# Tentamen i TME061, 2021-08-24

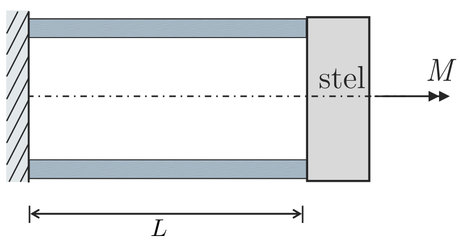
- **Tid:** 08:30-12:30 **Lokal:** Zoomövervakad tentamen.
- **Lärare:** Magnus Ekh, tele 7723479, 0708-282358
- **Hjälpmedel**
  - Alla hjälpmedel tillåtna dock inte tillåtet att samarbeta eller att ta hjälp av annan person.
  - Viktigt att ange källhänvisning om ekvationer, lösningar av exempel (inklusive gamla tentatal), datorkod och/eller annan information används.
  - Som kalkylator kan Matlab, Python, ... användas. Om dessa används ladda också upp .m, .py,... filer på Canvassidan för tentamen.
  - Zoomövervakad tentamen.
- Du behöver scanna dina handskrivna lösningar och ladda upp dom på Canvas (ladda upp .pdf eller .doc filer). Skriv namn, personnummer, problemnummer, sidonummer på varje inscannad sida. Se till att ha bra ljusförhållande och en scanningsapp t.ex. CamScanner eller Genius Scan. namnge dina filer ProblemYYsidaXX. Exempel: Problem01sida02.pdf. Om du vill kan bilder kombineras till ett dokument i Word eller PDF som kallas ProblemYY. Om du har använt Matlab, Python, etc som redskap ladda då upp dina filer till Canvas.
- **Lösningar**: Anslås på kurshemsidan (Canvas) dagen efter tentamen.
- **Betygslista**: Medddelas senast 1 september på Canvas.

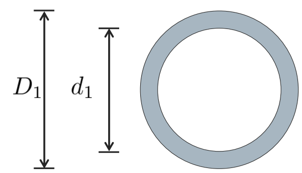
- **Poängbedömning**: Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

- **Betygsgränser**:
  20-25p: betyg 5
  15-19p: betyg 4
  10-14p, betyg 3
  0-9p, betyg U

## Uppgift 1

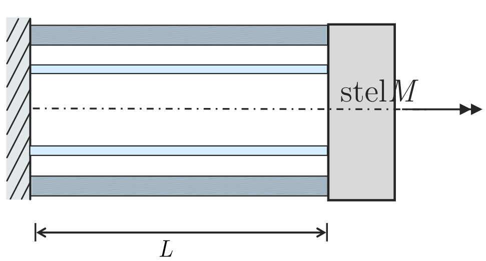
En axel är sin vänstra ände fast inspänd i en vägg och i sin högra ände fastsatt i en stel skiva. På stela skivan verkar det vridande momentet $M$. Tvärsnittet av axeln har innerdiametern $d_1$ och ytterdiametern $D_1$. Axeln är av ett material som kan modelleras som linjärt elastiskt idealplastiskt med elasticetsmodul $E$, Poissons tal $\nu$ och skjuvflytgräns $\tau_{\mathrm{s}}$.

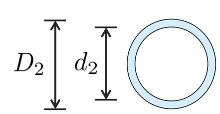



(a) Bestäm minsta $D_1$ så att plasticering inte uppnås i axeln. Antag $d_1 = 0.8\,D_1$ samt de numeriska värdena $M = 1 \cdot 10^3$ [Nm], $E = 200 \cdot 10^3$ [MPa], $\nu = 0.3$, $\tau_{\mathrm{s}} = 250$ MPa, $L = 1$ [m]. För detta värde av $D_1$, hur mycket roterar den stela skivan?

(b) Axelkonstruktionen förstärks genom att ett inre cirkulärt rör också fästs mellan väggen och stela skivan. Det inre cirkulära röret har samma materialegenskaper dom det yttre röret och dess dimensioner väljs till $D_2 = D_1/2$ och $d_2 = d_1/2$. Om resultatet för $D_1$ används från (a) vad blir spänningarna i de båda axeldelarna samt hur mycket roterar den stela skivan?



