t_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y$), så vi har det inhomogena naturliga randvillkoren: $\begin{cases} t_x = \sigma_0/\sqrt{2} \\ t_y = \sigma_0/\sqrt{2} \end{cases}$.

Lösning 2b: Funktionerna i V uppfyller väsentliga randvillkor, är kvadratisk integrerbara och
har kvadratisk integrerbara förstaderivator.

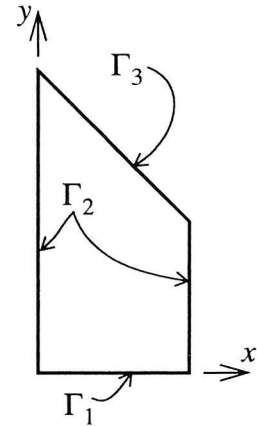
För att få FE-formuleringen approximerar vi först $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \begin{bmatrix} u_{hx} & u_{hy} \end{bmatrix}^T = \mathbf{N} \mathbf{a}$, där

$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_N & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_N \end{bmatrix}$ är en matris med basfunktioner och

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{y1} & u_{x2} & u_{y2} & \dots & u_{xN} & u_{yN} \end{bmatrix}^T$ är en vektor med nodvariabler. Låt V_h vara rummet av

alla funktioner som kan skrivas som en lineärkombination av de valda basfunktionerna N_i .

FE-metoden är konform om basfunktionerna väljs ur V (d v s man har då $V_h \subset V$).



Vi väljer nu testfunktioner enligt Galerkin: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} N_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ N_N \end{bmatrix}$.

Betrakta nu randintegralen i högerledet: vi har att $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ på Γ_1 (även i FE-formuleringen om

metoden är konform), $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ på Γ_2 samt $\mathbf{t} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ på Γ_3 . Vi har alltså:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v}^T \mathbf{t} d\Gamma = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \int_{\Gamma_3} (v_x + v_y) d\Gamma$$

Med $\varepsilon_v = \tilde{\nabla} \mathbf{v}$ och $\sigma = \mathbf{D}(\tilde{\nabla} \mathbf{u}) \approx \mathbf{D}(\tilde{\nabla} \mathbf{u}_h)$ blir alltså FE-formuleringen: Bestäm

$\mathbf{u}_h = \begin{bmatrix} u_{hx} & u_{hy} \end{bmatrix}^T$, $u_{hx}, u_{hy} \in V_h$, så att

$$\int_{\Omega} (\tilde{\nabla} \mathbf{v})^T \mathbf{D}(\tilde{\nabla} \mathbf{u}_h) d\Omega = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \int_{\Gamma_3} (v_x + v_y) d\Gamma \quad \forall v_x, v_y \in V_h$$

Lösning 2c: Med införda beteckningar har vi $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\tilde{\nabla} \mathbf{v})^T \mathbf{D} \tilde{\nabla} \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_v^T \sigma d\Omega$ och

det inses trivialt att $a(\cdot, \cdot)$ är linjär i båda argumenten eftersom operatoren $\tilde{\nabla}$ är linjär. Ekvationen i variationsformuleringen kan då skrivas

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \int_{\Gamma_3} (v_x + v_y) d\Gamma \quad \forall v_x, v_y \in V \quad (1)$$

i enlighet med uppgiftstexten och lösningen till uppgift b. Vidare kan ekvationen i FE-formuleringen skrivas

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \int_{\Gamma_3} (v_x + v_y) d\Gamma \quad \forall v_x, v_y \in V_h \quad (2)$$

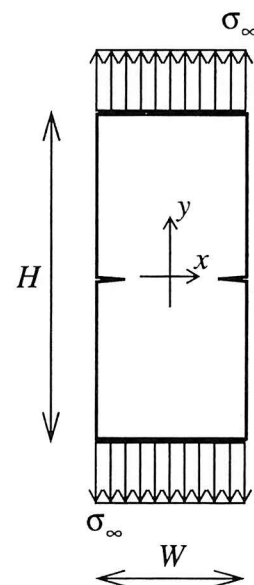
Om vi nu subtraherar ekv (2) från ekv (1) får vi $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall v_x, v_y \in V_h$;

eftersom $a(\cdot, \cdot)$ är linjär i första argumentet har vi att $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v})$, där

$\mathbf{u} - \mathbf{u}_h = \mathbf{e}$ är felet. Således: $a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall v_x, v_y \in V_h$, vilket skulle visas.

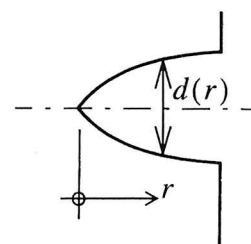
3

En tunn dubbelsymmetrisk plåtbit har ett par kantsprickor (inre öppningsvinklar 2π) och utsätts för dragning i y -led enligt figuren. Man önskar beräkna spänningstillståndet i komponenten genom att lösa elasticitetsekvationerna med finit-elementmetod. Plant spänningstillstånd antas och materialets elasticitetsmodul är E och Poissons tal är ν . Detaljens tjocklek är konstant och betecknas t .



a: Skissa ett lämpligt elementnät för den önskade spänningsberäkningen. Använd något eller några 10-tal element och beskriv med någon rad text varför du konstruerat elementnätet som du gjort. Samtliga randvillkor på samtliga del-ränder av den analyserade biten ska också framgå av lösningen. (3p)

