Tentamen i IMS090, 2022-06-02

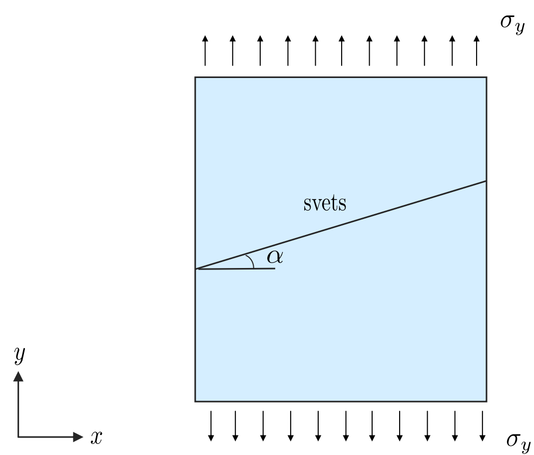
- **Tid:** 14:00-18:00 **Lokal:** SB-D509.
- **Lärare:** Magnus Ekh, tele 7723479, 0708-282358
  Besöker salen vid start av tentamen samt kl 15:30 och 17:00.
- **Hjälpmedel**
  - "Formelsamling i hållfasthetslära för IMS090", Ekh, Hansbo, Brouzoulis. OBS! Inga egna anteckningar.
  - Matlab (inklusive dess inbyggda dokumentation) på datorerna
- **Intruktioner**
  - På dina inlämnade handskrivna lösningar ange förutom anonym kod även datornamn
  - Datornamnet hittar ni genom att öppna startmenyn och skriva "about" och får då upp information om datorn.
  - Viktigt att ange källhänvisning till ekvationer som används, t.ex. "FS sida 8". Samt om ni använder resultat från era Matlabfiler ange filnamnet, t.ex. från `filnamn.m` fås $a = 3$.
  - Spara eventuella Matlabfiler som ni använder i era lösningar under `c:\__exam__\Assignments\`
  - I dessa matlabfiler skriv `%` följt av er anonyma kod på den översta raden,
    `% IMS090-123456`
- **Lösningar**: Anslås på kurshemsidan (Canvas) dagen efter tentamen.
- **Betygslista**: Medddelas senast 14 juni på Canvas.

- **Poängbedömning**: Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

- **Betygsgränser**:
  20-25p: betyg 5
  15-19p: betyg 4
  10-14p, betyg 3
  0-9p, betyg U

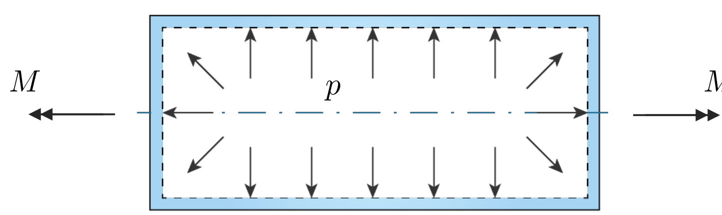
Uppgift 1

En skiva utsätts för normalspänningen $\sigma_y = 100$ MPa enligt figuren (alla övriga spänningar är noll). Skivan består av två delar som är sammansvetsade i en vinkel $\alpha = 30^o$ (mot en horisontallinje). Bestäm normalspänning och skjuvspänning i svetsen.



Uppgift 2

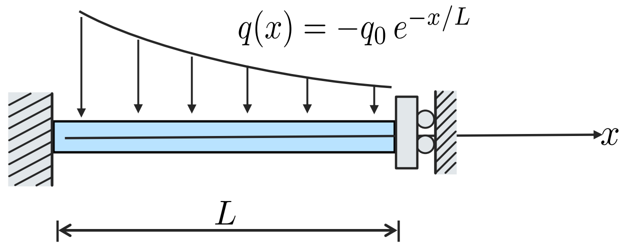
En sluten tunnväggig cylindrisk behållare med medelradie $r = 100$ mm och väggtjocklek $h = 3$ mm utsätts för det inre övertrycket $p = 3$ MPa enligt figuren. Om dessutom det vridande momentet M verkar på behållaren,



bestäm största M så att von Mises effektivspänning i cylinderns mantelyta inte överskrider 200 MPa.