## Uppgift 2

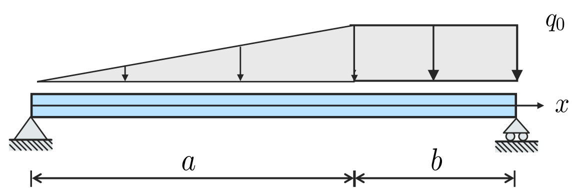
Man har med hjälp av finita elementmetoden bestämt ett töjningsstillståndet i en punkt till $\epsilon_x = 0.002$, $\epsilon_y = -0.001$, $\gamma_{xy} = 0.005$, $\epsilon_z = 0.001$ och $\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$.

(a) Om elasticitetsmodulen $E = 200$ GPa och Poissons tal $\nu = 0.3$ vad blir spänningarna $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\tau_{xy}$, $\sigma_z$, $\tau_{yz}$ och $\tau_{zx}$.

(b) Bestäm von Mises och Trescas effektivspänning.

## Uppgift 3

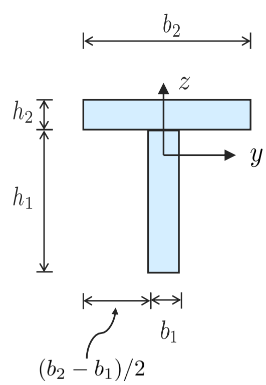
En fritt upplagd balk belastas med en utbredd last. Lasten ökar linjärt från $x = 0$ till $x = a$, dvs. $q(x) = -q_0\, x/a$ för $0 \leq x \leq a$. För $a \leq x \leq (a+b)$ är den utbredda lasten konstant, dvs. $q(x) = -q_0$. Antag $a = 2000$ mm, $b = 1000$ mm och $q_0 = 1$ N/mm.




(a) Bestäm tvärkraft $T(x)$ och böjmoment $M(x)$ längsbalken.

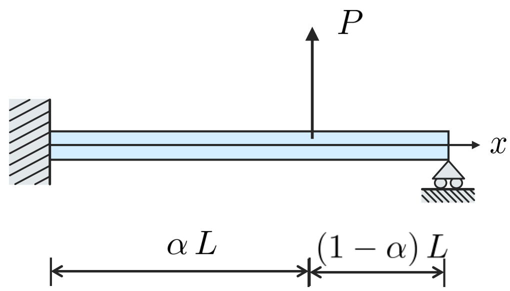
(b) Bestäm det (till belopp) största böjmomentet längs balken.

(c) Bestäm största normalspänningen i balken med följande tvärsnitt där $b_1 = h_2 = 5$ mm, $h_1 = b_2 = 50$ mm. Balken böjs kring $y$-axeln.



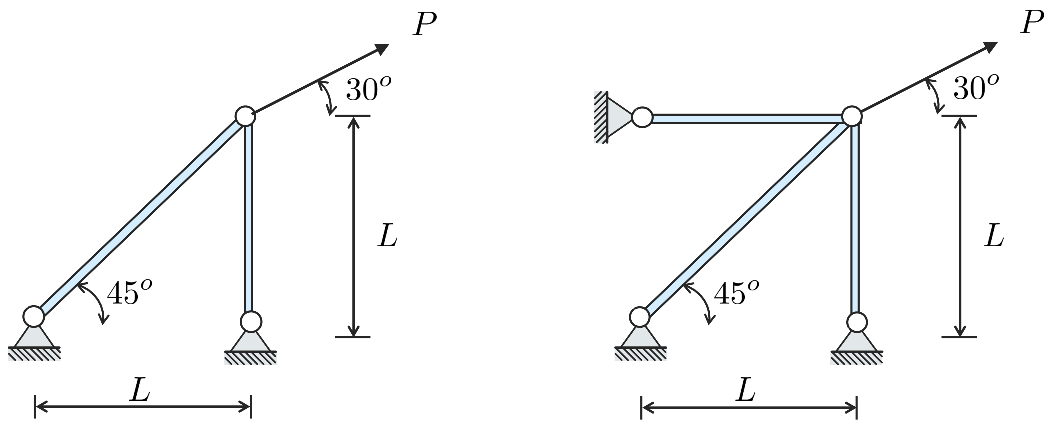
## Uppgift 4

En fast inspänd och fritt upplagd balk belastas med punktlasten $P$ enligt figuren. Balken har böjstyvheten $EI$. Bestäm lastens position, dvs. värdet på $\alpha$, så att utböjningen vid lasten maximeras.