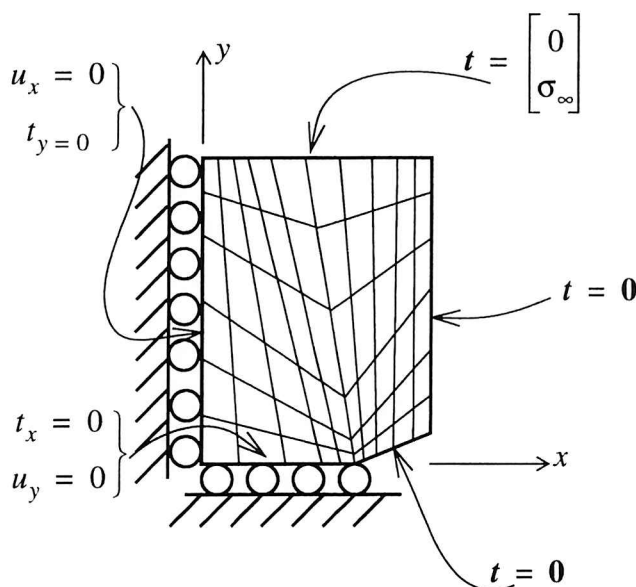
b: Spänningsintensitetsfaktorn är proportionell mot spricköppningen $d(r)$ och omvänt proportionell mot $\sqrt{r}$, där r är avståndet från sprickspetsen: $K_I \sim \frac{d(r)}{\sqrt{r}}$. Genom att approximera $d(r)$ med nodförskjutningarna enligt FE-beräkningen, kan man få en uppskattning av K_I . Vilket är troligast: att det uppskattade värdet på K_I är högre eller lägre än ett analytiskt beräknat värde? Svaret ska motiveras! (1p)



Lösning 3a: Utnyttja symmetrin och

diskretisera 1/4-del av skivan, så att bästa möjliga approximation kan fås för ett givet antal frihetsgrader. Elementstorleken görs mindre kring sprickspetsen, eftersom man har en spänningskoncentration (singulariteten i exakta lösningen) här.

Randvillkor: Problemet beskrivs av 2 stycken 2a ordningens differentialekvationer, så det krävs 2 villkor på varje del



av randen. Låt $t_x = n_x \sigma_x + n_y \sigma_{xy}$ och $t_y = n_x \sigma_{xy} + n_y \sigma_y$ beteckna komponenterna av tractionvektorn (kraft/yta). På de fria obelastade ränderna gäller att normalspänningen (σ_x eller σ_y) och tangentialspänningen (här lika med σ_{xy}) är noll, så man får villkoren $\mathbf{t} = \mathbf{0}$. På den belastade randen gäller $\sigma_y = \sigma_\infty$, $\sigma_{xy} = 0$, $n_x = 0$ och $n_y = 1$, så här fås $t_x = 0$ samt $t_y = \sigma_\infty$. På symmetriränderna gäller att förskjutningen vinkelrätt mot randen ska vara noll samt att skjuvspänningen längs randen ska vara noll; detta leder till de villkor som anges i figuren.

Lösning 3b: En konform FE-modell är styvare än det kontinuerliga problemet, så de beräknade förskjutningarna blir 'i genomsnitt' för små. Man måste då förvänta sig att spricköppningen $d(r)$ enligt FE-lösningen blir underskattad, vilket leder till ett för lågt värde på spänningsintensitetsfaktorn.

4

a: Basfunktionerna för ett bi-lineärt element ges av

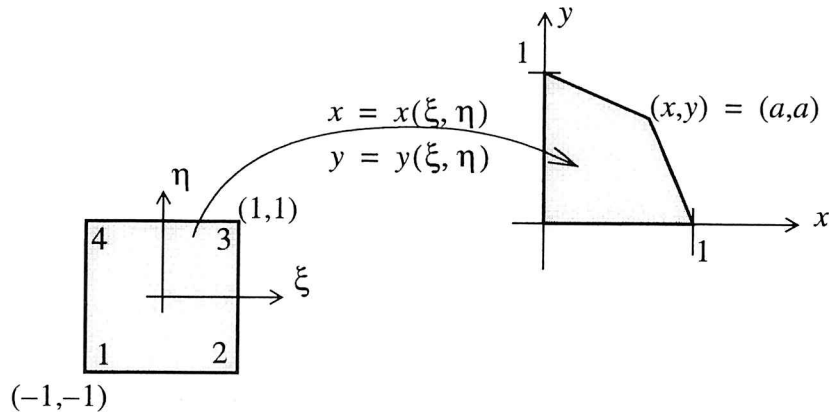
$$\begin{aligned} N_1^e &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) & N_2^e &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3^e &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) & N_4^e &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned}$$

i ett lokalt koordinatsystem (ξ, η) . Visa (härled) hur derivatorna $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$ och $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$ beräknas då

avbildningen $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ är isoparametrisk. (2p)

b: Beräkna, som funktion av 'läges-parametern' a , determinanten av avbildningens jacobian, för det isoparametriskt avbildade elementet i figuren nedan. För vilka värden på a är avbildningen entydig? (2p)

c: Hur många Gauss-punkter krävs för att exakt beräkna styvhetsmatrisen för ett **rektangulärt** bilineärt element för elasticitetsproblemet? Hur många Gauss-punkter krävs vid en **allmän isoparametrisk avbildning** av elementet? (2p)



Lösning 4a:

Använd kedjeregeln:
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{aligned} \right\} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} \text{ där då } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \text{ (i Otto-}$$

sen&Petersson kallad $\mathbf{J}^T$). De sökta derivatorna fås sedan som

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Komponenterna i $\mathbf{J}$ beräknas enkelt genom $\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_i x_i N_i^e = \sum_i x_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}$, etc; (x_i, y_i) är

koordinaten för nod i på elementet.

Lösning 4b: Numrera noderna moturs; om vi börjar med noden i origo, fås $(x_1, y_1) = (0, 0)$,

$(x_2, y_2) = (1, 0)$, $(x_3, y_3) = (a, a)$, och $(x_4, y_4) = (0, 1)$. Man får då

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_2^e}{\partial \xi} + a \frac{\partial N_3^e}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 - \eta + a + a\eta) & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(-1 - \xi + a + a\xi) \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(-1 - \eta + a + a\eta) & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1 - \xi + a + a\xi)\end{aligned}$$

varvid $\det \mathbf{J} = \frac{\partial x \partial y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial x \partial y}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{1}{8}(2a - \xi - \eta + a\xi + a\eta)$.

