Tentamen i IMS090, 2025-08-26

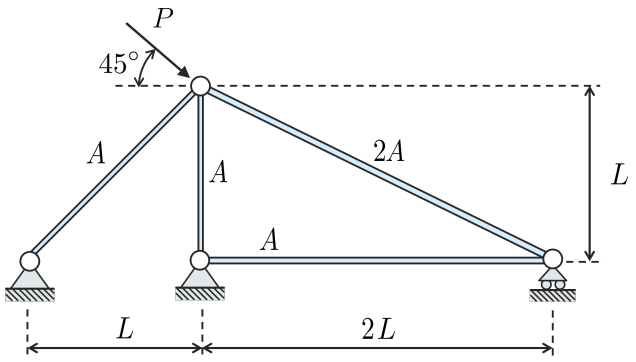
- **Tid:** 08:30-12:30 **Lokal:** SB-D309.
- **Lärare:** Magnus Ekh, tele 0708-282358
  Besöker salen vid start av tentamen samt kl 10:00.
- **Hjälpmedel**
  - "Formelsamling i hållfasthetslära för IMS090", Brouzoulis och Ekh. OBS! Inga egna anteckningar.
  - Python och Matlab på datorerna
- **Intruktioner**
  - På omslaget till dina inlämnade handskrivna lösningar ange även datornamn
  - Datornamnet hittar ni genom att öppna startmenyn och skriva "about" och får då upp information om datorn.
  - Viktigt att ange källhänvisning till ekvationer som används, t.ex. "FS sida 8". Samt om ni använder resultat från era Pythonfiler ange filnamnet, t.ex. från `filnamn.py` fås $a = 3$ m.
  - Spara eventuella Pythonfiler som ni använder i era lösningar under `c:\__exam__\Assignments\`
- **Lösningar**: Anslås på kurshemsidan (Canvas) dagen efter tentamen.
- **Resultat**: Medddelas senast 9 augusti. Granskning 9 och 12 augusti kl 12:00-13:00 i Maskingränd 1 (en våning upp).

- **Poängbedömning**: Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren. Ange enheter på svaren.

- **Betygsgränser**:
  20-25p: betyg 5
  15-19p: betyg 4
  10-14p, betyg 3
  0-9p, betyg U

Uppgift 1

Ett stångsystem består av fyra stänger enligt figuren nedan. Stängerna är gjorda av samma linjärt elastiska material med elasticitetsmodulen E.



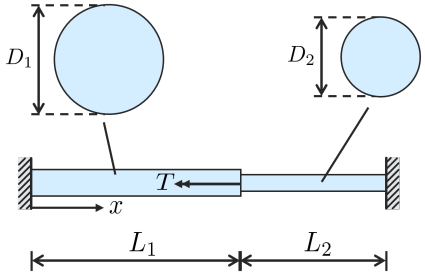
a) Bestäm förskjutningen (horisontell och vertikal) av knutpunkten där P angriper om $P = 15\,\text{kN}$. **(3p)**

b) Bestäm den största kraft P som kan tillåtas utan att plastisk deformation uppstår i någon stång. **(2p)**

Given data: $A = 50 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2$, $L = 1.2\,\text{m}$, $E = 70\,\text{GPa}$ och sträckgränsen för stångmaterialet är $\sigma_s = 280\,\text{MPa}$.

Uppgift 2

Studera ett seriekopplat axelsystem som belastas av ett vridmoment T enligt figuren. Båda axeldelarna har massiva tvärsnitt med diameter $D_1 = 30\,\text{mm}$ och $D_2 = 20\,\text{mm}$. Båda axeldelarna är tillverkade av ett material som kan modelleras som linjärelastiskt med skjuvmodul $G = 70\,\text{GPa}$. Vidare är de två axeldelarnas längder $L_1 = 1000\,\text{mm}$ och $L_2 = 800\,\text{mm}$.