## Uppgift 5

Ett stångsystem består av två stänger enligt vänstra figuren nedan. För att förstärka konstruktionen läggs en horisontell stång till enligt högra figuren. Stängerna har alla tre ett massivt cirkulärt tvärsnitt med arean $A$ och är gjorda av samma material med elasticitetsmodulen $E$.

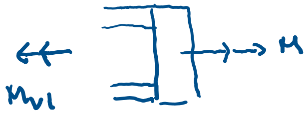



(a) Bestäm förskjutningen av knutpunkten där lasten $P$ appliceras för de båda fallen.

(b) För strukturen med två stänger (vänstra figuren), bestäm säkerhetsfaktorn mot knäckning.

Antag följande numeriska värden $A = 100$ mm$^2$, $L = 500$ mm, $E = 210 \cdot 10^3$ MPa och $P = 10$ kN.

a)




Jämvikt:

$\rightarrow\!\!\rightarrow: \; M - M_{v1} = 0$

$\Rightarrow M_{v1} = M$

största spänning (3.10)

$$\max(|\tau|) = \frac{M_{v1} \cdot D_1/2}{K_{v1}} = (3.11) = \frac{M_{v1}}{W_{v1}} = \frac{M_{v1}}{\frac{\pi}{2}\left((D_1/2)^3 - \underbrace{\frac{(d_1/2)^4}{D_1/2}}_{(d_1/2)^3 \frac{d_1}{D_1}}\right)}$$

med $d_1 = 4D_1/5$, $\max(|\tau|) = \tau_s$, $M_{v1} = M \Rightarrow$

$$\tau_s = \frac{M \cdot 2^4}{\pi \cdot D_1^3 \cdot (1 - (4/5)^4)} \Rightarrow D_1 = \left(\frac{M \cdot 2^4}{\pi \cdot (1 - (4/5)^4) \cdot \tau_s}\right)^{1/3}$$

med $\tau_s = 250$ MPa, $M = 10^6$ Nmm $\Rightarrow$ $\underline{\underline{D_1 \approx 32{,}6 \text{ mm}}}$

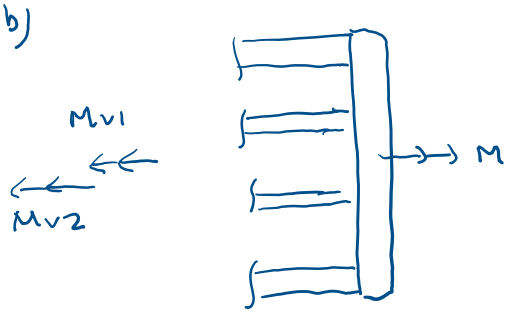
Vridningen blir $\varphi = \dfrac{M_{v1} \cdot \ell}{G\, K_{v1}}$

där $\ell = 1000$ mm, $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = \dfrac{200 \cdot 10^3}{2 \cdot 1{,}3} \approx 77 \cdot 10^3$ MPa

$$K_{v1} = \frac{\pi}{2}\left((D_1/2)^4 - (\underbrace{d_1/2}_{D_1/2 \cdot 4/5})^4\right) \approx 6.51 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{10^6 \cdot 10^3}{77 \cdot 10^3 \cdot 6{,}51 \cdot 10^4} \approx 0{,}2 \text{ rad} \approx 11{,}4^\circ$$

b)




$\twoheadrightarrow: M - M_{v1} - M_{v2} = 0 \quad (*)$

Vridning $\varphi_1 = \dfrac{M_{v1} \cdot \ell}{G\, K_{v1}} \qquad \varphi_2 = \dfrac{M_{v2} \cdot \ell}{G\, K_{v2}}$

Deformationssamband $\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \dfrac{M_{v1}}{K_{v1}} = \dfrac{M_{v2}}{K_{v2}} \quad (**)$

insatt i $(*)$ $\Rightarrow$

$$M - M_{v1} - M_{v1}\frac{K_{v2}}{K_{v1}} = 0 \Rightarrow M_{v1} = \frac{M \cdot K_{v1}}{K_{v1} + K_{v2}}$$

$$(**) \Rightarrow \quad M_{v2} = \frac{M \cdot K_{v2}}{K_{v1} + K_{v2}}$$

$K_{v1} = \{\text{enligt a)}\} \approx 6.51 \cdot 10^4\ mm^4$

$K_{v2} = \pi/2 \left( \underbrace{(D_2/2)}_{D_1/4}^4 - \underbrace{(d_2/2)}_{d_1/4 = D_1/4 \cdot 4/5}^4 \right) \approx 4.07 \cdot 10^3\ mm^4 = K_{v1}/16$

största skjuvspänningar $\tau_{max,1} = \dfrac{M_{v1} \cdot D_1/2}{K_{v1}} = \dfrac{M \cdot D_1/2}{K_{v1} + K_{v2}} \approx 235\ MPa$

$$\tau_{max,2} = \frac{M_{v2} \cdot D_2/2}{K_{v2}} = \frac{M \cdot D_2/2}{K_{v1} + K_{v2}} \approx 118\ MPa$$

