Tentamen i IMS090, 2025-03-19

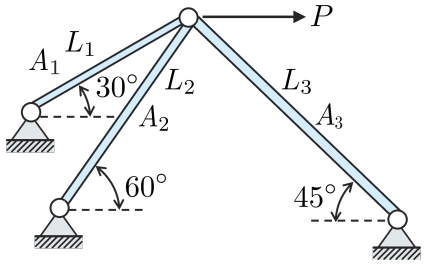
- **Tid:** 08:30-12:30 **Lokal:** SB-D209, SB-D309, SB-D409.
- **Lärare:** Jim Brouzoulis, tele 7722253, 0702-615494
  Besöker salen vid start av tentamen samt kl 10:00, 11:30.
- **Hjälpmedel**
  - "Formelsamling i hållfasthetslära för IMS090", Brouzoulis och Ekh. OBS! Inga egna anteckningar.
  - Python och Matlab på datorerna
- **Intruktioner**
  - På dina inlämnade handskrivna lösningar ange förutom anonym kod även datornamn
  - Datornamnet hittar ni genom att öppna startmenyn och skriva "about" och får då upp information om datorn.
  - Viktigt att ange källhänvisning till ekvationer som används, t.ex. "FS sida 8". Samt om ni använder resultat från era Pythonfiler ange filnamnet, t.ex. från `filnamn.py` fås $a = 3$ m.
  - Spara eventuella Pythonfiler som ni använder i era lösningar under `c:\__exam__\Assignments\ # IMS090-123456`
- **Lösningar**: Anslås på kurshemsidan (Canvas) dagen efter tentamen.
- **Resultat**: Medddelas senast 2 april. Då kommer också tillfällen för granskning att meddelas.

- **Poängbedömning**: Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren. Ange enheter på svaren.

- **Betygsgränser**:
  20-25p: betyg 5
  15-19p: betyg 4
  10-14p, betyg 3
  0-9p, betyg U

Uppgift 1

Ett stångsystem består av tre stänger enligt figuren nedan. Stängerna är gjorda av samma linjärt elastiska material med elasticitetsmodulen E.



a) Bestäm förskjutningen (horisontell och vertikal) av knutpunkten där P angriper (uttryckt i P). **3p**

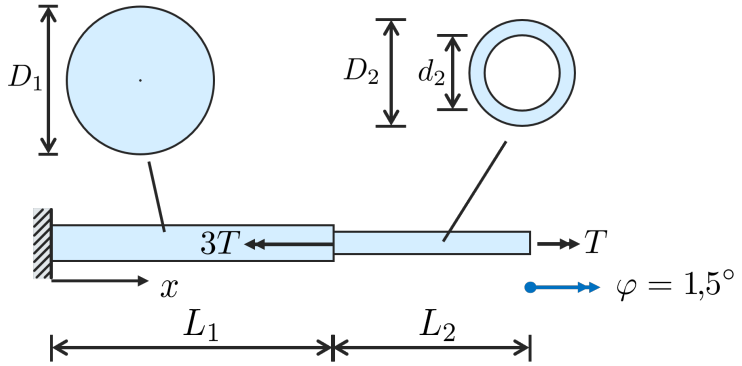
b) Bestäm den största kraft P som kan tillåtas utan att plastisk deformation uppstår i någon stång. **1p**

c) Bestäm den kritiska lasten P_{kr} som leder till instabilitet (knäckning). **1p**

Given data: $A_1 = A_2 = 50 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2$, $A_3 = 25 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2$, $L_1 = 1.5\,\text{m}$, $L_2 = 2.5\,\text{m}$, $L_3 = 3.0\,\text{m}$, $E = 70\,\text{GPa}$. Yttröghetsmomentet för de tre stängerna är $I = 6.6 \cdot 10^{-8}\,\text{m}^4$ (trots att de har olika areor) och sträckgränsen för stångmaterialet är $\sigma_s = 280\,\text{MPa}$.