Avbildningen är entydig om $\mathbf{J}$ är inverterbar, dvs. om $\det \mathbf{J} \neq 0$ inom elementet. Detta är uppenbarligen fallet om a är tillräckligt stort; koordinaterna ξ och η kan ju bara variera mellan -1 och 1 . Då a minskar, blir $\det \mathbf{J}$ noll vid $(x, y) = (a, a)$ först — dvs. vid $(\xi, \eta) = (1, 1)$ med vårt val av nodnumrering.

$$\det \mathbf{J}(1, 1) > 0 \Rightarrow 2a - 1 - 1 + a + a > 0 \Rightarrow a > \frac{1}{2}$$

Alltså: avbildningen är entydig endast om $a > \frac{1}{2}$.

Lösning 4c: För att beräkna styvhetsmatrisen till ett rektangulärt bilineärt element, måste man integrera produkter av förstaderivator till basfunktionerna. Förstaderivatorna är lineära i en koordinat och konstant i den andra, så kvadratiska polynom ska integreras. Det krävs alltså 2×2 Gausspunkter för exakt integration.

Vid en isoparametrisk avbildning, integrerar vi över ett moderelement. För att beräkna derivatorna med avseende på de verkliga koordinaterna, måste man då ställa upp och invertera en Jacobian (se lösningen till uppgift a ovan) — detta involverar att vi dividerar med Jacobianens determinant som, vid en allmän avbildning blir ett polynom (se lösningen till uppgift b ovan). För att ställa upp elementstyvhetsmatrisen måste vi alltså integrera rationella funktioner, vilket inte kan göras exakt med Gausskvadratur.

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD (M3) — MHA 021

14 MARS 2002

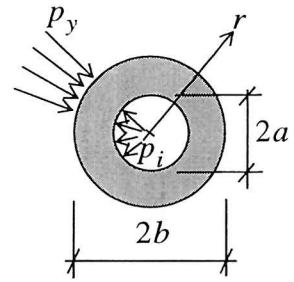
Tid och plats:	8 ⁴⁵ – 12 ⁴⁵ i M-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505
Lösningar:	Anslås på anslagstavlan vid ingången till institutionens lokaler senast 15/3. Se även kursens www-sidor på http://www.am.chalmers.se/sve/valkommen.html — följ länken Utbildning/Grundutbildning.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 21/3 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 28/3 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	22/3 10 ⁰⁰ – 11 ⁰⁰ i hållfasthetslabbet.

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta, kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid poängsättningen.
- Förklara/definiera införda beteckningar.
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

1

Betrakta ett tjockväggigt rör med radien b och hålets radie a . Om röret är belastat med ett inre tryck p_i och ett yttre tryck p_y , och om plant spänningstillstånd antas, så kan den radiella förskjutningen u beräknas genom att lösa randvärdesproblemet



$$\begin{cases} -\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}[ru]\right] = 0 \\ \sigma_r(a) = -p_i \\ \sigma_r(b) = -p_y \end{cases}$$

När u är känd, kan radiella och tangentiella spänningar beräknas som

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) \quad \sigma_\phi = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right)$$

a: Låt $v = v(r)$ vara en testfunktion (viktsfunktion) och visa att den svaga formen av randvärdesproblemet kan skrivas

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\nu^2} \int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr}[vr] \frac{d}{dr}[ur] dr - \frac{E}{1+\nu} [v(b)u(b) - v(a)u(a)] &= \\ &= av(a)p_i - bv(b)p_y \end{aligned} \quad (2p)$$

b: Antag att problemet FE-diskretiseras med lineära element så att $u \approx u_h = N_1^e a_1^e + N_2^e a_2^e$ på ett element, samt att testfunktionerna väljs enligt Galerkin. Visa att elementstyvhetsmatrisen för ett element med nodkoordinater r_j och r_{j+1} blir

$$\begin{aligned} K^e &= \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \begin{bmatrix} \frac{(N_1^e)^2}{r} + 2N_1^e \frac{dN_1^e}{dr} + r \left(\frac{dN_1^e}{dr} \right)^2 & \frac{N_1^e N_2^e}{r} + N_1^e \frac{dN_2^e}{dr} + N_2^e \frac{dN_1^e}{dr} + r \frac{dN_1^e}{dr} \frac{dN_2^e}{dr} \\ \frac{N_1^e N_2^e}{r} + N_1^e \frac{dN_2^e}{dr} + N_2^e \frac{dN_1^e}{dr} + r \frac{dN_1^e}{dr} \frac{dN_2^e}{dr} & \frac{(N_2^e)^2}{r} + 2N_2^e \frac{dN_2^e}{dr} + r \left(\frac{dN_2^e}{dr} \right)^2 \end{bmatrix} dr \end{aligned}$$

om $a < r_j < r_{j+1} < b$. (2p)

- c: Ge en fysikalisk förklaring till varför styvhetsmatrisen $\mathbf{K}$ (för det givna randvärdesproblemet) blir positivt definit, trots att det inte finns några väsentliga randvillkor. (1p)
-

2

Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{i } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{på } \Gamma_g \\ (\nabla u)^T \mathbf{n} = h & \text{på } \Gamma_h \end{cases}$$

där $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ är Laplace-operatorn ($\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$), $\mathbf{n}$ en utåtriktad normalvektor

($|\mathbf{n}| = 1$) till området Ω , samt f och h är givna funktioner.

- a: Använd Gauss-Greens teorem, $\int_{\Omega} v \operatorname{div} \mathbf{q} d\Omega = \oint_{\Gamma} v \mathbf{q}^T \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla v)^T \mathbf{q} d\Omega$, för att variations-

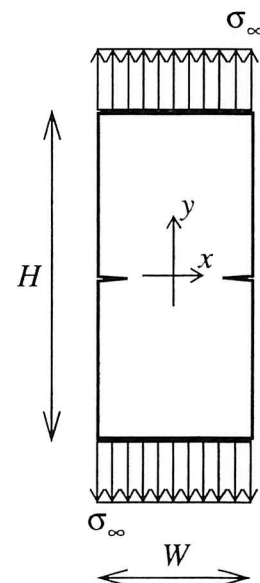
formulera problemet. Det ska klart framgå hur randvillkoren kommer in i formuleringen.

