Tentamen i IMS090, 2024-06-07

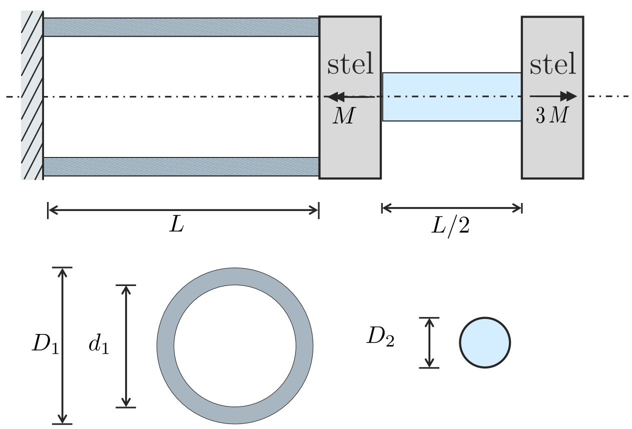
- **Tid:** 14:00-18:00 **Lokal:** SB-D209.
- **Lärare:** Magnus Ekh, tele 7723479, 0708-282358
  Besöker salen vid start av tentamen samt kl 15:30, 16:45.
- **Hjälpmedel**
  - "Formelsamling i hållfasthetslära för IMS090", Ekh, Hansbo, Brouzoulis. OBS! Inga egna anteckningar.
  - Python på datorerna
- **Intruktioner**
  - På dina inlämnade handskrivna lösningar ange förutom anonym kod även datornamn
  - Datornamnet hittar ni genom att öppna startmenyn och skriva "about" och får då upp information om datorn.
  - Viktigt att ange källhänvisning till ekvationer som används, t.ex. "FS sida 8". Samt om ni använder resultat från era Pythonfiler ange filnamnet, t.ex. från `filnamn.py` fås $a = 3$.
  - Spara eventuella Pythonfiler som ni använder i era lösningar under `c:\__exam__\Assignments\`
  - I dessa filer skriv `#` följt av er anonyma kod på den översta raden, `# IMS090-123456`
- **Lösningar**: Anslås på kurshemsidan (Canvas) första vardagen efter tentamen.
- **Resultat**: Medddelas senast 14 juni. Då kommer också tillfällen för granskning att meddelas.

- **Poängbedömning**: Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

- **Betygsgränser**:
  20-25p: betyg 5
  15-19p: betyg 4
  10-14p, betyg 3
  0-9p, betyg U

Uppgift 1

En axelkonstruktion består av två axlar som är sammankopplade med en stel skiva enligt figuren nedan. Den vänstra axeln är fast inspänd i en vägg i sun vänstra ände. Den högra axelns båda ändar är fastsatta i stela skivor. På stela skivan mellan axeldelarna verkar det vridande momentet M medan på den högra stela skivan verkar vridande momentet $3\,M$.



Den vänstra axeln är ett tjockväggig cirkulärt rör medan den högra axeln är en solid cirkulär axel. Dimensioner finns angivna i figuren ovan. Antag att materialet i axeldelarna är linjärt elastiskt med skjuvmodulen G.

a) Bestäm storleken på de inre vridande momenten i axeldelarna uttryckt i M. **1p**

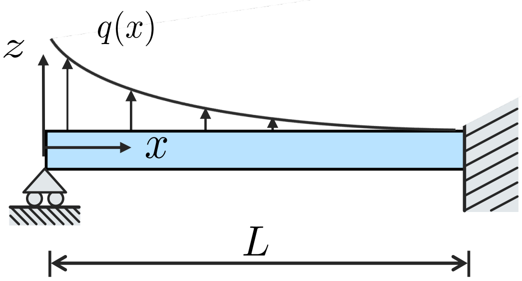
b) Bestäm storleken på M så att inte största tillåtna skjuvspänning $\tau_{\text{till}} =$ 100 MPa överskrids i någon av axlarna. **2p**

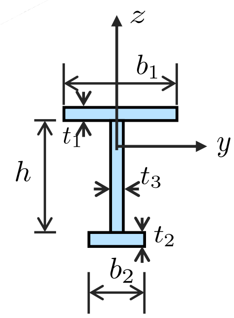
c) Bestäm hur mycket de båda stela skivorna roterar för det från b) bestämda M. **2p**

Övriga givna data: G = 78000 [MPa], L = 1000 [mm], D_1 = 30 [mm], $d_1 = 20$ [mm] och $D_2 = 10$ [mm].