Vridningen $\varphi = \varphi_1 = \dfrac{M_{v1} \cdot \ell}{G\, K_{v1}} = \dfrac{M_{v2} \cdot \ell}{G\, K_{v2}} \approx \dfrac{M \cdot \ell}{G(K_{v1} + K_{v2})} \approx 0{,}188$ rad

$\approx 10{,}8° \,//$

a) Enl (6.5)

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

med $E = 200 \cdot 10^3$ MPa, $\nu = 0,3$

$\varepsilon_x = 0,002$, $\varepsilon_y = -0,001$, $\varepsilon_z = 0,001$

$\gamma_{xy} = 0,005$, $\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$

fås $\sigma_x \approx 538$ MPa, $\sigma_y \approx 76,9$ MPa, $\sigma_z \approx 385$ MPa

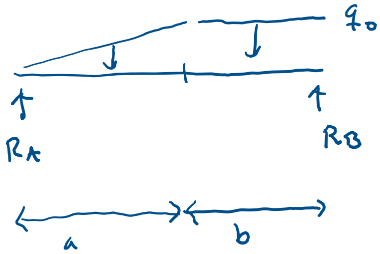
$\tau_{xy} \approx 385$ MPa, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ //

b) Med $S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$ och Matlabkod 4.7.1 resp 4.7.2

fås $\sigma_e^{vM} \approx 781$ MPa

$\sigma_e^{T} \approx 897$ MPa //

Stödreaktioner




$\uparrow: \; R_A + R_B - q_0 \cdot a/2 - q_0 \cdot b = 0$

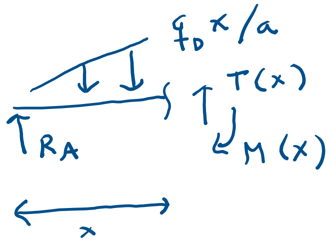
$\overset{\curvearrowright}{A}: \; -R_B \cdot (a+b) + q_0 \cdot a/2 \cdot 2a/3 + q_0 \cdot b \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_B = \dfrac{q_0\left[\, a^2/3 + b\,(a + b/2)\,\right]}{a+b} \\ R_A = q_0\left[\, a/2 + b \,\right] - R_B \end{cases}$$

$\Rightarrow \; R_A \approx 722 \text{ N}, \quad R_B \approx 1{,}28 \text{ kN}$

Snitta

$0 \le x \le a$




$\uparrow: \; R_A - (q_0 x/a)\frac{1}{2} \cdot x + T(x) = 0$

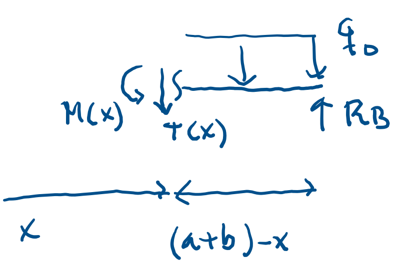
$\Rightarrow T(x) = q_0 x^2/(2a) - R_A$

$\overset{\curvearrowright}{x}: \; R_A \cdot x - (q_0 x/a)\frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{3} x + M(x) = 0$