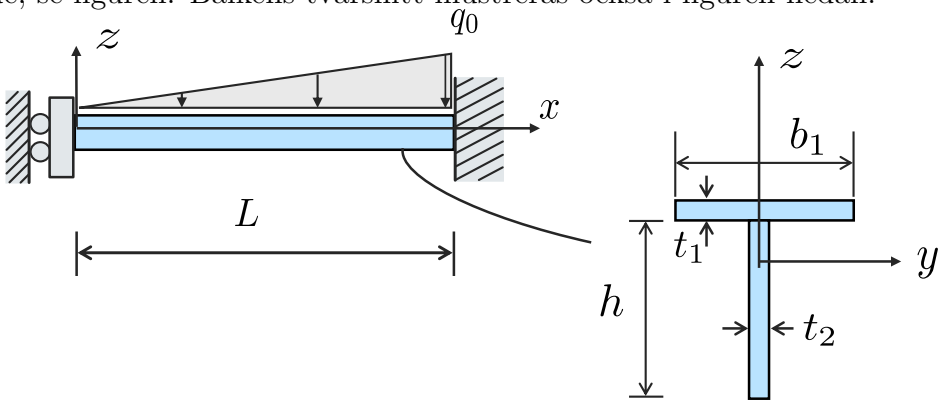
a) Bestäm snittvridmomenten M_{v1} och M_{v2} i respektive axeldel uttryckt i T. Antag i denna deluppgift att axeldelarna inte plasticerar. **(2p)**

b) För $T = 500\,\text{Nm}$ bestäm största skjuvspänning i vardera axeldel och avgör om axeln kommer plasticera. Antag att sträckgränsen i skjuvning är $\tau_{\text{s}} = 70\,\text{MPa}$. **(2p)**

c) Bestäm storleken på vridmomentet T då båda axeldelarna är genomplasticerade. **(1p)**

Uppgift 3

En balk med längd L belastas med en fördelad last med en linjärt varierande intensitet (kraft/längd) från 0 vid dess vänstra ände till q_0 vid dess högra ände, se figuren. Balkens tvärsnitt illustreras också i figuren nedan.



a) Bestäm tvärsnittets yttröghetsmoment I_y om $h = 20$ [mm], $b_1 = 15$ [mm], $t_1 = t_2 = 3$ [mm]. **1p**

b) Om $L = 200$ [mm], $q_0 = 1$ [N/mm] och materialets elasticitetsmodul är $E = 200 \cdot 10^3$ [MPa], plotta utböjningen $w(x)$ i Python. Bestäm speciellt största utböjningen (till belopp). **3p**

Notera att om numeriska värden används på E, I_y, L etc. så fungerar inte `sp.dsolve` utan använd i så fall den allmänna utböjningen (se formelsamlingen) som

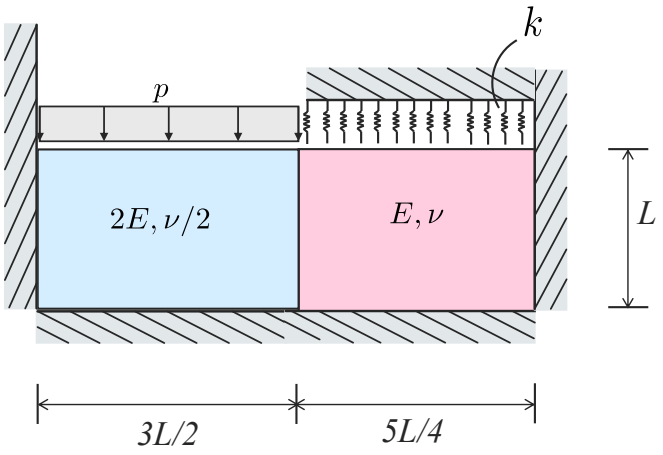
```
w=C1*x**3/6+C2*x**2/2+C3*x+C4+1/(Emod*Iy)*\
sp.integrate(sp.integrate( \
sp.integrate( sp.integrate(q,x), x), x), x)
```

där `x, C1, C2, C3, C4=sp.symbols('x, C1, C2, C3, C4')` och `q` är $q(x)$. Sedan bestäms integrationskonstanterna från randvillkoren med `sp.solve`.