Uppgift 2

Studera ett seriekopplat axelsystem som belastas av två vridmoment, den ena med magnitud $3T$ och det andra T, enligt figuren. Den vänstra axeldelen har ett massivt tvärsnitt med diameter $D_1 = 30\,\text{mm}$ och den högra axeldelen har en ytterdiameter på $D_2 = 25\,\text{mm}$ och innerdiameter på $d_2 = 20\,\text{mm}$. Båda axeldelarna är tillverkade av ett material som kan modelleras som linjärelastiskt med skjuvmodul $G = 70\,\text{GPa}$. Vidare är de två axeldelarnas längder $L_1 = 900\,\text{mm}$ och $L_2 = 1200\,\text{mm}$.

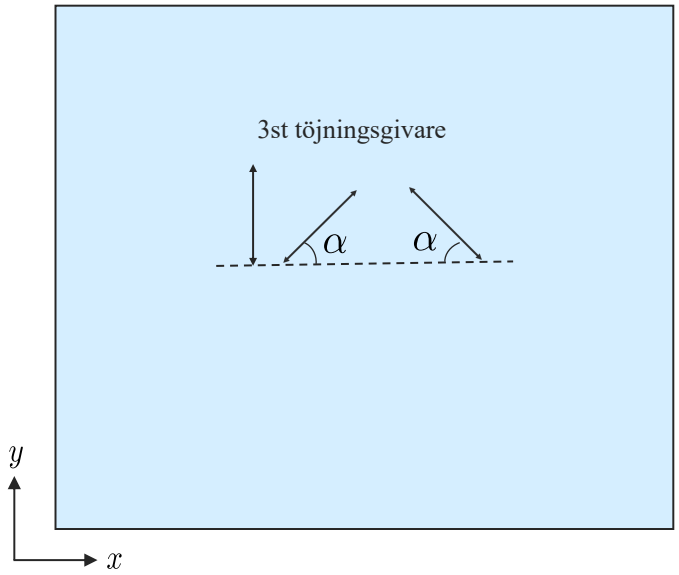


a) För $T = 70\,\text{Nm}$ bestäm största skjuvspänning i vardera axeldel. **2p**

b) Bestäm storleken på T så att den fria änden roterar 1,5 grader (med riktning enligt figur). **3p**

Uppgift 3

Tre stycken töjningsgivare mäter normaltöjningen i tre olika riktningar på ytan av en kropp som är utsatt för ett homogent plant spänningstillstånd enligt figuren. Antag vinkeln $\alpha = 45^o = \pi/4$ och att normaltöjningarna



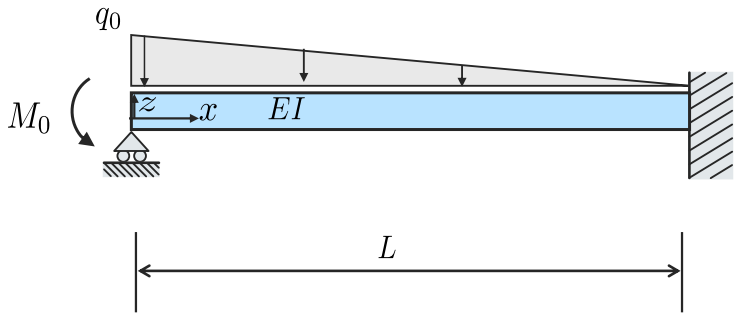
för vänstra töjningsgivaren är 0.002 (i vertikalled), mittersta 0.001 (lutning α mot högerriktad horisontallinje) och högra -0.0005 (lutning α mot vänsterriktad horisontallinje).

a) Bestäm ϵ_x, ϵ_y och γ_{xy}. **3p**

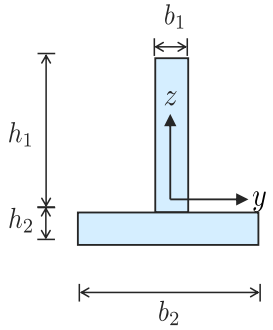
b) Vad blir spänningarna σ_x, σ_y och τ_{xy}? Antag att materialet är ett stål som beter sig linjärt isotropt elastiskt med elasticitetsmodul $210 \cdot 10^3$ MPa och Poissons tal $\nu = 0.3$ **2p**

Uppgift 4

En balk är fritt upplagd och fast inspänd enligt figuren. Den belastas av en



linjärt varierande utbredd last med största lastintensitet q_0 (nedåt) och av ett moturs moment M_0 vid dess vänstra ände. Balken har ett tvärsnitt enligt nedan



Givna data: $b_1 = 10$ mm, $b_2 = h_1 = 55$ mm, $h_2 = 15$ mm, $L = 5$ m, $E = 70 \cdot 10^3$ MPa, $q_0 = 1$ N/mm, $M_0 = 90$ Nm.