Uppgift 2

En balk som är fritt upplagd - fast inspänd utsätts för den utbredda lasten $q(x) = q_0\,(1 - x/L)^2$. Balkens tvärsnitt illustreras i figuren nedan.





a) Bestäm böjmomentet $M(x)$ uttryckt i q_0, L och x (d.v.s. använd ej numeriska värden i denna deluppgift). **2p**

b) Bestäm $M(x)$ största värde (till belopp), t.ex. genom att plotta $M(x)$. Använd nu numeriska värden.
Givna data: $L = 1000$ [mm], $q_0 = 10$ [N/mm]. **1p**

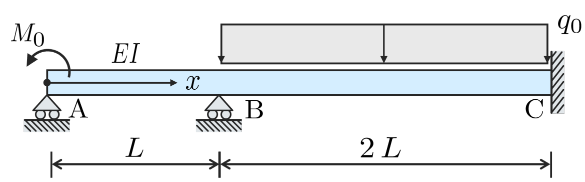
c) Bestäm tvärsnittets yttröghetsmoment I_y och bestäm största böjnormalspänningen (till belopp) i balken.
Givna data: $h = b_1 = 20$ [mm], $b_2 = 2\,h/3$, $t_1 = t_2 = t_3 = 3$ [mm]. **2p**

Uppgift 3

En balk är tillverkad av ett linjärt elastiskt material, har konstant böjstyvhet EI. Den består av två balkdelar med längd L och $2\,L$ respektive. Den högra balkdelen belastas av en utbredd last med konstant intensitet $q_0 = P/L$. Dessutom verkar ett motursriktat moment vid A med storlek $M_0 = P\,L$.

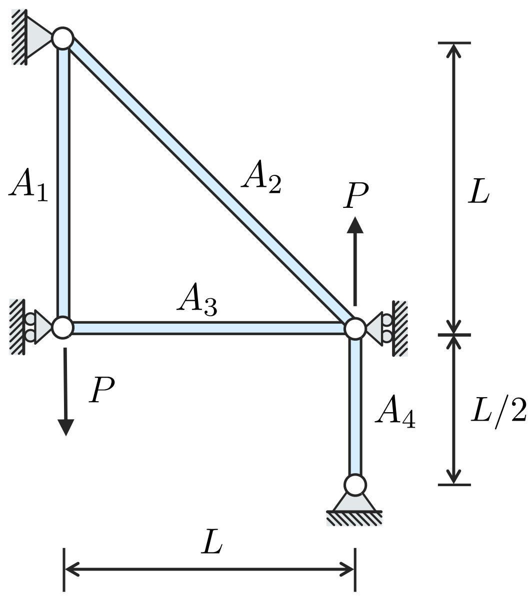
a) Bestäm samtliga stödreaktioner uttryckt i P och L. **3p**

b) Kontrollera att jämvikt av balken erhålls med svaren från a). **2p**



Uppgift 4

Ett stångsystem består av 4 stänger enligt figuren. Stängerna är gjorda av samma linjärt elastiska material med elasticitetsmodulen E med samma area $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A$.

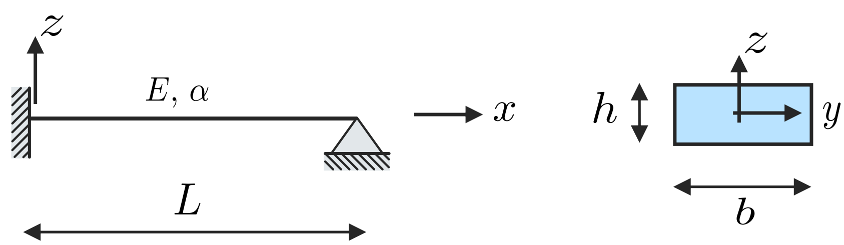


a) Bestäm de vertikala förskjutningarna i de två punkterna där lasterna angriper då $P = 3$ kN, $A = 30 \cdot 10^{-6}$ m^2, $L = 1$ m, $E = 210$ GPa. **3p**

b) Bestäm den största kraft P_s som kan tillåtas utan att plastisk deformation uppstår i någon stång. Antag att sträckgränsen för stångmaterialet $\sigma_s = 250$ MPa. **2p**