c) Bestäm största böjnormalspänningen (till belopp) i balken. **1p**

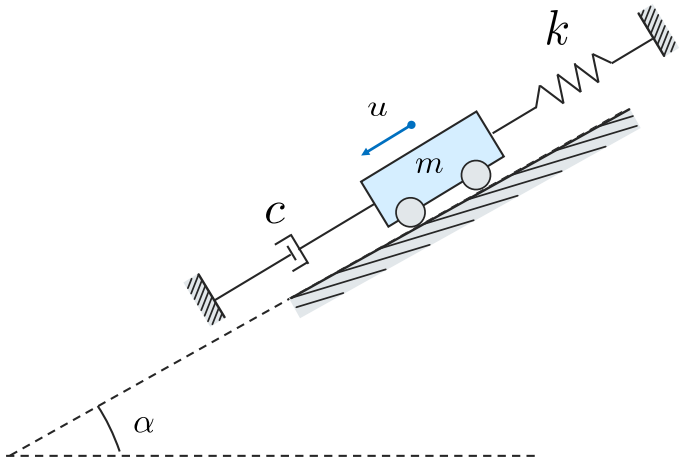
Uppgift 4

Två linjärt isotropt elastiska rätblock med elasticitetsmodul $2\,E$ respektive E samt Poissons tal $\nu/2$ respektive ν är placerade bredvid varandra. Antag det numeriska värdet $\nu = 1/3$. Det vänstra rätblocket belastas med det vertikala trycket p [N/m^2] enligt figuren nedan. Det högra rätblocket är inspänt i vertikalled med en fjäderbädd som har en total styvhet $k = EL$ [N/m] (kraft/vertikal deformation). Bestäm deformationen i vertikalled hos det vänstra rätblocket uttryckt i givna storheter. Vi försummar friktionen mellan rätblocken och väggar samt mellan rätblocken. Antag plant spänningstillstånd i båda rätblocken och att deras djup ut ur papprets plan är L.



Uppgift 5

En massa m som rullar friktionsfritt är inpänd mellan en fjäder med fjäderstyvhet k (kraft/förlängning) och en dämpare med dämpningskoefficienten c (kraft/hastighet) enligt figuren. Lutningen på underlaget är given av vinkeln α. Antag att $u = 0$ och massans hastighet $\dot{u}$ är 2 m/s (i u:s riktning) vid tiden $t = 0$. Antag att fjädern är ospänd för $u = 0$ och att tyngdaccelerationen är g.



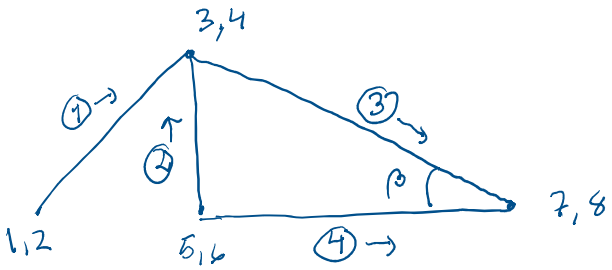
a) Bestäm största och minsta värde på förskjutningen $u(t)$ för $t \geq 0$. **3p**

b) Bestäm största och minsta krafterna i fjädern för $t \geq 0$. **1p**

c) Efter ett antal svängningar kommer massan att bli stilla och uppnå jämvikt. Vad är förskjutningen u i detta läge samt hur stor är fjäderkraften? Jämför med svaren i a) och b) **1p**

Givna data: m=10 [kg], $k = 100$ [N/m], $c = 10$ [N/(m/s)], $\alpha = 35^o$, $g = 9.81$ [m/s^2].