Uppgift 3

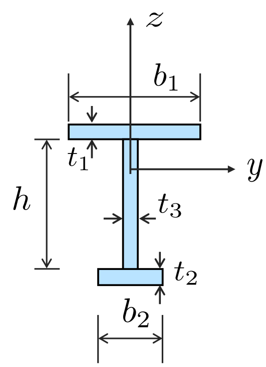
En balk belastas med en utbredd last $q(x)$ enligt figuren. Balken har böjstyvheten EI och längden L.



(a) Bestäm balkens utböjning $w(x)$ och samtliga stödreaktioner.

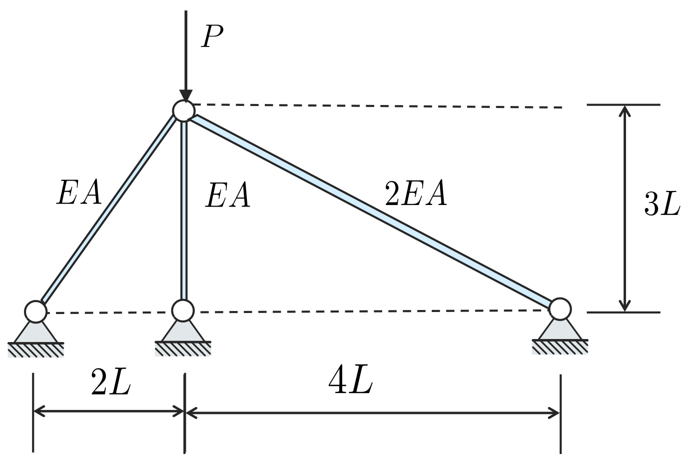
(b) Antag $L = 1$ m och $q_0 = 5$ N/mm. Bestäm största böjmomentet längs balken.

(c) Bestäm största normalspänningen i balken med följande tvärsnitt där $t_1 = t_2 = t_3 = 4$ mm, $b_1 = 40$ mm $b_2 = b_1/2$, $h = 50$ mm.



Uppgift 4

Ett stångsystem består av tre stänger enligt figuren nedan. Stängerna är gjorda av samma material med elasticitetsmodulen E. Däremot är tvärsnittsarean dubbelt så stor för den högra stången jämfört med tvärsnittsarean för de två övriga.

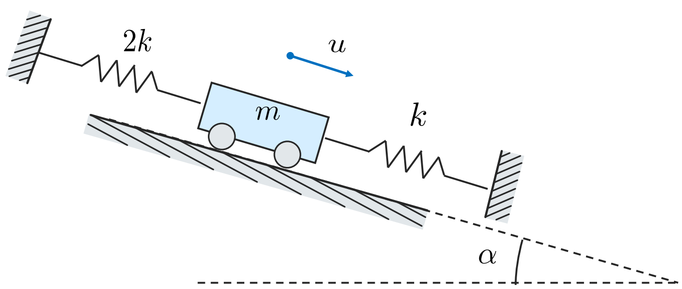


(a) Bestäm förskjutningen av knutpunkten där lasten P appliceras. Antag följande numeriska värden $A = 100$ mm^2, $L = 500$ mm, $E = 210 \cdot 10^3$ MPa och $P = 10$ kN.

(b) Bestäm storleken på P när någon stång plasticerar. Antag flytgräns $\sigma_s = 400$ MPa i samtliga stänger.

Uppgift 5

En massa m som rullar friktionsfritt är inpänd mellan två fjädrar med fjäderstyvhet k respektive $2k$ enligt figuren. Lutningen på underlaget är given av vinkeln α. Antag att $u = 0$ och massans hastighet är stilla vid tiden $t = 0$. Antag att fjädrarna är ospända för $u = 0$ och att tyngdaccelerationen är g.