Uppgift 5

En linjärt elastisk stång/sträva med längd L är fastspänd enligt figuren nedan. Stångens/strävans tvärsnitt är rektangulärt med bredd b och höjd h. Stången/strävan har elasticitetsmodulen E och längdutvidgningskoefficienten α. Vid rumstemperatur är strävan obelastad. Temperaturen ökar sedan i

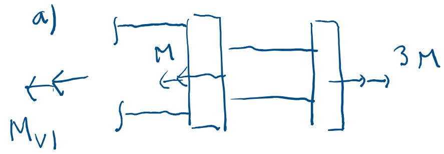


hela stången/strävan med ΔT.

a) Bestäm uttrycken för axialkraft och spänning i stången p.g.a. en temperaturökning ΔT. **2p**

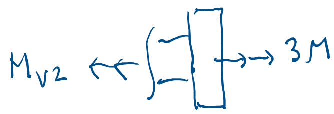
b) Vid vilken temperatur uppnås flytspänningen 325 MPa?
För b) och c), använd följande givna data: $E = 200000$ [MPa], $L = 1$ m, $b = 20$ mm, $h = 10$ mm, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ $1/^{o}$C **1p**

c) Vid vilken temperatur knäcker strävan (använd numeriska värden från b))? **2p** a)



Inre vridande moment i vänstra axeln M_{v1}:

$\rightarrow\!\!\rightarrow: \; -M_{v1} - M + 3M = 0 \Rightarrow M_{v1} = 2M$ //



Inre vridande moment i högra axeln M_{v2}:

$\rightarrow\!\!\rightarrow: \; -M_{v2} + 3M = 0 \Rightarrow M_{v2} = 3M$ //

---

b) Största skjuvspänning $\tau_{max1} = \dfrac{M_{v1}}{W_{v1}}$ $\quad \tau_{max2} = \dfrac{M_{v2}}{W_{v2}}$

där $W_{v1} = \text{"}\dfrac{\pi}{2b}(b^4 - a^4)\text{"} = \dfrac{\pi}{2\, D_1/2}\left((D_1/2)^4 - (d_1/2)^4\right) \approx 4254 \text{ mm}^3$

$W_{v2} = \dfrac{\pi}{2(D_2/2)}\left((D_2/2)^4 - 0\right) \approx 196 \text{ mm}^4$

$\Rightarrow \tau_{max1} \approx 4.7 \cdot 10^{-4} \cdot M \qquad \tau_{max2} \approx 1.5 \cdot 10^{-2} \cdot M$

Axeldel 2 ut "-- för störst spänning. Om den max får bli 100 MPa

$\Rightarrow M \leq 6.54 \cdot 10^3 \text{ Nmm} = 6.54 \text{ Nm}$ //

---

c) Vridning av axeldel 1:

$\varphi_1 = \dfrac{M_{v1} \cdot \ell_1}{G\, K_{v1}}$ där $\ell_1 = \ell$, $K_{v1} = \text{"}\dfrac{\pi}{2}(b^4 - a^4)\text{"} = \dfrac{\pi}{2}\left((D_1/2)^4 - (d_1/2)^4\right) = \approx 6.38 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

Vridning av axeldel 2:

$\varphi_2 = \dfrac{M_{v2} \cdot \ell_2}{G\, K_{v2}}$ där $\ell_2 = \ell/2$, $K_{v2} = \dfrac{\pi}{2}\left((D_2/2)^4 - 0^4\right) \approx 982 \text{ mm}^4$

Vridning av vänstra stela skivan $= \varphi_1 \approx 2{,}63 \cdot 10^{-3}$ rad //

Vridning av högra stela skivan $= \varphi_1 + \varphi_2 \approx 0.13$ rad //

a) Balkens d.e.

