Tentamen i IMS090, 2024-03-15

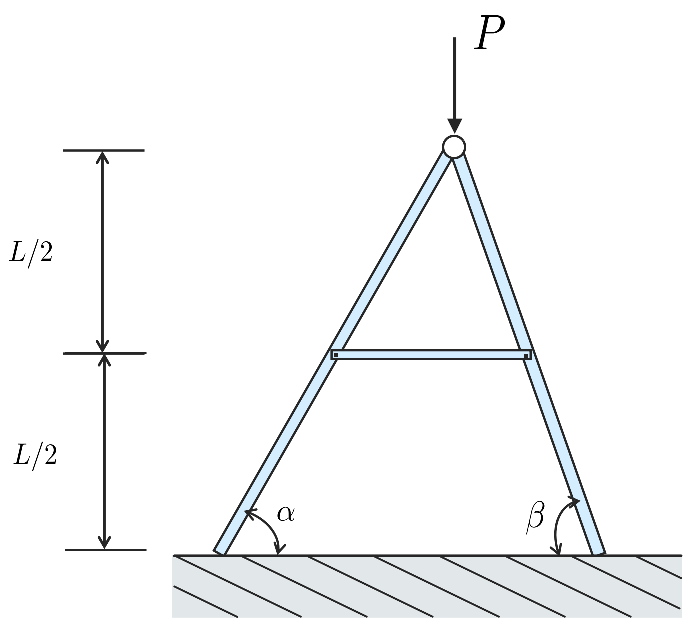
- **Tid:** 14:00-18:00 **Lokal:** SB-D209.
- **Lärare:** Magnus Ekh, tele 7723479, 0708-282358
  Besöker salen vid start av tentamen samt kl 15:30, 16:45.
- **Hjälpmedel**
  - ”Formelsamling i hållfasthetslära för IMS090”, Ekh, Hansbo, Brouzoulis. OBS! Inga egna anteckningar.
  - Python på datorerna
- **Intruktioner**
  - På dina inlämnade handskrivna lösningar ange förutom anonym kod även datornamn
  - Datornamnet hittar ni genom att öppna startmenyn och skriva ”about” och får då upp information om datorn.
  - Viktigt att ange källhänvisning till ekvationer som används, t.ex. ”FS sida 8”. Samt om ni använder resultat från era Pythonfiler ange filnamnet, t.ex. från `filnamn.py` fås $a = 3$.
  - Spara eventuella Pythonfiler som ni använder i era lösningar under `c:\__exam__\Assignments\`
  - I dessa filer skriv `#` följt av er anonyma kod på den översta raden, `# IMS090-123456`
- **Lösningar**: Anslås på kurshemsidan (Canvas) dagen efter tentamen.
- **Resultat**: Medddelas senast 28 mars. Då kommer också tillfällen för granskning att meddelas.

- **Poängbedömning**: Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

- **Betygsgränser**:
  20-25p: betyg 5
  15-19p: betyg 4
  10-14p, betyg 3
  0-9p, betyg U

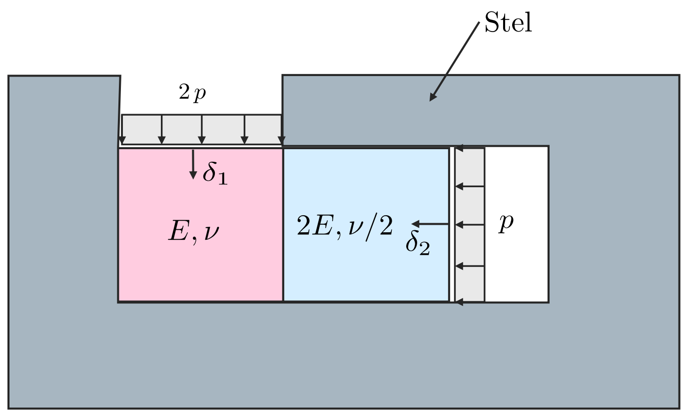
Uppgift 1

En stege är konstruerad av 3 sammansatta delar. Den horisontella delen kan antas ledat infäst i stegens ben. Överst på stegen verkar kraften P. Antag friktionsfritt mellan stegens ben och marken. Bestäm minsta area som krävs i den horisontella delen då högsta tillåtna spänning är 100 MPa. Antag $P = 1500$ N, $L = 4$ m, $\alpha = 60^o$, $\beta = 70^o$. **5p**