Ange också regularitetskrav på de ingående funktionerna. Finit-elementformulera sedan problemet — visa speciellt $\mathbf{B}$ -matrisens utseende. (3p)

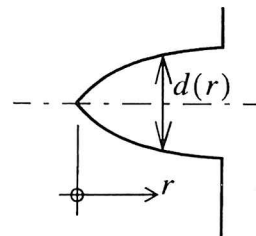
- b: Vilka villkor måste FE-ansatsen uppfylla för att approximationen u_h säkert ska konvergera mot den exakta lösningen u ? (1p)
- c: Visa att styvhetsmatrisen $\mathbf{K}$ blir singular om de väsentliga randvillkoren inte tas med i problemet ovan. (1p)

3

En tunn dubbelsymmetrisk plåtbit har ett par kantsprickor (inre öppningsvinklar 2π) och utsätts för dragning i y -led enligt figuren. Man önskar beräkna spänningstillståndet i komponenten genom att lösa elasticitetsekvationerna med finit-elementmetod. Plant spänningstillstånd antas och materialets elasticitetsmodul är E och Poissons tal är ν . Detaljens tjocklek är konstant och betecknas t .

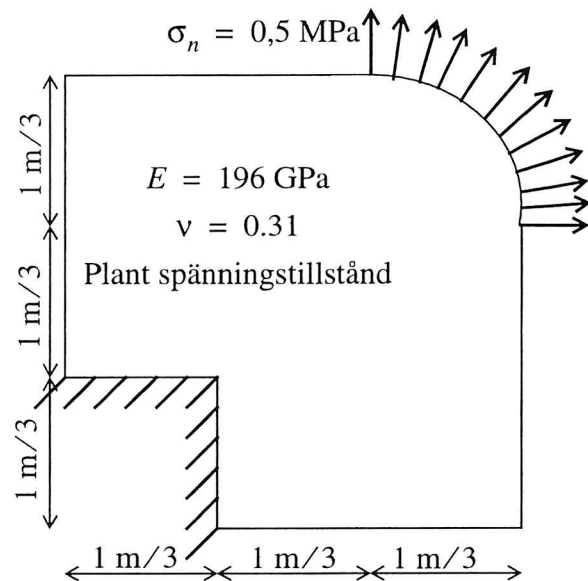


- a: Skissa ett lämpligt elementnät för den önskade spänningsberäkningen. Använd något eller några 10-tal element och beskriv med någon rad text varför du konstruerat elementnätet som du gjort. Samtliga randvillkor på samtliga del-ränder av den analyserade biten ska också framgå av lösningen. (3p)
- b: Antag att det ekvationssystem $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$ som FE-modellen ger upphov till, ska lösas med en direkt metod (d v s genom att faktorisera styvhetsmatrisen). Beskriv i ord hur nodvariablerna bäst bör numreras med hänsyn till beräkningsarbetet. (1p)
- c: Spänningsintensitetsfaktorn är proportionell mot spricköppningen $d(r)$ och omvänt proportionell mot $\sqrt{r}$, där r är avståndet från sprickspetsen: $K_I \sim \frac{d(r)}{\sqrt{r}}$. Genom att approximera $d(r)$ med nodförskjutningarna enligt FE-beräkningen, kan man få en uppskattning av K_I . Vilket är troligast: att det uppskattade värdet på K_I är högre eller lägre än ett analytiskt beräknat värde? Svaret ska motiveras! (1p)



4

Figuren visar ett 2D elasticitetsproblem vars lösning man vill approximera med en konform finit- elementmetod. Antag att man utgår från en ganska grov diskretisering med lineära 3-nods element (CST element) och använder en adaptiv h -metod för att approximera lösningen.



- Redogör för vad som menas med adaptivitet och förklara vad h -metod betyder. (2p)
- I vilket eller vilka områden förväntar du dig att ett adaptivt FE-programmet ska generera de till storleken minsta elementen? Motivera svaret. (1p)
- En konform FE-diskretisering av problemet leder till ekvationssystemet $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$, där styvhetsmatrisen $\mathbf{K}$ är symmetrisk och positivt definit. Visa att lösningen $\mathbf{a} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$ minimerar den potentiella energin $\Pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{K}\mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{f}$, d v s visa att $\Pi(\mathbf{a}) \leq \Pi(\mathbf{v})$, med $\Pi(\mathbf{a}) = \Pi(\mathbf{v})$ endast om $\mathbf{a} \equiv \mathbf{v}$. (2p)

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD (M3) — MHA 021

14 MARS 2002

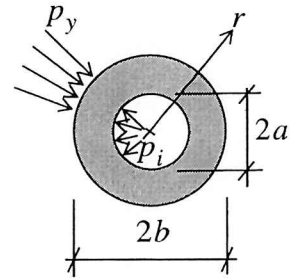
Tid och plats:	8 ⁴⁵ – 12 ⁴⁵ i M-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505
Lösningar:	Anslås på anslagstavlan vid ingången till institutionens lokaler senast 15/3. Se även kursens www-sidor på http://www.am.chalmers.se/sve/valkommen.html — följ länken Utbildning/Grundutbildning.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslogs senast 21/3 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditören senast 28/3 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	22/3 10 ⁰⁰ – 11 ⁰⁰ i hållfasthetslaboratoriet

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta, kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid poängsättningen.
- Förklara/definiera införda beteckningar.
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

1

Betrakta ett tjockväggigt rör med radien b och hållets radie a . Om röret är belastat med ett inre tryck p_i och ett yttre tryck p_y , och om plant spänningstillstånd antas, så kan den radiella förskjutningen u beräknas genom att lösa randvärdesproblemet



$$\begin{cases} -\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}[ru]\right] = 0 \\ \sigma_r(a) = -p_i \\ \sigma_r(b) = -p_y \end{cases}$$