1. Definiera element, elementriktningar och frihetsgrader



$\beta = \text{atan}\ 1/2$

Stång ①: $\alpha_1 = \pi/4$, el-dof = [0 1 2 3] $\quad L_1 = \sqrt{2}\,L$

②: $\alpha_2 = \pi/2$, el-dof = [4 5 2 3] $\quad L_2 = L$

③: $\alpha_3 = -\beta$, el-dof = [2 3 6 7] $\quad L_3 = \sqrt{2^2+1^2}\,L$

④: $\alpha_4 = 0$, el-dof = [4 5 6 7] $\quad L_4 = 2L$

Givna: $a_1 = a_2 = a_5 = a_6 = a_8 = 0$, $P_3 = P/\sqrt{2}$, $P_4 = -P/\sqrt{2}$, $P_7 = 0$

Pythonkod $\Rightarrow$ $a_3 \approx 6{,}7 \cdot 10^{-4}$ m $\quad a_4 \approx -3{,}5 \cdot 10^{-4}$ m //

FS $\quad \delta = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha & \cos & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \end{bmatrix} \Rightarrow$

stång ① ($P_{1x} = P_{1y} = 0$, $P_{2x} = a_3$, $P_{2y} = a_4$)

$\delta_1 = \cos\alpha_1 \cdot a_3 + \sin\alpha_1 \cdot a_4$

$\varepsilon_1 = \delta_1 / L_1$

$\sigma_1 = E\,\varepsilon_1 \approx 93{,}7$ MPa, $\quad N_1 = \sigma_1 \cdot A_1 \approx 4685$ [N]

stång ② ($P_{1x} = P_{1y} = 0$, $P_{2x} = a_3$, $P_{2y} = a_4$)

$\delta_2 = \cos\alpha_2 \cdot a_3 + \sin\alpha_2 \cdot a_4$

$\varepsilon_2 = \delta_2 / L_2$, $\quad \sigma_2 = E \cdot \varepsilon_2 \approx -205$ MPa, $\quad N_2 = \sigma_2 \cdot A_2 \approx -10272$ [N]

stång ③ ($P_{1x} = a_3$, $P_{1y} = a_4$, $P_{2x} = P_{2y} = 0$)

$\delta_3 = -\cos\alpha_3 \cdot a_3 - \sin\alpha_3 \cdot a_4$,

$\varepsilon_3 = \delta_3 / L_3$, $\quad \sigma_3 = E \cdot \varepsilon_3 \approx -81{,}5$ MPa, $\quad N_3 = \sigma_3 \cdot A_3 \approx -8154$ [N]

stång ④ ($P_{1x} = P_{1y} = 0$, $P_{2x} = a_7$, $P_{2y} = 0$)

$\delta_4 = \cos\alpha_4 \cdot a_7$

$\varepsilon_4 = \delta_4 / L_4$

$\sigma_4 = E\,\varepsilon_4 \approx 146$ MPa, $\quad N_4 = \sigma_4 \cdot A_4 \approx 7294$ [N]

b) störst risk för plasticering i stång ②. Kraften kan ökas till (eftersom strukturen är linjär elastisk)

$$P \cdot \frac{\sigma_s}{-\sigma_2} \approx 20\,442\ [N] \ //$$

2) Axelsystem, frilägging av knutpunkt

a)

$\rightarrow\!\!\!\rightarrow : -M_{v1} + M_{v2} - T = 0 \quad (\star)$

dvs statiskt obestämt

Konstitutiva samband

$$\begin{cases} M_{v1} = \dfrac{G K_{v1}}{L_1}\left(\varphi_1(L_1) - \underbrace{\varphi_1(0)}_{=0}\right) & \text{där } K_{v1} = \text{"}\dfrac{\pi b^4}{2}\text{"} = \dfrac{\pi (D_1/2)^4}{2} \\ M_{v2} = \dfrac{G K_{v2}}{L_2}\left(\underbrace{\varphi_2(L_2) - \varphi_2(0)}_{=0}\right) & \text{där } K_{v2} = \dfrac{\pi (D_2/2)^4}{2} \end{cases}$$

Deformationssamband (rotation $\rightarrow\!\!\!\rightarrow$ vid knutpunkten)