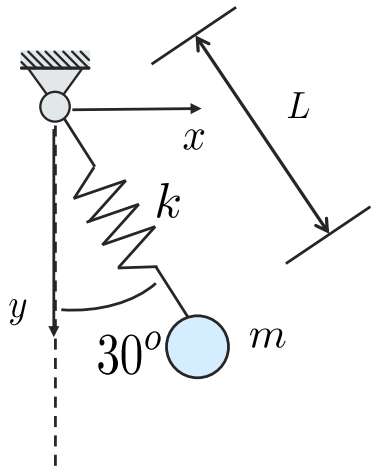
a) Bestäm ytcentrums position i z-led och yttröghetsmomentet I_y för tvärsnittet **2p**

b) Bestäm böjmomentet $M(x)$ och plotta resultatet för $0 \leq x \leq L$. **2p**

c) Bestäm såväl största dragspänning som (till belopp) största tryckspänning som uppkommer i balken. **1p**

Uppgift 5

En massa $m = 10$ kg släpps från stillastående vid tiden $t = 0$ från läget enligt figuren. Den är fastsatt i taket med en masslös fjäder som har en konstant styvhet $k = 1000$ N/m. Vid läget enligt figuren så är fjädern ospänd. Dvs dess ospända längd är $L = 0.5$ m. Massan belastas också av gravitationen, antag $g = 9.81$ m/s^2.

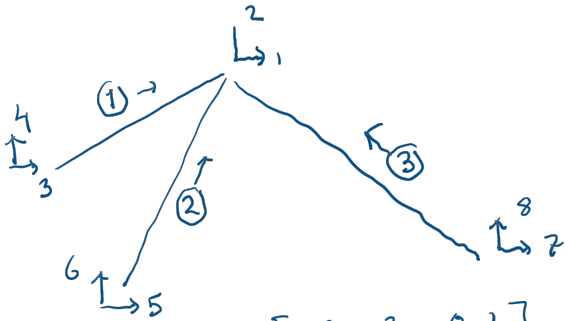


a) Ställ upp rörelseekvationerna och dess initialvillkor för massan m.
2p

b) Bestäm massans rörelse dvs x och y koordinater enligt figuren som funktion av tiden $0 \leq t \leq 10$ s. Plotta rörelsen i Python/Matlab.
2p

c) Om det funnits en dämpning eller luftmotstånd (som det alltid gör i praktiken) i massa-fjäder systemet. Vilken position hade massan stannat vid?
1p

1. Definiera element, elementriktningar och frihetsgrader



Stång ①: $\alpha_1 = \pi/6$, el-dof = [2 3 0 1]

②: $\alpha_2 = \pi/3$, el-dof = [4 5 0 1]

③: $\alpha_3 = 3\pi/4$, el-dof = [6 7 0 1]

Givna: $a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0$

$\underline{P}_1 = \underline{P}$ $\quad \underline{P}_2 = 0$

Pythonkod $a_1 \approx 6.76 \cdot 10^{-4} \cdot \underline{P}$ $\quad a_2 \approx -4.65 \cdot 10^{-4} \cdot \underline{P}$ //

FS $\delta = [-\cos\alpha \;\; -\sin\alpha \;\; \cos\alpha \;\; \sin\alpha] \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$

Stång ① ($P_{1x} = P_{1y} = 0$, $P_{2x} = a_1$, $P_{2y} = a_2$)

$\delta_1 = \cos\alpha_1 \cdot a_1 + \sin\alpha_1 \cdot a_2$

$\varepsilon_1 = \delta_1 / L_1$

$\sigma_1 = E\,\varepsilon_1 \approx 0,0165 \cdot P$, $\quad N_1 = \sigma_1 \cdot A_1 \approx 0,823 \cdot P$