När u är känd, kan radiella och tangentiella spänningar beräknas som

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) \quad \sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right)$$

a: Låt $v = v(r)$ vara en testfunktion (viktsfunktion) och visa att den svaga formen av randvärdesproblemet kan skrivas

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\nu^2} \int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr}[vr] \frac{d}{dr}[ur] dr - \frac{E}{1+\nu} [v(b)u(b) - v(a)u(a)] &= \\ &= av(a)p_i - bv(b)p_y \end{aligned} \quad (2p)$$

b: Antag att problemet FE-diskretiseras med lineära element så att $u \approx u_h = N_1^e a_1^e + N_2^e a_2^e$ på ett element, samt att testfunktionerna väljs enligt Galerkin. Visa att elementstyvhetsmatrisen för ett element med nodkoordinater r_j och r_{j+1} blir

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \begin{bmatrix} \frac{(N_1^e)^2}{r} + 2N_1^e \frac{dN_1^e}{dr} + r \left(\frac{dN_1^e}{dr} \right)^2 & \frac{N_1^e N_2^e}{r} + N_1^e \frac{dN_2^e}{dr} + N_2^e \frac{dN_1^e}{dr} + r \frac{dN_1^e}{dr} \frac{dN_2^e}{dr} \\ \frac{N_1^e N_2^e}{r} + N_1^e \frac{dN_2^e}{dr} + N_2^e \frac{dN_1^e}{dr} + r \frac{dN_1^e}{dr} \frac{dN_2^e}{dr} & \frac{(N_2^e)^2}{r} + 2N_2^e \frac{dN_2^e}{dr} + r \left(\frac{dN_2^e}{dr} \right)^2 \end{bmatrix} dr \end{aligned}$$

om $a < r_j < r_{j+1} < b$. (2p)

c: Ge en fysikalisk förklaring till varför styvhetsmatrisen $\mathbf{K}$ (för det givna randvärdesproblemet) blir positivt definit, trots att det inte finns några väsentliga randvillkor. (1p)

Lösning a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v(r)$ och integrera över

$$\text{ytan: } -\int_a^b \left(\int_0^{2\pi} v \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [ru] \right] r d\theta \right) dr = 0 \Rightarrow -2\pi \int_a^b v \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [ru] \right] r dr = 0. \text{ Partialintegrera:}$$

$$\int_a^b (vr) \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [ru] \right] dr = \left[v \frac{d}{dr} [ru] \right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rv] \frac{d}{dr} [ru] dr. \text{ Utveckla nu randtermen:}$$

$$\begin{aligned} \left[v \frac{d}{dr} [ru] \right]_a^b &= \left[v \left(u + r \frac{du}{dr} \right) \right]_a^b = \left[vr \left(\frac{u}{r} + \frac{du}{dr} \right) \right]_a^b = \left[vr \left(v \frac{u}{r} + \frac{du}{dr} + (1-v) \frac{u}{r} \right) \right]_a^b = \\ &= \frac{1-v^2}{E} \left[vr \frac{E}{1-v^2} \left(v \frac{u}{r} + \frac{du}{dr} + (1-v) \frac{u}{r} \right) \right]_a^b = \frac{1-v^2}{E} \left[vr \left(\sigma_r + \frac{E}{(1+v)r} u \right) \right]_a^b = \\ &= \frac{1-v^2}{E} \left[bv(b) \sigma_r(b) + \frac{E}{(1+v)} u(b)v(b) - av(a) \sigma_r(a) - \frac{E}{(1+v)} u(a)v(a) \right] = \\ &= \left(\frac{1-v^2}{E} \left[av(a) p_i - bv(b) p_y + \frac{E}{(1+v)} (u(b)v(b) - u(a)v(a)) \right] \right) \end{aligned}$$

Vi har alltså $\int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rv] \frac{d}{dr} [ru] dr - \left[v \frac{d}{dr} [ru] \right]_a^b = 0$, vilket efter utveckling av randtermen och

multiplikation med $\frac{E}{1-v^2}$ ger

$$\frac{E}{1-v^2} \int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rv] \frac{d}{dr} [ru] dr - \frac{E}{1+v} (u(b)v(b) - u(a)v(a)) = av(a) p_i - bv(b) p_y$$

Lösning b: Låt $\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N_1^e & N_2^e \end{bmatrix}$ och $\mathbf{a}^e = \begin{bmatrix} a_1^e & a_2^e \end{bmatrix}^T$, så att $u_h = \mathbf{N}^e \mathbf{a}^e$ på elementet. Sätt in

detta i variationsformuleringen och välj viktsfunktion enligt Galerkin, dvs $v = N_1^e$ och

$v = N_2^e$. Samla de två valen i en kolumnvektor; då fås:

$$\frac{E}{1-\nu^2} \int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r(N^e)^T] \frac{d}{dr} [r(N^e a^e)] dr = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r(N^e)^T] \frac{d}{dr} [r(N^e)] dr a^e = K^e a^e. \quad \forall i$$

har att $\frac{d}{dr} [r(N^e)] = N^e + r \frac{dN^e}{dr} = \left[N_1^e + r \frac{dN_1^e}{dr} \quad N_2^e + r \frac{dN_2^e}{dr} \right]$ samt på samma sätt att

$$\frac{d}{dr} [r(N^e)^T] = (N^e)^T + r \frac{d(N^e)^T}{dr} = \left[N_1^e + r \frac{dN_1^e}{dr} \quad N_2^e + r \frac{dN_2^e}{dr} \right]^T. \quad \text{Integranden blir alltså:}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r(N^e)^T] \frac{d}{dr} [r(N^e)] &= \frac{1}{r} \left[N_1^e + r \frac{dN_1^e}{dr} \quad N_2^e + r \frac{dN_2^e}{dr} \right]^T \left[N_1^e + r \frac{dN_1^e}{dr} \quad N_2^e + r \frac{dN_2^e}{dr} \right] = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(N_1^e)^2}{r} + 2N_1^e \frac{dN_1^e}{dr} + r \left(\frac{dN_1^e}{dr} \right)^2 & \frac{N_1^e N_2^e}{r} + N_1^e \frac{dN_2^e}{dr} + N_2^e \frac{dN_1^e}{dr} + r \frac{dN_1^e}{dr} \frac{dN_2^e}{dr} \\ \frac{N_1^e N_2^e}{r} + N_1^e \frac{dN_2^e}{dr} + N_2^e \frac{dN_1^e}{dr} + r \frac{dN_1^e}{dr} \frac{dN_2^e}{dr} & \frac{(N_2^e)^2}{r} + 2N_2^e \frac{dN_2^e}{dr} + r \left(\frac{dN_2^e}{dr} \right)^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

varur resultatet följer.