$\varphi_1(L_1) = \varphi_2(0)$ // från $(\varphi_1(L_1) - \underbrace{\varphi_1(0)}_{=0}) + (\varphi_2(L_2) - \underbrace{\varphi_2(0)}_{=0}) = 0$ //

Python $\Rightarrow$ $M_{v1} \approx -0{,}802 \cdot T$, $M_{v2} \approx 0{,}198 \cdot T$ //

b) Max skjuvspänning (till belopp) $\text{"}\dfrac{|M_v| \cdot b}{K_v}\text{"}$

med $T = 500$ Nm

$$\tau_{max1} = \frac{|M_{v1}| \cdot D_1/2}{K_{v1}} \approx 1{,}51 \cdot 10^{-4} \cdot T \approx 75{,}6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max2} = \frac{|M_{v2}| \cdot D_2/2}{K_{v2}} \approx 1{,}26 \cdot 10^{-4} \cdot T \approx 63 \text{ MPa}$$

dvs plastficering i axeldel 1.

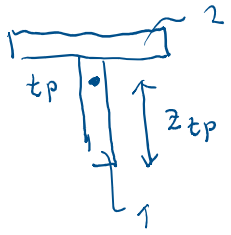
c) Genomplasticering i båda delarna FS $M_{vf} = \text{"}\dfrac{2\pi}{3}(b^3 - a^3)\tau_s\text{"}$

$$\left.\begin{aligned} M_{vf1} &= 2\pi/3\,(D_1/2)^3 \cdot \tau_s \\ M_{vf2} &= 2\pi/3\,(D_2/2)^3 \cdot \tau_s \end{aligned}\right\}$$ från jämvikt $(\star)$ fås:

$T = M_{vf1} + M_{vf2} \approx 641$ Nm //

3)

a)



$$z_{tp} = \frac{A_1 h/2 + A_2 (h + t_1/2)}{A_1 + A_2} \approx 14{,}9 \text{ mm}$$

$$I_y = \frac{t_2 h^3}{12} + A_1 (z_{tp} - h/2)^2 + \frac{b_1 t_1^3}{12} + A_2 (z_{tp} - h - t_1/2)^2$$

$$\approx 5434 \text{ mm}^4 \;//$$

b) $q(x) = -q_0 \cdot x/L$

Allmän lösn $w(x) = C_1 x^3/6 + C_2 x^2/2 + C_3 x + C_4$ +

balkens d.e.

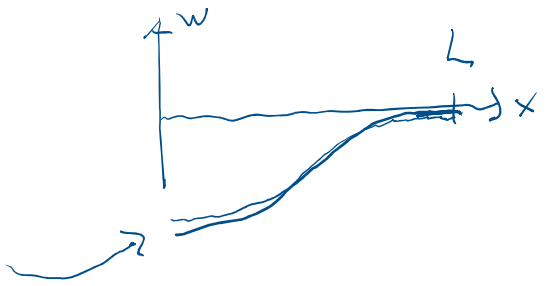
se FS $\iiint\int \frac{1}{EI} q(x)\, dx\, dx\, dx\, dx$

Randvillkor: $w'(0) = 0$ $\quad w(L) = 0$

$T(0) = 0$ $\quad w'(L) = 0$

$w(x)$ = se Python

$\max |w(x)| = 0{,}0184$ mm

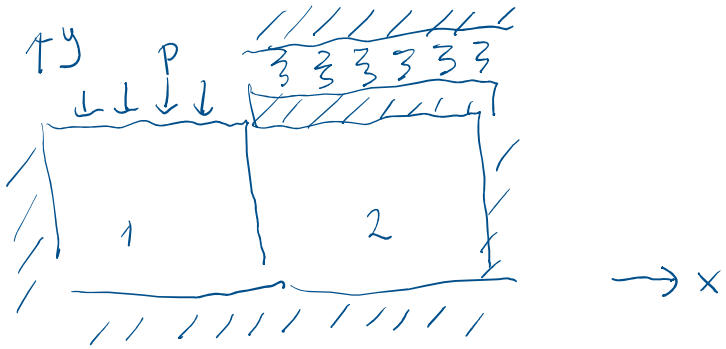


c) $\sigma = \frac{M \cdot z}{I_y}$ böjnormalspänning från FS

$$\max |\sigma| = \frac{\max_x |M(x)| \cdot \max |z|}{I_y} \quad (\max |z| = z_{tp})$$

$$\approx 13{,}7 \text{ MPa} \;//$$

4.