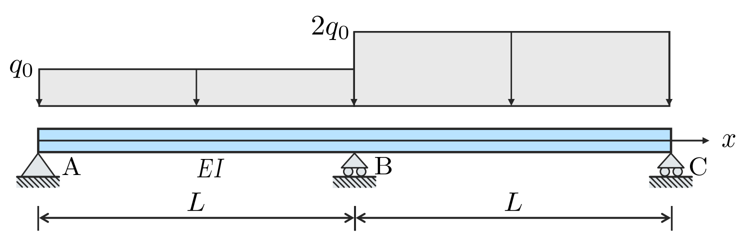
Uppgift 2

Två lika stora kuber (med sidlängder a, a och a) är placerade i en stel kropp. Båda kuberna kan expandera fritt ut ur planet och kan antas vara linjärt, isotropt elastiska. Den vänstra kuben har elasticitetetsmodul E och Poissons tal ν medan det högra har elasticitetetsmodul $2\,E$ och Poissons tal $\nu/2$. Bestäm förskjutningarna δ_1 och δ_2 då kuberna utsätts för belastningarna $2p$ respektive p, se figuren. Antag friktionsfria kontakter överallt. **5p**



Uppgift 3

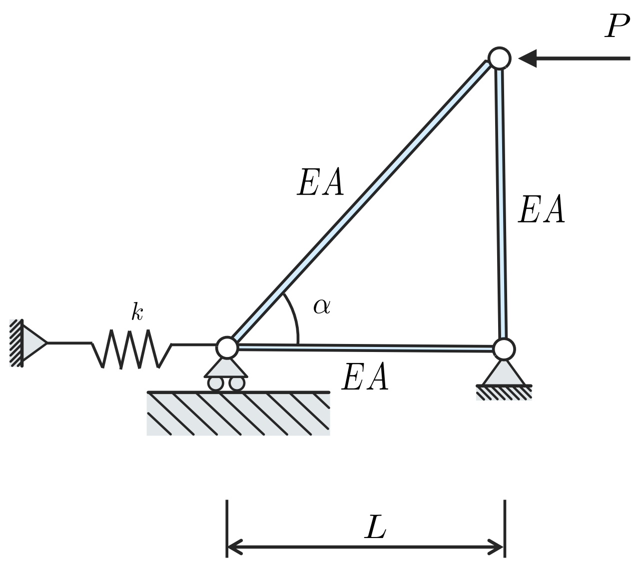
En balk är fritt upplagd på tre stöd enligt figuren. Den belastas med den utbredda q_0 på sin vänstra del, samt $2\,q_0$ på sin högra del. Balken har böjstyvheten EI och totalt längden $2\,L$. Bestäm samtliga stödreaktioner.



5p

Uppgift 4

Ett stångsystem består av tre stänger och en fjäder enligt figuren nedan. Stängerna är gjorda av samma material med elasticitetsmodulen E och samma tvärsnittsarea A.



(a) För fjäderstyvhet $k = EA/(10 \cdot L)$ och cirkulärt tvärsnitt hos stängerna, bestäm lägsta storleken på P när någon stång plasticerar eller knäcker. Antag följande numeriska värden $A = 100$ mm^2, $L = 500$ mm, $E = 210 \cdot 10^3$ MPa, $\alpha = \pi/4$, och flytgräns $\sigma_s = 400$ MPa.