$\Rightarrow M(x) = q_0 x^3/(6a) - R_A \cdot x$

$/\!/ \; T(x) = M'(x) = 0$ då $x = \sqrt{\dfrac{R_A \cdot 2a}{q_0}}$

$a \le x \le (a+b)$




$\uparrow: \; R_B - q_0\,(a + b - x) - T(x) = 0$

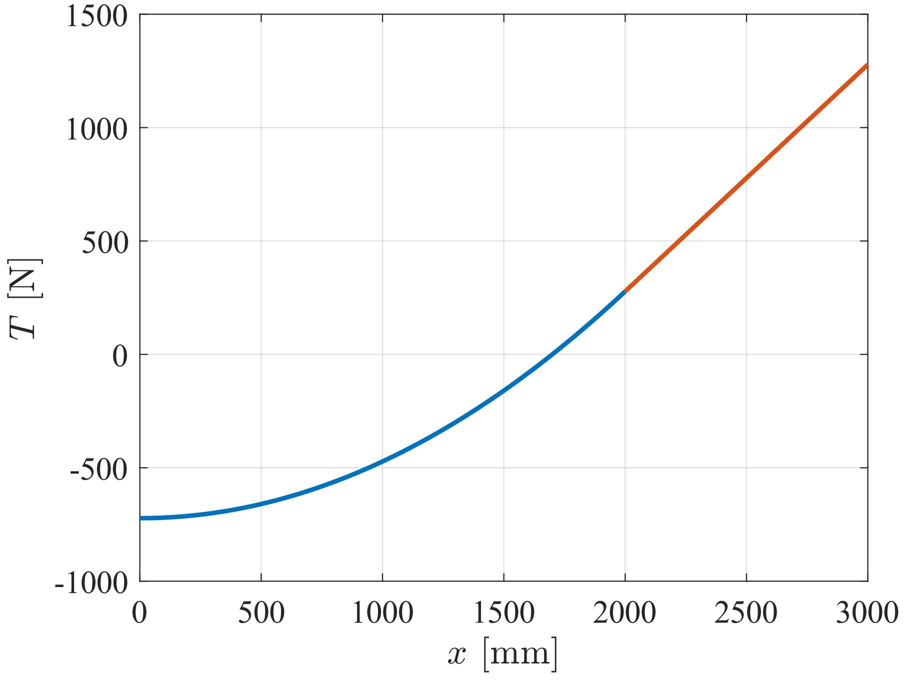
$\Rightarrow T(x) = R_B - q_0\,(a + b - x)$

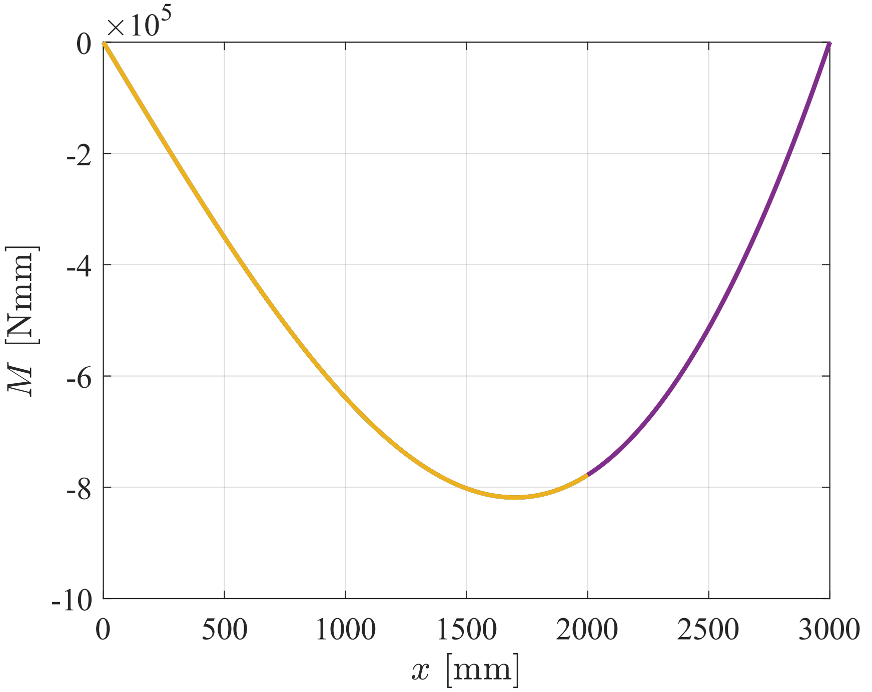
$\overset{\curvearrowright}{x}: \; -R_B\,(a + b - x) + q_0\,(a + b - x)\,\dfrac{a+b-x}{2} - M(x) = 0$