Rätblock 1:

$\sigma_{x1} = ?$, $\sigma_{y1} = -p$

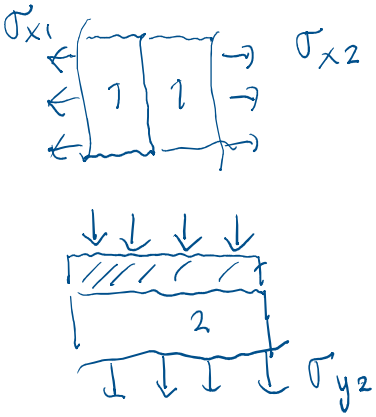
FS (plan spänning)

Hookes lag

$$\begin{cases} \varepsilon_{x1} = \frac{1}{E_1}(\sigma_{x1} - \nu\sigma_{y1}) \\ \varepsilon_{y1} = \frac{1}{E_1}(\sigma_{y1} - \nu\sigma_{x1}) \end{cases}$$

Rätblock 2

Jämvikt



$\rightarrow : -\sigma_{x1} L^2 + \sigma_{x2} L^2 = 0$

$\Rightarrow \sigma_{x1} = \sigma_{x2}$

$\uparrow : -\sigma_{y2} \cdot \frac{5L}{4} \cdot L + k\underbrace{\delta_{y2}}_{\varepsilon_{y2} \cdot L} = 0$ (1)

Plan spänning, Hookes lag:

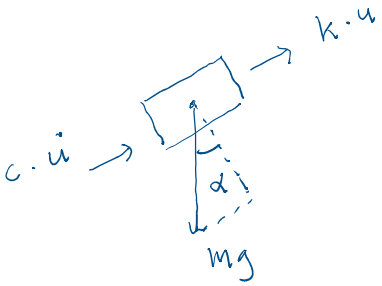
$$\begin{cases} \varepsilon_{x2} = \frac{1}{E_2}(\sigma_{x2} - \nu\sigma_{y2}) \\ \varepsilon_{y2} = \frac{1}{E_2}(\sigma_{y2} - \nu\sigma_{x2}) \end{cases}$$

Deformationsvillkor $\varepsilon_{x1} \cdot 3L/2 + \varepsilon_{x2} \cdot 5L/4 = 0$ (2)

Pythonkod med obekanta: σ_{x1} och σ_{y2} och ekvationerna (1) och (2) ger:

$$\delta_{y1} = \varepsilon_{y1} \cdot L \approx -0{,}5 \cdot pL/E \;//$$

5)



Newtons andra lag: "$F = ma$"

$\swarrow$: $-ku - c\dot{u} + mg\sin\alpha = m\ddot{u}$

Ställ upp som första ordn. ODE

med $\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = \ddot{u} = -\frac{k}{m}u - \frac{c}{m}v + g\sin\alpha \end{cases}$

Kraft i fjäder $= ku$

Initialvillkor $u(0) = 0$, $v(0) = 2$ m/s

Se Python

a) max $u(t) \approx 1{,}01$ m

min $u(t) \approx 0{,}0$ m

b) max $F(t) \approx 111$ N

min $F(t) \approx 0$ N

c) statiskt läge ($\dot{u} = 0$, $\ddot{u} = 0$) $\Rightarrow$

$-k \cdot u + mg\sin\alpha = 0 \Rightarrow u = mg\sin\alpha / k$

$\approx 0{,}56$ m //

$F = k \cdot u = mg\sin\alpha \approx 56$ N //