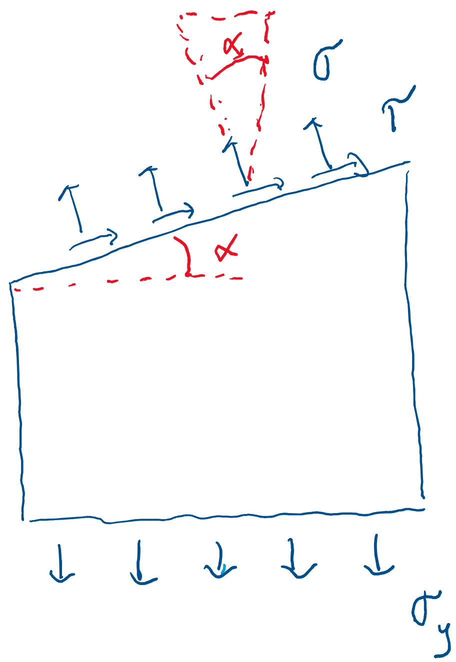
a) Bestäm största och minsta värde på förskjutningen $u(t)$ för $t \geq 0$.

b) Bestäm största och minsta krafterna i fjädrarna för $t \geq 0$.

c) Efter ett antal svängningar i verkligheten (fås om t.ex. friktionsförluster hade beaktats) kommer massan att bli stilla och uppnå jämvikt. Vad är förskjutningen u i detta läge samt hur stora är fjäderkrafterna?

Givna data: m=10 kg, $k = 100$ N/m, lutningen $\alpha = 15^o$, $g = 9.81$ m/s^2.

1) Alt 1)



Antag bredd ℓ och tjocklek t

$$\uparrow: -\sigma_y \cancel{\ell}\cdot\cancel{t} + \sigma\cos(\alpha)\frac{\cancel{\ell}}{\cos(\alpha)}\cdot\cancel{t}$$

$$+\tau\sin(\alpha)\frac{\cancel{\ell}}{\cos(\alpha)}\cdot\cancel{t} = 0 \qquad (1)$$

$$\rightarrow: -\sigma\sin(\alpha)\frac{\cancel{\ell}}{\cancel{\cos(\alpha)}}\cancel{t} + \tau\cos(\alpha)\frac{\cancel{\ell}}{\cancel{\cos(\alpha)}}\cdot\cancel{t} = 0 \qquad (2)$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \tau = \sigma\cdot\tan(\alpha) \text{ insatt i } (1)$$

$$\Rightarrow -\sigma_y + \sigma + \sigma\cdot\tan^2(\alpha) = 0$$

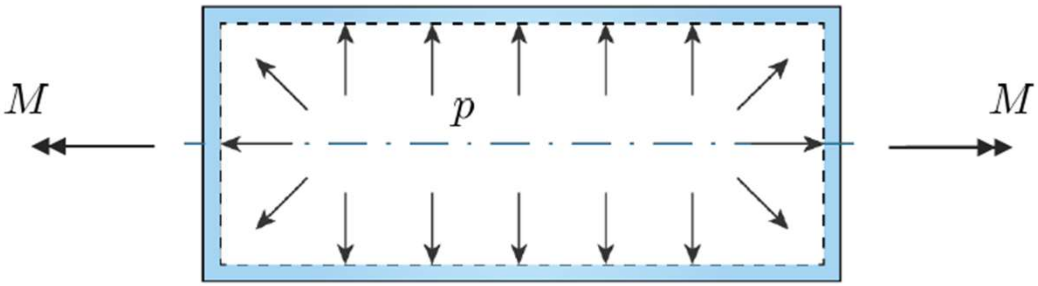
$$\Rightarrow \sigma = 75 \text{ MPa} \;//$$

$$\Rightarrow \tau = 75\cdot\tan(30\cdot\pi/180) \approx 43{,}3 \text{ MPa} \;//$$

Alt 2. mha FS

```
clear all
Sy=100; %MPa
alpha=30*pi/180;
%Enligt FS s. 19, med
phi=pi/2+alpha;
sigma=Sy/2-Sy/2*cos(2*phi)
tau=Sy/2*sin(2*phi)
```