$\Rightarrow M(x) = R_B\,(x - a - b) + q_0\,(a + b - x)^2/2$

```
x=linspace(0,a,100);
T1=q0*x.^2/(2*a)-RA; M1=q0*x.^3/(6*a)-RA*x;
figure(1)
plot(x,T1,'linewidth',2)
set(gca,'FontSize',14,'fontname','Times New Roman')
xlabel('$x$ [mm]','FontSize',16,'interpreter','latex')
ylabel('$T$ [N]','FontSize',16,'interpreter','latex')
hold on
x=linspace(a,a+b,100);
T2=RB-q0*(a+b-x); M2=RB*(x-a-b)+q0*(a+b-x).^2/2;
plot(x,T2,'linewidth',2)

x=linspace(0,a,100);
figure(2)
plot(x,M1,'linewidth',2)
set(gca,'FontSize',14,'fontname','Times New Roman')
xlabel('$x$ [mm]','FontSize',16,'interpreter','latex')
ylabel('$M$ [Nmm]','FontSize',16,'interpreter','latex')
hold on
x=linspace(a,a+b,100);
plot(x,M2,'linewidth',2)
g
```

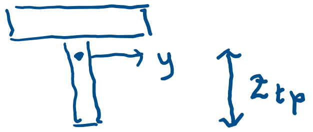



Största (till belopp) böjmoment

$$x = \sqrt{\frac{R_A \cdot 2a}{q_0}} \approx 1700 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow |M|_{max} \approx 8{,}18 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$$



Ytcentrum

$$z_{tp} = \frac{b_1 h_1 \cdot h_1/2 + b_2 h_2 \cdot (h_1 + h_2/2)}{b_1 h_1 + b_2 h_2} \approx$$

$$\approx 38{,}75 \text{ mm}$$

Yttröghetsmomentet (Steiners sats)

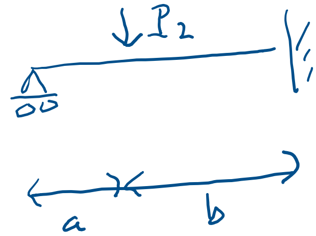
$$I_y = \frac{b_1 h_1^3}{12} + b_1 h_1 (z_{tp} - h_1/2)^2 +$$

$$+ \frac{b_2 h_2^3}{12} + b_2 h_2 (h_1 + h_2/2 - z_{tp})^2 \approx 1{,}471 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

Största normalspänningen

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M|_{max} \cdot z_{tp}}{I_y} \approx 216 \text{ MPa} //$$

Enl FS 6.5 fås

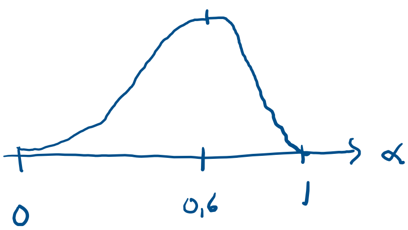



$$p_2 = \frac{P_2 a^2 b^3}{12 EI \ell^2}\left[4 - \frac{b}{\ell}\right]$$

eftersom spegelvänd $b = \alpha \ell$, $a = (1-\alpha)\ell \Rightarrow$ utböjning vid lasten

$$p = \frac{P(1-\alpha)^2 \alpha^3 \cdot \ell^3}{12 \cdot EI}\left[4-\alpha\right] = \frac{P\ell^3}{12 EI}\underbrace{(1-\alpha)^2\alpha^3(4-\alpha)}_{f(\alpha)}$$

plotta $f(\alpha)$ i Matlab




maxvärde
fås enligt
Matlabgraf vid $\alpha \simeq 0{,}59$ //

Alternativ:

kolla ändpunkter

$f(0) = 0$, $f(1) = 0$

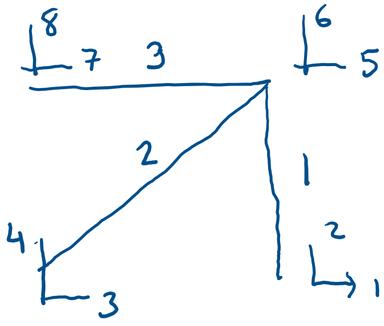
$$f'(\alpha) = -2(1-\alpha)\alpha^3(4-\alpha) + (1-\alpha)^2 3\alpha^2(4-\alpha) - (1-\alpha)^2\alpha^3 =$$

$$= (1-\alpha)\alpha^2\left[-2\alpha(4-\alpha) + (1-\alpha)3(4-\alpha) - (1-\alpha)\alpha\right] = 0$$

$$\Rightarrow -8\alpha + 2\alpha^2 + 3\cdot(4 - 5\alpha + \alpha^2) - \alpha + \alpha^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\alpha^2 - 24\alpha + 12 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 2 = 0 \Rightarrow$$