Stång ② ($P_{1x} = P_{1y} = 0$, $P_{2x} = a_1$, $P_{2y} = a_2$)

$\delta_2 = \cos\alpha_2 \cdot a_1 + \sin\alpha_2 \cdot a_2$

$\varepsilon_2 = \delta_2 / L_2$, $\quad \sigma_2 = E \cdot \varepsilon_2 \approx -0,00182 \cdot P$, $\quad N_2 = \sigma_2 \cdot A_2 \approx -0,909 \cdot P$

Stång ③ ($P_{1x} = P_{1y} = 0$, $P_{2x} = a_1$, $P_{2y} = a_2$)

$\delta_3 = \cos\alpha_3 \cdot a_1 + \sin\alpha_3 \cdot a_2$,

$\varepsilon_3 = \delta_3 / L_3$, $\quad \sigma_3 = E \cdot \varepsilon_3 \approx -0,0188 \cdot P$, $\quad N_3 = \sigma_3 \cdot A_3 \approx -0,471 \cdot P$

b) Störst risk för plasticering i stång ③

$$P_{plast} \approx \frac{280}{0,0188} \approx 14,87 \text{ kN} \;//$$

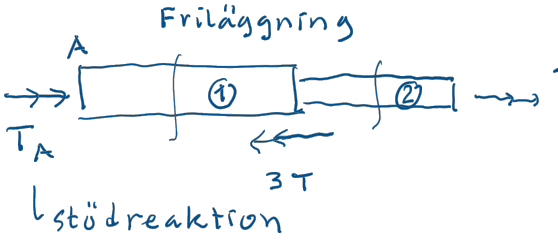
c) Negativa normalkrafter i stångdel ② och ③

$0,909 \cdot P_{kr,2} = \pi^2 \frac{EI}{L_2^2} \Rightarrow P_{kr,2} \approx 80.3$ kN

$0,471 \cdot P_{kr,3} = \pi^2 EI / L_3^2 \Rightarrow P_{kr,3} \approx 10,8$ kN

} kritisk last för knäckning $P_{kr} \approx 10,8$ kN //

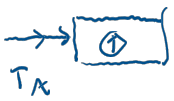
2)



$\rightarrow\!\!+: \; T - 3T + T_A = 0$

$\Rightarrow T_A = 2T \quad (1)$

Snitta och frilägg



$\rightarrow\!\!+: \; M_{v1} + T_A = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} M_{v1} = -T_A = -2T \quad (2)$

$\rightarrow\!\!+: \; -M_{v2} + T = 0 \Rightarrow M_{v2} = T \quad (3)$

---

a) Vridstyvhetens tvärsnittsfaktor, FS s 11

$$K_{v1} = \frac{\pi}{2}(D_1/2)^4 \qquad K_{v2} = \frac{\pi}{2}\left((D_2/2)^4 - (d_2/2)^4\right) \quad (4)$$

Vridskjuvspänning FS s.5

$$\tau_1(r) = \frac{M_{v1}\cdot r}{K_{v1}} \qquad \tau_2(r) = \frac{M_{v2}\cdot r}{K_{v2}}$$

$$\Rightarrow \tau_{max,1} = \frac{|M_{v1}|\cdot D_1/2}{K_{v1}} \qquad \tau_{max,2} = \frac{|M_{v2}|\cdot D_2/2}{K_{v2}} \quad (5)$$

OBS! positiv eller negativ skjuvspänning spelar ingen roll för materialets hållfasthet. Därav beloppstecken.