2)



Ångpanneformlerna FS s. 20

$$\sigma_r \approx 0, \quad \sigma_\varphi = \frac{pa}{h}, \quad \sigma_z = \frac{pa}{2h}$$

vridning FS s. 3

$$\tau_{\varphi z} = \frac{M}{2\pi a^2 h}$$

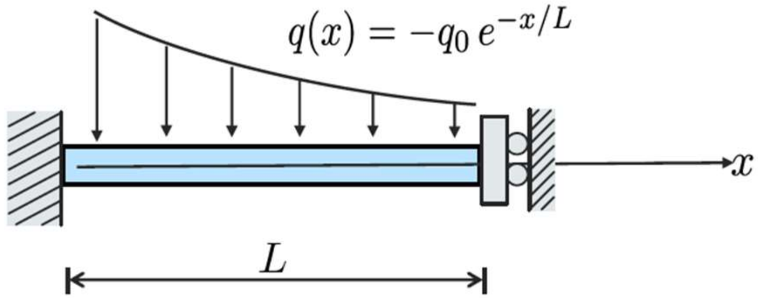
von Mises FS s. $\quad \sigma_{vM} = \sqrt{\sigma_\varphi^2 + \sigma_z^2 - \sigma_\varphi \sigma_z + 3\tau_{\varphi z}^2}$

matlab

```
syms M 'real'
a=100; %mm
h=3; %mm
p=3; %MPa
%ångpanneformler
Sr=0;
Sphi=p*a/h;
Sz=p*a/2/h;
Tauzphi=M*a/(2*pi*a^2*h) %vridning
SvM=sqrt( Sphi^2+Sz^2-Sphi*Sz+3*Tauzphi^2 )
%von Mises
sol=solve(SvM==200,M)
double(sol)
```

$\Rightarrow |M| \approx 1{,}96 \cdot 10^5$ Nmm

3



a) Allmän lösning FS s.4

$$w(x) = C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 + \frac{1}{EI_y}\int\int\int\int q(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x$$

RV

$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$

$T(L) = 0$, $w'(L) = 0$

Matlab (se nedan)

$$w(x) = \left[12 \cdot L^4 q_0\, e^{-x/L} - 6L^2 q_0 x^2 - 12L^4 q_0 + 12L^3 q_0 x + 2L q_0 x^3 e^{-1} + 3L^2 q_0 x^2 e^{-1}\right] / (12EI)$$

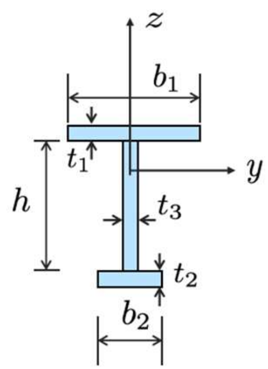
stödreaktioner $T(0) = q_0 L e^{-1}(e-1)$, $M(0) = -q_0 L^2 e^{-1}/2$

$T(L) = 0$, $M(L) = q_0 L^2 e^{-1} \cdot (2 \cdot e^1 - 5)/2$

b)

se Matlabkod $|M|_{max} = |M(0)| \approx 9{,}2 \cdot 10^5$ Nmm

c)



z_{tp}

$$z_{tp} = \frac{b_2 t_2\, t_2/2 + h t_3 (t_2 + t_3/2) + b_1 t_1 (t_2 + h + t_1/2)}{b_2 t_2 + h t_3 + b_1 t_1} \approx 33{,}9 \text{ mm}$$