Lösning c: Problemet är rotationssymmetriskt så det finns inte med några stelkroppsförskjutningar. I textuttrycken för spänningarna finns det med en term u/r , så även i ett fall då $u = c$ (konstant) uppträder spänningar och därmed deformationer.

2

Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{i } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{på } \Gamma_g \\ (\nabla u)^T \mathbf{n} = h & \text{på } \Gamma_h \end{cases}$$

där $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ är Laplace-operatorn ($\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$), $\mathbf{n}$ en utåtriktad normalvektor

($|\mathbf{n}| = 1$) till området Ω , samt f och h är givna funktioner.

a: Använd Gauss–Greens teorem, $\int_{\Omega} v \operatorname{div} \mathbf{q} d\Omega = \oint_{\Gamma} v \mathbf{q}^T \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla v)^T \mathbf{q} d\Omega$, för att variations-

formulera problemet. Det ska klart framgå hur randvillkoren kommer in i formuleringen.

Ange också regularitetskrav på de ingående funktionerna. Finit–elementformulera sedan

problemet — visa speciellt $\mathbf{B}$ –matrisens utseende. (3p)

b: Vilka villkor måste FE–ansatsen uppfylla för att approximationen u_h säkert ska konvergera mot den exakta lösningen u ? (1p)

c: Visa att styvhetsmatrisen $\mathbf{K}$ blir singulär om de väsentliga randvillkoren inte tas med i problemet ovan. (1p)

Lösning a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v = v(x, y)$ och integrera

över området: $-\int_{\Omega} v(\Delta u) d\Omega = \int_{\Omega} v f d\Omega$. Låt $\mathbf{q} = \nabla u$, så att $\Delta u = \operatorname{div} \mathbf{q}$ och använd Gauss–

Greens teorem på vänsterledet; då fås $\int_{\Omega} (\nabla v)^T (\nabla u) d\Omega = \oint_{\Gamma} v (\nabla u)^T \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} v f d\Omega$.

På den del av randen där $(\nabla u)^T \mathbf{n}$ är given (naturligt randvillkor) kan randintegralen beräknas då v valts, men på Γ_g (där $u = 0$) är $(\nabla u)^T \mathbf{n}$ obekant; vi måste därför välja v så att $v = 0$ på Γ_g . Vidare måste vi kräva att $u = 0$ på Γ_g för att ta hänsyn även till det väsentliga randvillkoret.

För att integralerna ska kunna beräknas måste funktionerna vara kvadratisk integrerbara och ha kvadratisk integrerbara första derivator (regularitetskrav). Om vi definierar funktionsrummet

$$V = \left\{ v = v(x, y) : v = 0 \text{ på } \Gamma_g, \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty, \int_{\Omega} (\nabla v)^T (\nabla v) d\Omega < \infty \right\}, \text{ så kan variationsproblemet alltså formuleras:}$$

Bestäm $u \in V$ så att

$$\int_{\Omega} (\nabla v)^T (\nabla u) d\Omega = \int_{\Gamma_h} v h d\Gamma + \int_{\Omega} v f d\Omega \quad \forall v \in V$$

Finit-elementformulering: Approximera u med $u_h = N\mathbf{a}$, där $N = [N_1 \dots N_n]$ är n bas-

funktioner valda ur V ($N_i \in V$) och $\mathbf{a} = [a_1 \dots a_n]^T$ är (obekanta) nodvariabler. Basfunktionerna är en bas för FE-rummet V_h :

$$V_h = \left\{ v = v(x, y) : v = \sum_{i=1}^n v_i N_i \right\}. \text{ Man har att } V_h \subset V$$

eftersom $N_i \in V$. Sätt in approximationen u_h i variationsproblemet och låt likheten vara uppfyllad för valen $v = N_i, i = 1, \dots, n$ (Galerkins metod); variationsekvationen blir då satisfierad för alla $v \in V_h$. Vi får alltså FE-formuleringen

Bestäm $u_h \in V_h$ så att

$$\int_{\Omega} (\nabla v)^T (\nabla u_h) d\Omega = \int_{\Gamma_h} v h d\Gamma + \int_{\Omega} v f d\Omega \quad \forall v \in V_h$$

Vi sätter nu in $u_h = N\mathbf{a}$ och samlar de n valen av testfunktion i en vektor:

$$\left(\int_{\Omega} (\nabla N)^T (\nabla N) d\Omega \right) \mathbf{a} = \int_{\Gamma_h} N^T h d\Gamma + \int_{\Omega} N^T f d\Omega \text{ eller } \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}, \text{ där}$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Gamma_h} N^T h d\Gamma + \int_{\Omega} N^T f d\Omega \text{ och } \mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla N)^T (\nabla N) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\Omega. \text{ Alltså har man:}$$

$$\mathbf{B} = \nabla N = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} [N_1 \dots N_n] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Lösning b: För att konvergens säkert ska fås, måste FE-approximationen vara konform, dvs komplett och kompatibel. Elementen är kompletta om man kan välja nodvariabler så att u_h blir konstant (över elementen) samt välja nodvariabler så att första derivatorna (av u_h) blir konstanta. Elementen är kompatibla om u_h är kontinuerlig över elementgränserna.