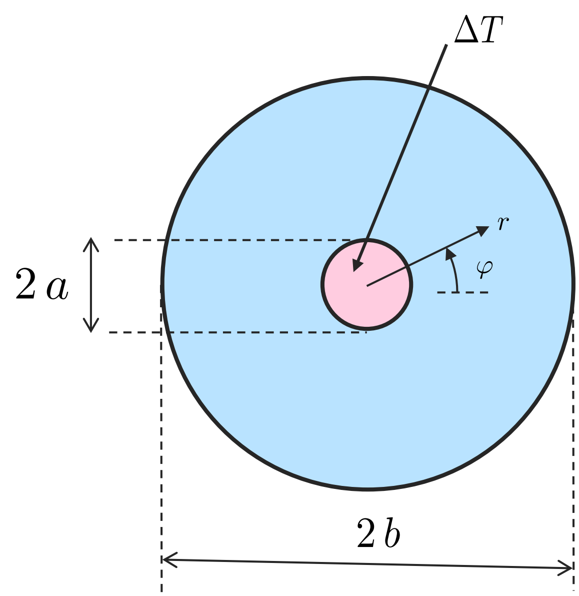
(b) Bestäm förskjutningen av knutpunkten för lasten P som bestämdes från (a).

5p

Uppgift 5

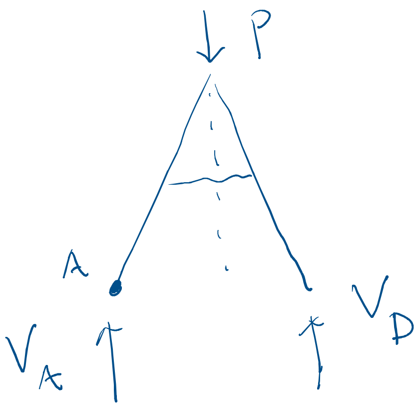
En tunn axisymmetrisk skiva med innerradie a och ytterradie b utsätts för en axisymmetrisk belastning. Denna belastning kommer från en cylinder (med radie a) som utsätts för en temperaturökning ΔT. En sådan temperaturökning ger en omkretstöjning $\epsilon_\varphi = \alpha_T \, \Delta T$ (i hela cylindern) där α_T är längdutvidgningskoefficienten.

För att designa den axisymmetriska skivan med säkerhet så antar vi ett belastningsfall där cylinderns temperaturutvidgning inte påverkas av den axisymmetriska skivan. Bestäm hur von Mises effektivspänning i den axisymmetriska skivan varierar för $a \leq r \leq b$. Antag plant spänningstillstånd och att skivan är obelastad i radiell led vi $r = b$.



Givna data: a=50 mm, b = 100 mm, $E = 200 \cdot 10^3$ MPa, $\nu = 0.3$, $\Delta T = 100^o$ C $\alpha_T = 10^{-5}$ $1/^oC$. **5p**

Frilägg hela stegen

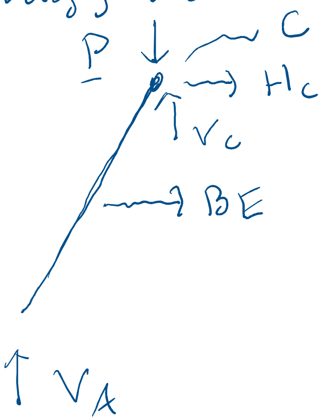


$$\uparrow: V_A + V_D - P = 0$$

$$\overset{\curvearrowright}{A}: P \cdot L\cos\alpha - V_D\, L(\cos\alpha + \cos\beta) = 0$$

$$\text{Python} \Rightarrow \begin{cases} V_A = P \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} \\[2ex] V_D = P \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha + \cos\beta} \end{cases}$$

Frilägg vänster ben:



krafter från höger ben

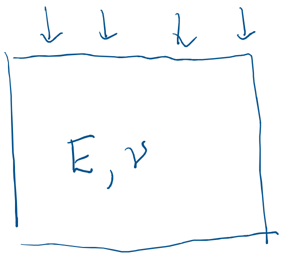
$$\overset{\curvearrowright}{C}: V_A\, L \cdot \cos\alpha - BE\, L/2 = 0$$

$$\Rightarrow BE = 2\, V_A \cos(\alpha)$$

Spänningen i BE är: $\sigma_{BE} = \dfrac{2\, V_A \cos(\alpha)}{A} = \dfrac{2P\cos(\beta)\cos(\alpha)}{A(\cos\alpha + \cos\beta)}$