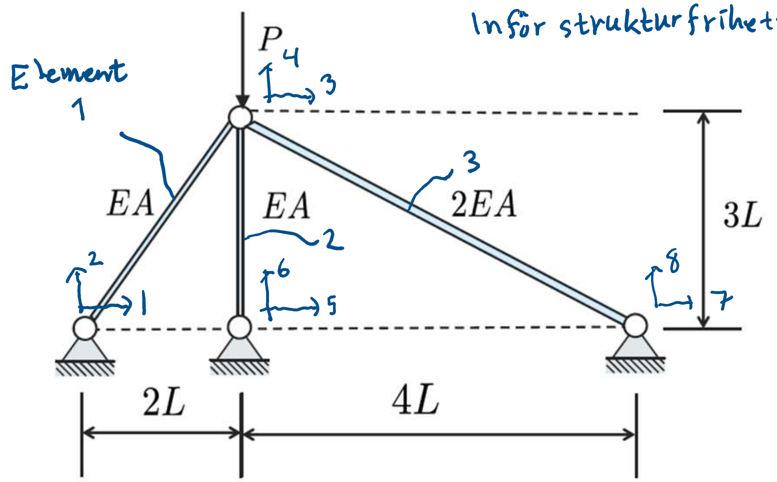
$$I = \{\text{FS s } 6\} = \frac{b_2 t_2^3}{12} + b_2 t_2 (z_{tp} - t_2/2)^2 +$$
$$t_3 h^3/12 + t_3 h\,(z_{tp} - t_2 - h/2)^2 +$$
$$b_1 t_1^3/12 + b_1 t_1\,(z_{tp} - t_2 - h - t_1/2)^2 \approx 2{,}06 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

Största normalspänningen

$$\sigma_{max} = \frac{|M|_{max} \, z_{max}}{I} \qquad \text{där } z_{max} = \max\left(z_{tp},\ t_2+h+t_1-z_{tp}\right) = z_{tp}$$

$$\Rightarrow \sigma_{max} \approx 151 \text{ MPa}$$

```matlab
syms x q0 L C1 C2 C3 C4 EI 'real'
w(x)=C1*x^3/6+C2*x^2/2+C3*x+C4+int( int( int( int( q0*exp(-x/L)/EI,x ),x ),x ),x )
wprime(x)=diff(w(x),x)
M(x)=-EI*diff( wprime(x),x )
T(x)=diff(M(x),x)
rv1=w(0)==0;
rv2=wprime(0)==0;
rv3=wprime(L)==0;
rv4=T(L)==0;
obekanta=[C1,C2,C3,C4];
ekvationer=[rv1,rv2,rv3,rv4];
sol=solve(ekvationer,obekanta)
simplify( subs(T(0),C1,sol.C1) )
simplify( subs(M(0),C2,sol.C2) )
simplify( subs(T(L),C1,sol.C1) )
simplify( subs(M(L),[C1,C2],[sol.C1,sol.C2]) )
w_(x)=simplify( subs(w(x),{C1,C2,C3,C4},{sol.C1,sol.C2,sol.C3,sol.C4}) )
M_(x)=simplify( subs( subs(M(x),[C1,C2],[sol.C1,sol.C2]),[q0,L],[5e0,1e3] ) )
xx=linspace(0,1000,1000);
plot(xx,M_(xx))
Mmax=double( max( abs(M_(xx)) ));

t1=4; t2=t1; t3=t1; b1=40; b2=b1/2; h=50;
ztp=(b2*t2*t2/2+t3*h*(t2+h/2)+t1*b1*(t2+h+t1/2))/(b2*t2+t3*h+b1*t1)
zmin=ztp
zmax=t2+h+t1-ztp
%Steiners sats
I=b2*t2^3/12+b2*t2*(ztp-t2/2)^2+...
    t3*h^3/12+t3*h*(ztp-t2-h/2)^2+...
    b1*t1^3/12+b1*t1*(ztp-t2-h-t1/2)^2
Sigma_max=double(Mmax*zmin/I)
```



Inför strukturfrihetsgrader enl. fig

$\underline{P} = [\, P_1 \;\; P_2 \;\; 0 \;\; -P \;\; P_5 \;\; P_6 \;\; P_7 \;\; P_8 \,]^T$

$\underline{a} = [\, 0 \;\; 0 \;\; a_3 \;\; a_4 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \,]^T$

Element 1 $\quad \ell_1 = L\sqrt{2^2+3^2}$, $\quad \alpha_1 = \operatorname{atan}(3/2)$

bidrag till frihetsgrader 1–4

Element 2 $\quad \ell_2 = 3L \quad \alpha_2 = \pi/2 \quad$ bidrar till frihetsgrader 5, 6, 3 4