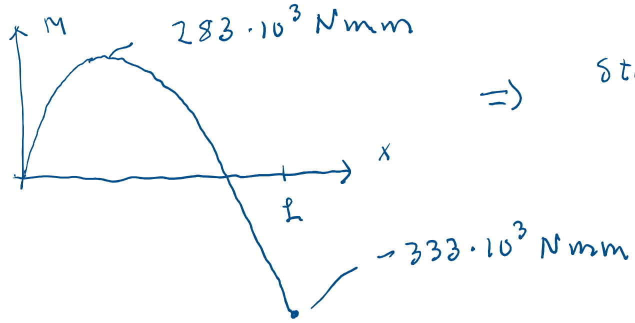
$$EI\, w^{IV}(x) = q(x) = q_0 (1 - x/L)^2$$

Randvillkor:

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ M(0) = 0 \Rightarrow -EI\, w''(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} w(L) = 0 \\ w'(L) = 0 \end{cases}$$

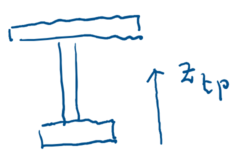
Python ger $M(x) = \dfrac{q_0 x}{60 L^2} \left(L^2 (13 \cdot L - 30x) + 20 L x^2 - 5x^3 \right)$

b) Python



$\Rightarrow$ Störst M till belopp 333 Nm //

c)



Areacentrums position

$$z_{tp} = \frac{b_2 t_2 \cdot t_2/2 + h \cdot t_3 (t_2 + h/2) + b_1 t_1 (t_2 + h + \frac{t_1}{2})}{b_2 t_2 + h t_3 + b_1 t_1}$$

≈ 14.4 mm //

Yttröghetsmomentet m.h.a. Steiners sats FS s. 8

$$I_y = \frac{b_2 t_2^3}{12} + b_2 t_2 (z_{tp} - t_2/2)^2 + \frac{t_3 \cdot h^3}{12} + t_3 h (z_{tp} - t_2 - h/2)^2 +$$

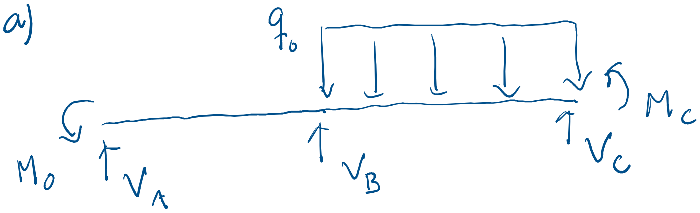
$$+ \frac{b_1 t_1^3}{12} + b_1 t_1 (z_{tp} - t_2 - h - t_1/2)^2 \approx 15{,}0 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

Största böjnormalspänning till belopp

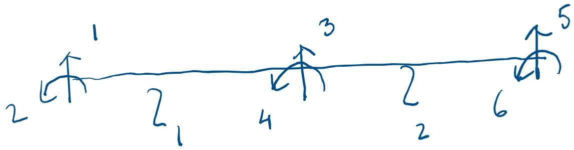
$$\sigma = \frac{\max(|M|) \cdot \max(|z|)}{I_y} \quad \text{där} \quad \underbrace{-z_{tp}}_{14.4} \le z \le \underbrace{(t_1 + t_2 + h - z_{tp})}_{11.6 \text{ mm}}$$

$\Rightarrow \sigma \approx 321$ MPa // (vid $x = L$ och $z = -z_{tp}$)

a)



Strukturfrihetsgrader



Givet: $a_1 = a_3 = a_5 = a_6 = 0$

$P_2 = M_0 \; , \; P_4 = 0$

Obekanta: $a_2 \, , a_4 \, , P_1 = V_A \, , P_3 = V_B \, , P_5 = V_c \, , P_6 = M_c$

Balkdel 1:

$$K^{e1} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad q^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

el.dof1 = [0, 1, 2, 3]

Balkdel 2:

$$K^{e2} = \frac{EI}{2L}\begin{bmatrix} 12 & 6\cdot 2L & -12 & 6\cdot 2L \\ 6\cdot 2L & 4\cdot(2L)^2 & -6\cdot 2L & 2\cdot(2L)^2 \\ -12 & -6\cdot 2L & 12 & -6\cdot 2L \\ 6\cdot 2L & 2\cdot(2L)^2 & -6\cdot 2L & 4\cdot(2L)^2 \end{bmatrix} \qquad q^2 = \frac{-q_0 \cdot 2L}{12}\begin{bmatrix} 6 \\ 2L \\ 6 \\ -2L \end{bmatrix}$$

el.dof2 = [2, 3, 4, 5]