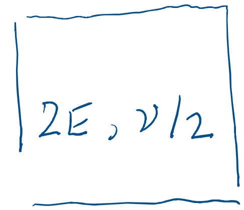
Villkor $\sigma_{BE} \le \sigma_{till} \Rightarrow A \ge \dfrac{2P\cos(\beta)\cos(\alpha)}{\sigma_{till}(\cos(\alpha) + \cos(\beta))} \approx 6.1\ \text{mm}^2$ //

Vänster kub



$$\begin{cases} \sigma_{y1} = -2p \\ \sigma_{x1} = -p \\ \delta_1 = -\varepsilon_{y1} \cdot a \\ \sigma_{z1} = 0 \end{cases}$$

Höger kub



$$\begin{cases} \varepsilon_{y2} = 0 \\ \sigma_{x2} = -p \\ \delta_2 = -\varepsilon_{x1} \cdot a - \varepsilon_{x2}\, a \\ \sigma_{z2} = 0 \end{cases}$$

Plan spänning, FS, s20

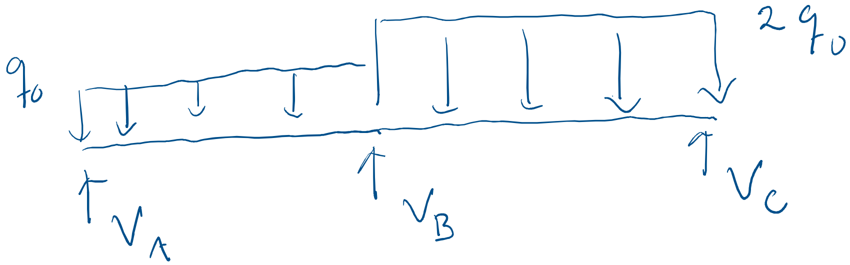
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{x1} \\ \sigma_{y1} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -p \\ -2p \end{bmatrix}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{x1} \\ \varepsilon_{y1} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \varepsilon_{x1} \\ -\delta_1/a \end{bmatrix}}$$

Python $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} \varepsilon_{x1} \\ -\delta_1/a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p}{E}(2\nu-1) \\ \frac{p}{E}(\nu-2) \end{bmatrix}$

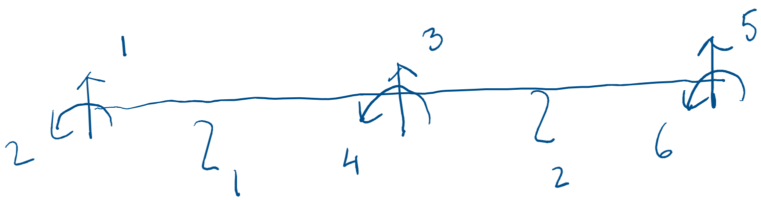
$\Rightarrow \delta_1 = \frac{pa}{E}(2-\nu)$ //

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{x2} \\ \sigma_{y2} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} +p \\ \sigma_{y2} \end{bmatrix}} = \frac{2E}{1-(\nu/2)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu/2 \\ \nu/2 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{x2} \\ \varepsilon_{y2} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -\varepsilon_{x1} - \delta_2/a \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Python $\Rightarrow$ $\delta_2 = \frac{pa}{8E}\left(-\nu^2 - 16\cdot\nu + 12\right)$ //



Strukturfrihetsgrader



<u>Givet:</u> $a_1 = a_3 = a_5 = 0$

$P_2 = P_4 = P_6 = 0$

<u>Obekanta:</u> $a_2, a_4, a_6, P_1 = V_A, P_3 = V_B, P_5 = V_C$

Balkdel 1:

$$K^{e1} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$q^1 = -\frac{q_0 L}{12}\begin{bmatrix} 6 \\ L \\ 6 \\ -L \end{bmatrix}$$

el. dof1 = [0, 1, 2, 3]