Python-kod $\Rightarrow \tau_{max,1} \approx 26{,}4$ MPa, $\tau_{max,2} \approx 38{,}6$ MPa //

---

b) Deformationssamband

$$\varphi = \varphi_2(L_2) = \varphi_2(L_2) - \varphi_2(0) + (\varphi_1(L_1) - \underbrace{\varphi_1(0)}_{=0 \text{ ty fast inspand}}) \quad (6)$$

och $\varphi_2(0) = \varphi_1(L_1)$ (7) annars är inte strukturen kompatibel (sitter ihop)

Materialsamband elastiska axlar, FS s.5

$$M_{v1} = G K_{v1} \frac{\varphi_1(L_1) - \overbrace{\varphi_1(0)}^{=0}}{L_1} \qquad M_{v2} = G K_{v2} \frac{\varphi_2(L_2) - \varphi_2(0)}{L_2} \quad (8)$$

$$\Rightarrow \varphi \overset{(6)}{=} \varphi_2(L_2) \overset{(8)}{=} \varphi_2(0) + \frac{M_{v2}\cdot L_2}{G K_{v2}} \overset{(7)}{=} \varphi_1(L_1) + \frac{M_{v2} L_2}{G K_{v2}} \overset{(8)}{=} \frac{M_{v1} L_1}{G K_{v1}} + \frac{M_{v2} L_2}{G K_{v2}}$$

$\Rightarrow$ Med $\varphi = 1.5 \cdot \frac{\pi}{180}$ kan T bestämmas till $\approx 60{,}4$ Nm se Pythonfil //

3) FS s.22

$$\varepsilon(\varphi) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos(2\varphi) + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin(2\varphi)$$

a) Tre ekvationer fås

$\varepsilon(\varphi = \pi/2) = 0{,}002$

$\varepsilon(\varphi = \pi/4) = 0{,}001$

$\varepsilon(\varphi = 3\pi/4) = -0{,}0005$

obekanta ε_x, ε_y, γ_{xy}.

Pythonkod ⇒

$\varepsilon_x = -0{,}0015$

$\varepsilon_y = 0{,}002$

$\gamma_{xy} = 0{,}0015$ //

b) FS. s. 23

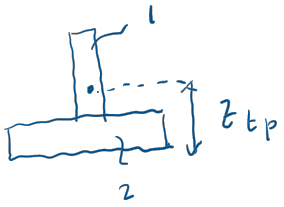
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \simeq -208 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \simeq 358 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \simeq 121 \text{ MPa}$$ //

4) Ytcentrums läge

a)



$$z_{tp} = \frac{h_1 b_1 \left(h_2 + \frac{h_1}{2}\right) + h_2 b_2 \frac{h_2}{2}}{h_1 b_1 + h_2 b_2} \approx$$

$$\approx 30{,}7 \text{ mm}$$

Yttröghetsmomentet FS s. 8

$$I_y = \frac{b_1 h_1^3}{12} + b_1 h_1 \left(h_2 + h_1/2 - z_{tp}\right)^2 + \frac{b_2 h_2^3}{12} + b_2 h_2 \left(h_2/2 - z_{tp}\right)^2$$

$$\approx 5{,}584 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

---

b) Lösning elastiska linjens ekv, FS s. 6

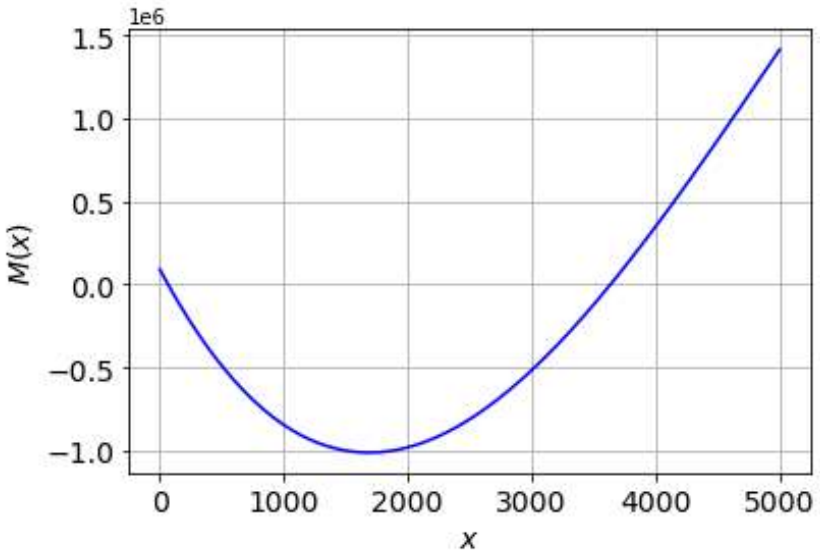
$$w(x) = C_1 x^3/6 + C_2 x^2/2 + C_3 x + C_4 + \frac{1}{EI_y} \iiiint q(x)\, dx\, dx\, dx\, dx$$