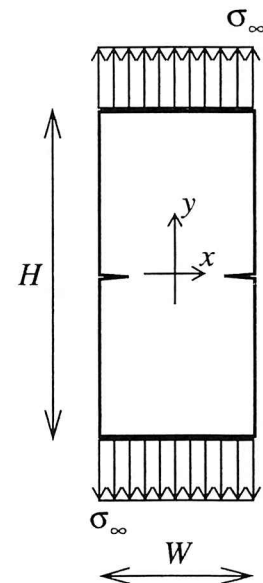
Lösning c: Eftersom vi har att $u_h = 0$ på Γ_g så gäller att om $u_h = c$ (konstant), så måste $u_h \equiv 0$ i Ω (dvs att om u_h är en konstant, så måste konstanten vara noll, pga det väsentliga randvillkoret). Om randvillkoret inte beaktas, så kan vi ha $u_h = c \neq 0$, så att

$$\nabla u_h = (\nabla N)a = Ba = \mathbf{0}. \text{ Detta ger att } Ka = \left(\int_{\Omega} B^T B d\Omega \right) a = \int_{\Omega} B^T \mathbf{0} d\Omega = \mathbf{0}, \text{ så att}$$

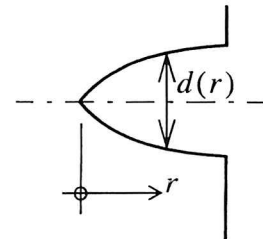
$a^T Ka = \mathbf{0}$ trots att $a \neq \mathbf{0}$ (eftersom $c \neq 0$). Alltså är K singulär.

3

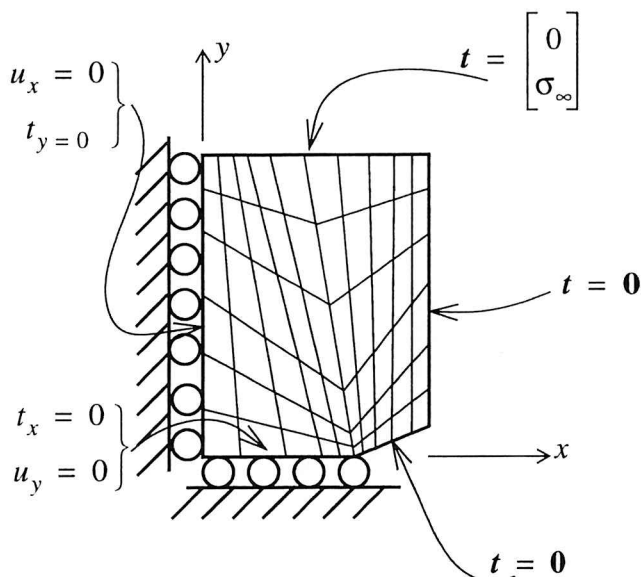
En tunn dubbelsymmetrisk plåtbit har ett par kantsprickor (inre öppningsvinklar 2π) och utsätts för dragning i y -led enligt figuren. Man önskar beräkna spänningstillståndet i komponenten genom att lösa elasticitetsekvationerna med finit-elementmetod. Plant spänningstillstånd antas och materialets elasticitetsmodul är E och Poissons tal är ν . Detaljens tjocklek är konstant och betecknas t .



- a: Skissa ett lämpligt elementnät för den önskade spänningsberäkningen. Använd något eller några 10-tal element och beskriv med någon rad text varför du konstruerat elementnätet som du gjort. Samtliga randvillkor på samtliga del-ränder av den analyserade biten ska också framgå av lösningen. (3p)
- b: Antag att det ekvationssystem $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$ som FE-modellen ger upphov till, ska lösas med en direkt metod (d v s genom att faktorisera styvhetsmatrisen). Beskriv i ord hur nodvariablerna bäst bör numreras med hänsyn till beräkningsarbetet. (1p)
- c: Spänningsintensitetsfaktorn är proportionell mot spricköppningen $d(r)$ och omvänt proportionell mot $\sqrt{r}$, där r är avståndet från sprickspetsen: $K_I \sim \frac{d(r)}{\sqrt{r}}$. Genom att approximera $d(r)$ med nodförskjutningarna enligt FE-beräkningen, kan man få en uppskattning av K_I . Vilket är troligast: att det uppskattade värdet på K_I är högre eller lägre än ett analytiskt beräknat värde? Svaret ska motiveras! (1p)



Lösning a: Utnyttja symmetrin och diskretisera 1/4-del av skivan, så att bästa möjliga approximation kan fås för ett givet antal frihetsgrader. Elementstorleken görs mindre kring sprickspetsen, eftersom man har en spännings-koncentration (singulariteten i exakta lösningen) här.



Randvillkor: Problemet beskrivs av 2 stycken 2a ordningens differentialekvationer, så det krävs 2 villkor på varje del

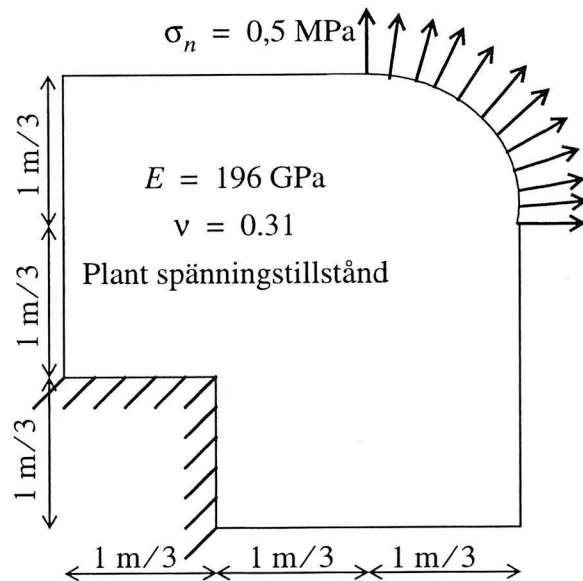
av randen. Låt $t_x = n_x \sigma_x + n_y \sigma_{xy}$ och $t_y = n_x \sigma_{xy} + n_y \sigma_y$ beteckna komponenterna av tractionvektorn (kraft/yta). På de fria obelastade ränderna gäller att normalspänningen (σ_x eller σ_y) och tangentialspänningen (här lika med σ_{xy}) är noll, så man får villkoren $\mathbf{t} = \mathbf{0}$. På den belastade randen gäller $\sigma_y = \sigma_\infty$, $\sigma_{xy} = 0$, $n_x = 0$ och $n_y = 1$, så här fås $t_x = 0$ samt $t_y = \sigma_\infty$. På symmetriränderna gäller att förskjutningen vinkelrätt mot randen ska vara noll samt att skjuvspänningen längs randen ska vara noll; detta leder till de villkor som anges i figuren.