Python $\underline{K}\,\underline{a} - \underline{f}_b - \underline{q} = \underline{0}$ (se FS s. 5)

med $q_0 = P/L$ och $M_0 = P \cdot L$

$\Rightarrow$

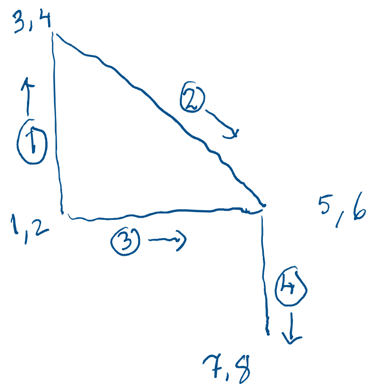
$$\begin{cases} P_1 = V_A = P \\ P_3 = V_B = -P/3 \\ P_5 = V_c = 5P/4 \\ P_6 = M_c = -PL/2 \end{cases}$$

b) Kraftjämvikt $V_A + V_B + V_c - q_0 \cdot 2L = 0$ OK!

Momentjämvikt kring A: $-M_0 - P_3 \cdot L + q_0 \cdot 2L \cdot 2L - P_5 \cdot 3L - P_6 = 0$

OK!

Inför strukturfrihetsgrader



Givet: $a_1 = 0$, $P_2 = -P$, $a_3 = a_4 = 0$

$a_5 = 0$, $P_6 = P$, $a_7 = a_8 = 0$

Obekanta: P_1, a_2, P_3, P_4, P_5, a_6, P_7, P_8

Stång 1: $L_1 = L$, $EA_1 = EA$, $\alpha_1 = \pi/2$, $\text{el.dof}_1 = [0, 1, 2, 3]$

Stång 2: $L_2 = \sqrt{2}\,L$, $EA_2 = EA$, $\alpha_2 = -\pi/4$, $\text{el.dof}_2 = [2, 3, 4, 5]$

Stång 3: $L_3 = L$, $EA_3 = EA$, $\alpha_3 = 0$, $\text{el.dof}_3 = [0, 1, 4, 5]$

Stång 4: $L_4 = L/2$, $EA_4 = EA$, $\alpha_4 = -\pi/2$, $\text{el.dof}_4 = [4, 5, 6, 7]$

Python ⇒ vertikal förskjutningar $a_2 \approx -0.476$ mm

$a_6 \approx 0.202$ mm //

b)

Spänningarna i stängerna blir $\sigma_1 = 100$ MPa

$\sigma_2 = -21.2$ MPa

$\sigma_3 = 0$

$\sigma_4 \approx 85.0$ MPa

för $P = 3$ kN. Då systemet är linjärt elastiskt så kan P ökas med faktorn $\frac{250}{100} = 2.5$, då uppnås σ_s i stång 1

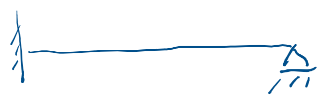
$\Rightarrow P_s = 7.5$ kN //

a) Termomekaniskt belastad stång (FS s.4)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

Förlängning: $\delta = \varepsilon \cdot L = \left(\frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T\right) \cdot L$

Förlängningen måste vara $= 0$



$\Rightarrow$ Spänningen i stången blir

$$\sigma = -E \alpha \Delta T \;//$$

Kraften blir $P = \sigma \cdot A = -EA \alpha \Delta T \;//$

b) Flytspänning σ_s uppnås då $\sigma_s = E \alpha \Delta T \Rightarrow$

$$\Delta T = \frac{\sigma_s}{E \alpha} \approx 135\ °C \;//$$

c) Euler 3, FS s.24

$$P_{kr} = \frac{2{,}05 \cdot \pi^2 E I}{L^2} = \frac{2{,}05 \cdot \pi^2 \cdot \cancel{E} \cdot \frac{\cancel{b}h^3}{12}}{L^2} \overset{a)}{=} \cancel{E} \underbrace{A}_{\cancel{b}h} \alpha \Delta T_{kr}$$

$$\Rightarrow \Delta T_{kr} = \frac{2{,}05 \cdot \pi^2 h^2}{12 \cdot L^2 \alpha} \approx 14\ °C \;//$$