där $q(x) = -q_0 (1 - x/L)$

Randvillkor: $\begin{cases} w(0) = 0 \\ M(0) = -E I_y w''(0) = M_0 \end{cases}$ $\begin{cases} w(L) = 0 \\ w'(L) = 0 \end{cases}$

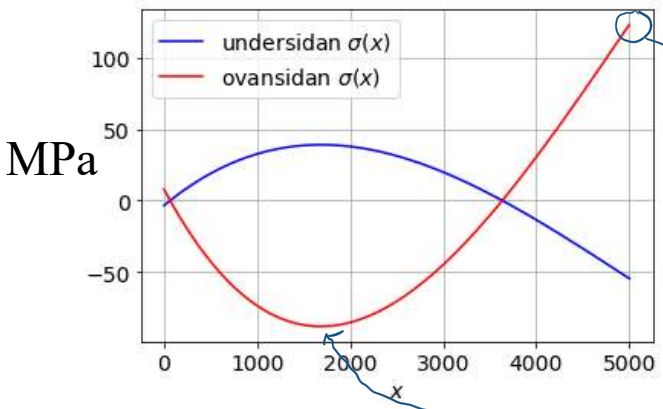
Python ger $C_1 - C_4$ och $M(x) = -E I_y w''(x)$

$$M(x) \approx -3{,}333 \cdot 10^{-5} x^3 + 0{,}5 x^2 - 1402 x + 90000 \quad \text{Nmm}$$



c) Spänning $\sigma(x,z) = \frac{M(x)\cdot z}{I_y}$

Största spänningar till belopp fås på undersida ($z = -z_{tp}$) och/eller ovansida ($z = h_1 + h_2 - z_{tp}$)



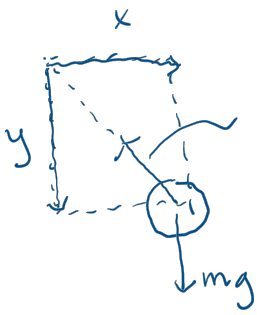
Python ger att största dragspänning är 122 MPa på ovansidan

till belopp största tryckspänning är −87.9 MPa på ovansidan

//

5)

a)



$F_{fjäder} = k\,(\underbrace{\sqrt{x^2+y^2} - L}_{\text{förlängning}})$

Riktning $\begin{bmatrix} -x/\sqrt{x^2+y^2} \\ -y/\sqrt{x^2+y^2} \end{bmatrix}$

a) $\rightarrow: \; m\ddot{x} = F_{fjäder}\,\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\uparrow: \; m\ddot{y} = mg + F_{fjäder}\,\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

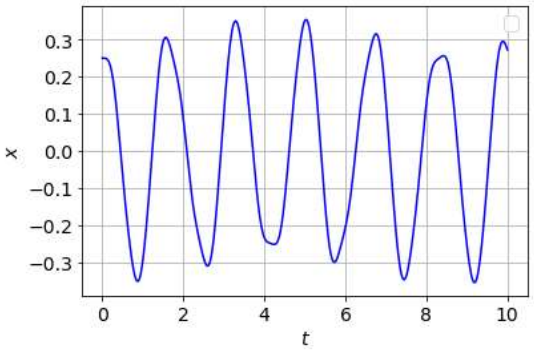
b) Skriv om som 1:a ordn. ODE genom att införa v_x, v_y