Element 3 $\quad \ell_3 = 5L \quad \alpha_3 = \pi - \operatorname{atan}(3/4) \quad$ bidrar till frihetsgrader 7, 8, 3, 4

a) Matlabkod ger $a_3 \approx -0{,}068$ mm, $a_4 \approx -0{,}36$ mm

b) Använd $\delta_1 = [\, -\cos(\alpha_1) \;\; -\sin(\alpha_1) \;\; \cos(\alpha_1) \;\; \sin(\alpha_1) \,]\,[\, a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \;\; a_4 \,]^T$

$\delta_2 = [\, -\cos(\alpha_2) \;\; -\sin(\alpha_2) \;\; \cos(\alpha_2) \;\; \sin(\alpha_2) \,]\,[\, a_5 \;\; a_6 \;\; a_3 \;\; a_4 \,]^T$

$\delta_3 = [\, -\cos(\alpha_3) \;\; -\sin(\alpha_3) \;\; \cos(\alpha_3) \;\; \sin(\alpha_3) \,]\,[\, a_7 \;\; a_8 \;\; a_3 \;\; a_4 \,]^T$

töjning $\quad \varepsilon_1 = \delta_1/\ell_1$, $\quad \varepsilon_2 = \delta_2/\ell_2$, $\quad \varepsilon_3 = \delta_3/\ell_3$

spänning $\quad \sigma_1 = E\varepsilon_1 \approx -39{,}5$ MPa, $\quad \sigma_2 = E\varepsilon_2 \approx -50{,}7$ MPa

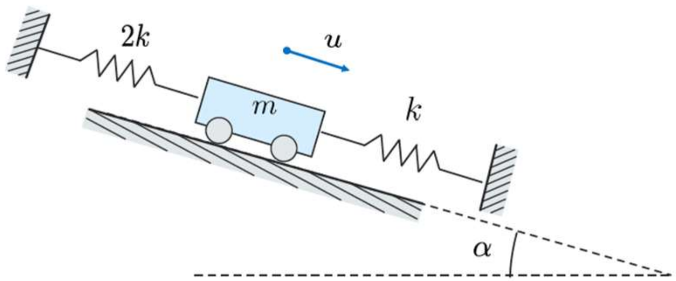
$\sigma_3 = E\varepsilon_3 \approx -13{,}7$ MPa

Det betyder att stång 2 plasticerar först.

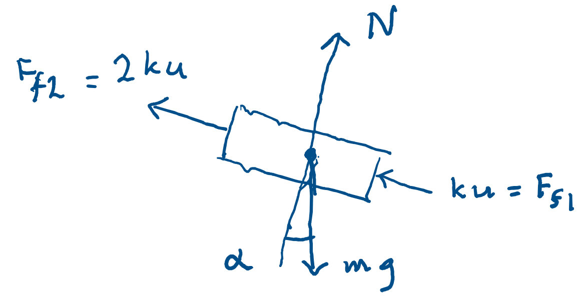
Eftersom strukturen är linjär så ökar spänningarna linjärt med $\underline{P}$.