Balkdel 2: $K^{e2} = K^{e1}$

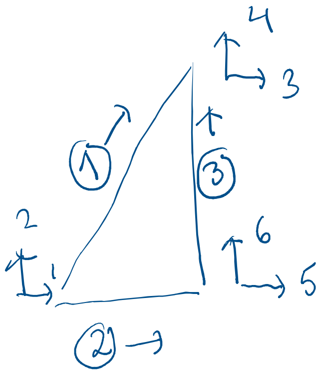
$$q^2 = \frac{-2q_0 L}{12}\begin{bmatrix} 6 \\ L \\ 6 \\ -L \end{bmatrix}$$

el. dof2 = [2, 3, 4, 5]

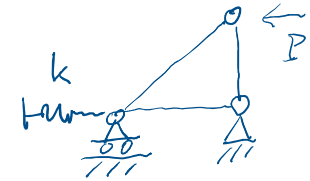
Python $\underline{K}\,\underline{a} - \underline{f}_b - \underline{q} = \underline{0}$ (se FS s. 5)

$$\Rightarrow V_A = q_0 L \frac{5}{16}, \quad V_B = q_0 L \frac{15}{8}, \quad V_C = q_0 L \frac{13}{16} \quad //$$

Strukturfrihetsgrader



a)



givet: $a_2 = a_5 = a_6 = 0$, $P_1 = -k\,a_1$

$P_3 = -P$, $P_4 = 0$

obekanta: a_1, a_3, a_4, P_2, P_5, P_6

stång 1: $L_1 = \dfrac{L}{\cos\alpha}$, EA, $\alpha_1 = \alpha$, el.dof1 = [0, 1, 2, 3]

stång 2: $L_2 = L$, EA, $\alpha_2 = 0$, el.dof2 = [0, 1, 4, 5]

stång 3: $L_3 = L \cdot \tan(\alpha)$, EA, $\alpha_3 = \pi/2$, el.dof3 = [4, 5, 2, 3]

Python ⟹ $a_1 = -0.91\,\dfrac{PL}{EA}$, $a_3 \approx -4.74 \cdot \dfrac{PL}{EA}$, $a_4 = \dfrac{PL}{EA}$

$P_2 = P$, $P_5 = 0.91 \cdot P$, $P_6 = -P$

Förlängningar $\delta = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \end{bmatrix}$

Töjningar $\varepsilon = \delta / L$

Spänningar $\sigma = E\,\varepsilon$ Python ⟹ $\sigma_1 \approx -1.41 \cdot P/A$

$\sigma_2 \approx 0.42 \cdot P/A$ $\sigma_3 = P/A$

$\Rightarrow$ Plasticering undviks om

$$P_{plast} \leq \frac{\sigma_s \cdot A}{1.41} \approx 28.3 \text{ kN}$$

Knäckning enligt Euler 2 : $\quad P_{E2} = \frac{\pi^2 E I}{L^2}$

Enbart stång 1 utsätts för tryck

$$N_1 \approx -1,41 \cdot P$$

Cirkulärt tvärsnitt : $\quad A = \pi r^2 \,, \quad I = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{A^2/\pi}{4}$

$$\Rightarrow \quad 1,41 \cdot P_{knäck} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A^2}{\pi \cdot 4 \cdot L_1^2}$$

$$\Rightarrow \quad P_{knäck} \approx \frac{\pi \cdot E A^2}{1.41 \cdot 4 \cdot L_1^2} \approx 2,33 \text{ kN}$$

Dvs det knäcker före det plasticerar, det sker för $P \approx 2,33$ kN

b) a_3 fås nu till $\approx -0,26$ mm //

Axisymmetri: $u_r(r) = A_1 r + A_2/r$ då $K_r = 0$ (FS s.23)

Töjningar: $\varepsilon_r = du_r/dr$, $\varepsilon_\varphi = u_r/r$

Spänningar, plan spänning, Hookes lag:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \end{bmatrix}$$

Randvillkor:

Cylinder $\varepsilon_\varphi = \alpha_T \Delta T = u_r(a)/a \Rightarrow u_r(a) = a\,\alpha_T \Delta T$

$\sigma_r(b) = 0$

von Misesspänning $\sigma_e^{vM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 + (\sigma_r - \sigma_\varphi)^2}$

Se Python.