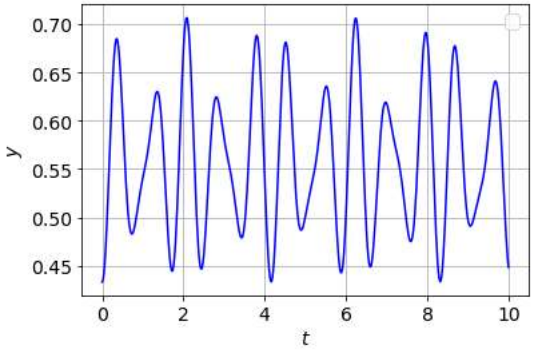
$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{v}_x = -F_{fjäder}/m \;\; \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_y = g - F_{fjäder}/m \;\; y/\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

Initialvillkor

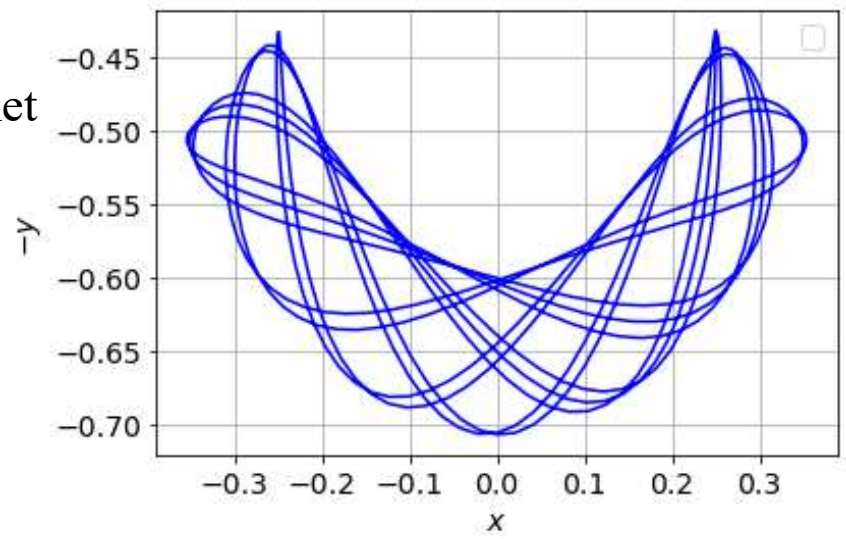
$$\begin{cases} x(0) = L \cdot \sin(\pi/6) \\ y(0) = L \cdot \cos(\pi/6) \\ v_x = v_y = 0 \end{cases}$$

PythonKod ger:

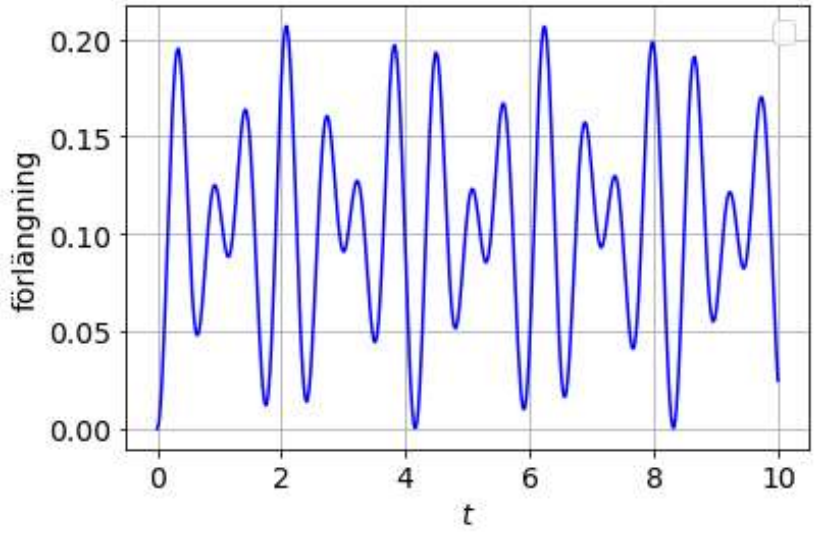




Rörelse i xy-planet



Förlängning $\delta = \sqrt{x^2+y^2} - \ell$ Ej med i uppgiften.



max förlängning: 0.20665365664644297 m $\approx 0,207$ m //
max negativ förlängning: 0.0 m

c) Massan stannar så småningom i vertikalt läge

$\ell + \frac{mg}{k} \approx 0,598$ m //