$\Rightarrow$ stång 2 plasticerar för $\underline{P} = 10 \cdot 10^3 \cdot \dfrac{400}{50{,}7} \approx 7{,}89 \cdot 10^4$ N //

```matlab
syms a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 P8 'real'
%syms E A L alpha 'real'
E=210e3; A=100;
L=500;
P=10e3;
%givna storheter
a1=0; a2=0; P3=0; P4=-P; a5=0; a6=0; a7=0; a8=0;
%definiera vektorer
avektor=[a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8]'; Pvektor=[P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 P8]';
Ktot=sym(zeros(8,8));
%elementstyvhetsmatris
Kel=@(E,A,L,s,c) E*A/L*[c^2 c*s -c^2 -c*s; ...
                        c*s s^2 -c*s -s^2; ...
                        -c^2 -c*s c^2 c*s; ...
                        -c*s -s^2 c*s s^2];

%element 1
L1=L*sqrt( 4+9 ); E1=E; A1=A;
alpha1=atan(3/2);
Kel_1=Kel(E1,A1,L1,sin(alpha1),cos(alpha1))
Ktot(1:4,1:4)=Ktot(1:4,1:4)+Kel_1;
%element 2
L2=L*3; E2=E; A2=A;
alpha2=pi/2;
Kel_2=Kel(E2,A2,L2,sin(alpha2),cos(alpha2))
Ktot([5 6 3 4],[5 6 3 4])=Ktot([5 6 3 4],[5 6 3 4])+Kel_2;
%element 3
L3=L*5; E3=E; A3=2*A;
alpha3=pi-atan(3/4);
Kel_3=Kel(E3,A3,L3,sin(alpha3),cos(alpha3))
Ktot([7 8 3 4],[7 8 3 4])=Ktot([7 8 3 4],[7 8 3 4])+Kel_3;
%lös problem
sol=solve(Ktot*avektor==Pvektor,[P1,P2,a3,a4,P5,P6,P7,P8])
double(sol.a3)
double(sol.a4)

%förlängningar
c=cos(alpha1); s=sin(alpha1);
delta1=double( [-c -s c s]*[a1 a2 sol.a3 sol.a4]')
epsilon1=delta1/L1
sigma1=E*epsilon1
c=cos(alpha2); s=sin(alpha2);
delta2=double( [-c -s c s]*[a5 a6 sol.a3 sol.a4]' )
epsilon2=delta2/L2
sigma2=E*epsilon2
c=cos(alpha3); s=sin(alpha3);
delta3=double( [-c -s c s]*[a7 a8 sol.a3 sol.a4]')
epsilon3=delta3/L3
sigma3=E*epsilon3

%plasticering
Pplast=P*400/max( abs([sigma1,sigma2,sigma3]) )
```



Rörelseekv.



$\rightarrow: \; m\ddot{u} = mg\sin(\alpha) - 3ku$

skriv om till 1:a ordningens system med $v = \dot{u}$:

$$\begin{cases} \dot{v} = g\sin(\alpha) - 3ku/m \\ \dot{u} = v \end{cases}$$

Matlab

```
m=10; k=100; g=9.81; alpha=15*pi/180; %indata
t=linspace(0,10,1000); %tidshistoria
u0=[0 0]; %initialvillkor
[t,u]=ode45(@(t,u)
odefcn1a(t,u,m,k,g,alpha),t,u0);
figure(5)
plot(t,u(:,2))
max(u(:,2))
min(u(:,2))
%fjäderkrafterna
Ff1=k*u(:,2); Ff2=2*k*u(:,2);
plot(t,Ff1,t,Ff2)
max(Ff1)
min(Ff1)
max(Ff2)
min(Ff2)

function dudt = odefcn1a(t,u,m,k,g,alpha)
dudt = zeros(2,1);
dudt(1) = g*sin(alpha)-3*k/m*u(2);
dudt(2) = u(1);
end
```

Matlab $\Rightarrow$

a) $\max(u) \approx 0{,}17$ m

$\min(u) = 0$

b) $\max(F_{f1}) \approx 17$ N

$\min(F_{f1}) = 0$

$\max(F_{f2}) \approx 34$ N

$\min(F_{f2}) = 0$

c) Kvasistatisk lösning $\ddot{u} = 0$ (jämvikt)

$\Rightarrow$

$$\rightarrow \quad 0 = mg\sin(\alpha) - 3ku \quad \Rightarrow \quad u = \frac{mg\sin(\alpha)}{3k} \approx$$

$$\approx 0{,}085\ \text{m} \;//$$

$$F_{f1} = k \cdot u \approx 8{,}5\ \text{N} \;//$$

$$F_{f2} = 2ku \approx 17\ \text{N} \;//$$

```
ustatisk=m*g*sin(alpha)/3/k
F1_statisk=k*ustatisk
F2_statisk=2*k*ustatisk
```