Lösning b: Noderna (eller snarare frihetsgraderna/nodvariablerna) ska numreras i topografiskt kortaste led, så att skillnaden mellan högsta och lägsta nummer på varje element blir ett så litet tal som möjligt. Härigenom blir styvhetsmatrisens bandbredd B liten, vilket är fördelaktigt eftersom beräkningsarbetet är proportionellt mot $B^2 n$, där n är antalet obekanta nodvariabler.

Lösning c: En konform FE-modell är styvare än det kontinuerliga problemet, så de beräknade förskjutningarna blir 'i genomsnitt' för små. Man måste då förvänta sig att spricköppningen ($d(r)$) enligt FE-lösningen blir underskattad, vilket leder till ett för lågt värde på spänningsintensitetsfaktorn.

4

Figuren visar ett 2D elasticitetsproblem vars lösning man vill approximera med en konform finit- elementmetod. Antag att man utgår från en ganska grov diskretisering med lineära 3-nods element (CST element) och använder en adaptiv h -metod för att approximera lösningen.



a: Redogör för vad som menas med adaptivitet och förklara vad h -metod betyder. (2p)

b: I vilket eller vilka områden förväntar du

dig att ett adaptivt FE-programmet ska generera de till storleken minsta elementen? Motivera svaret. (1p)

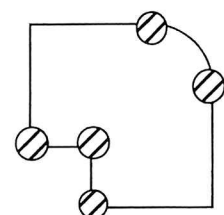
c: En konform FE-diskretisering av problemet leder till ekvationssystemet $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$, där styvhetsmatrisen $\mathbf{K}$ är symmetrisk och positivt definit. Visa att lösningen $\mathbf{a} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$ minimerar den potentiella energin $\Pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{K}\mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{f}$, d v s visa att $\Pi(\mathbf{a}) \leq \Pi(\mathbf{v})$, med

$\Pi(\mathbf{a}) = \Pi(\mathbf{v})$ endast om $\mathbf{a} \equiv \mathbf{v}$. (2p)

Lösning a: Med adaptivitet menas att FE-programmet kan uppskatta diskretiseringsfelet och, om detta är större än någon angiven tolerans, kan ändra diskretiseringen i enlighet med en uppskattning av felets fördelning över området så att felet minskar. Genom att upprepa denna procedur kan diskretiseringsfelet reduceras ner till (under) den givna toleransen.

h -metod innebär att man minskar diskretiseringsfelet genom att använda element med mindre storlek (d v s fler element).

Lösning b: Med ett adaptivt program som använder sig av h -metod förväntar man sig att få de till storleken minsta elementen i de områden första derivatorna varierar snabbt (andra derivatorna är stora). I ett elasticitetsproblem fås singulära punkter — där spänningarna (första



derivator) varierar snabbt — bl a vid inåtvända hörn och där randvillkor ändras abrupt. I det givna problemet finns 5 sådana punkter (se markeringar i figuren brevid).

Lösning c: Låt $\partial \mathbf{v}$ vara en liten godtycklig variation av vektorn $\mathbf{v}$ och beräkna variationen Π i punkten $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}\partial \Pi(\mathbf{v}) &= \Pi(\mathbf{v} + \partial \mathbf{v}) - \Pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \partial \mathbf{v})^T \mathbf{K}(\mathbf{v} + \partial \mathbf{v}) - (\mathbf{v} + \partial \mathbf{v})^T \mathbf{f} - \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{f} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \partial \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \partial \mathbf{v} + \frac{1}{2} \partial \mathbf{v}^T \mathbf{K} \partial \mathbf{v} - \partial \mathbf{v}^T \mathbf{f}\end{aligned}$$

Termen där $\partial \mathbf{v}$ ingår kvadratisk försummas i jämförelse med de termer där $\partial \mathbf{v}$ ingår lineärt eftersom variationen är liten. Vidare är $\partial \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{K} \partial \mathbf{v}$ eftersom $\mathbf{K}$ är symmetrisk. Vi har alltså att $\partial \Pi(\mathbf{v}) = \partial \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \partial \mathbf{v}^T \mathbf{f} = \partial \mathbf{v}^T (\mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{f})$. Man ser då att med $\mathbf{v} = \mathbf{a} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}$, så fås $\partial \Pi = 0$ (för godtycklig (men liten) variation $\partial \mathbf{v}$), d v s FE-lösningen gör Π stationär.

För att visa att den stationära punkten är ett minimum, måste vi visa att andra-variationen är positiv. Vi har:

$$\partial(\partial \Pi) = \partial \Pi(\mathbf{v} + \partial \mathbf{v}) - \partial \Pi(\mathbf{v}) = \partial \mathbf{v}^T [\mathbf{K}(\mathbf{v} + \partial \mathbf{v}) - \mathbf{f}] - \partial \mathbf{v}^T (\mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{f}) = \partial \mathbf{v}^T \mathbf{K} \partial \mathbf{v}$$

Eftersom $\mathbf{K}$ är positivt definit så gäller $\partial \mathbf{v}^T \mathbf{K} \partial \mathbf{v} > 0$ (för $\partial \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$), så andra-variationen är positiv och, alltså, den stationära punkten ett minimum.

Entydighet i lösningen ($\Pi(\mathbf{a}) = \Pi(\mathbf{v})$ endast om $\mathbf{a} \equiv \mathbf{v}$) följer trivialt av att $\mathbf{K}$ är positivt definit.