$\alpha = 2 \pm \sqrt{4-2} = 2 \pm \sqrt{2}$ men $0 \le \alpha \le 1 \Rightarrow \alpha = 2 - \sqrt{2} \simeq 0{,}59$ //




element och frihetsgrader

Se Matlabkod nedan

Utan element 3 fås $u_5 \approx 0,67$ mm

$u_6 \approx -0,087$ mm

Med element 3 fås $u_5 \approx 0,14$ mm

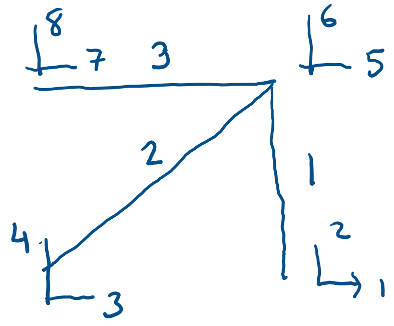
$u_6 \approx 0,05$ mm

Inre normalkrafter

utan element 3 : $\begin{cases} N_1 \approx -3,66 \text{ kN} \\ N_2 \approx 12,2 \text{ kN} \end{cases}$

Euler 2 $P_{kr} = \dfrac{\pi^2 EI}{\ell^2}$

$\Rightarrow$ säkerhetsfaktor $\approx 1,8$ //




element och frihetsgrader

Se Matlabkod nedan

Utan element 3 fås $u_5 \approx 0{,}67$ mm

$u_6 \approx -0{,}087$ mm

Med element 3 fås $u_5 \approx 0{,}14$ mm

$u_6 \approx 0{,}05$ mm

Inre normalkrafter

utan element 3 : $\begin{cases} N_1 \approx -3{,}66 \text{ kN} \\ N_2 \approx 12{,}2 \text{ kN} \end{cases}$

Euler 2 $\quad P_{kr} = \dfrac{\pi^2 EI}{\ell^2}$

$\Rightarrow$ säkerhetsfaktor $\approx 1{,}8$ //

```
clear all
syms a1 a2 a3 a4 a5 a6 P1 P2 P3 P4 P5 P6
%givna storheter
P=10e3;
Em=210e3; A=100;
EA=Em*A; L=500;
%givet
a1=0; a2=0; a3=0; a4=0;
P5=P*cos(pi/6); P6=P*sin(pi/6);
%definiera avektor pvektor
avektor = [a1; a2; a3; a4; a5; a6];
Pvektor = [P1; P2; P3; P4; P5; P6];
%elementstyvheter
%%%Element 1:
L1=L; EA1=EA; alpha1=pi/2; c=cos(alpha1);s=sin(alpha1);
Ke1=EA1/L1*[ c^2 c*s -c^2 -c*s;
c*s s^2 -c*s -s^2;
-c^2 -c*s c^2 c*s;
-c*s -s^2 c*s s^2];
Kmatris1=sym(zeros(6,6));
Kmatris1([1 2 5 6],[1 2 5 6]) = Ke1;
%%%Element 2:
L2=L*sqrt(2); EA2=EA; alpha2=pi/4; c=cos(alpha2);s=sin(alpha2);
Ke2=EA2/L2*[ c^2 c*s -c^2 -c*s;
c*s s^2 -c*s -s^2;
-c^2 -c*s c^2 c*s;
-c*s -s^2 c*s s^2];
Kmatris2=sym(zeros(6,6));
Kmatris2([3 4 5 6],[3 4 5 6]) = Ke2;
%addera
Ktot=Kmatris1+Kmatris2;
%Lös de obekanta
Sol = solve(double(Ktot)*avektor==Pvektor,[a5,a6,P1,P2,P3,P4])
%Skriv ut resultat
double(Sol.a5)
double(Sol.a6)
double(Sol.P1)
double(Sol.P2)
double(Sol.P3)
double(Sol.P4)
%förlängningarna av stängerna enl s.208
ubar1=[cos(alpha1) sin(alpha1) 0 0; 0 0 cos(alpha1) sin(alpha1)]*[a1; a2; Sol.a5; Sol.a6]
delta1=ubar1(2)-ubar1(1);
eps1=delta1/L1;
N1=double(Em*eps1*A)
ubar2=[cos(alpha2) sin(alpha2) 0 0; 0 0 cos(alpha2) sin(alpha2)]*[a3; a4; Sol.a5; Sol.a6]
delta2=ubar2(2)-ubar2(1);
eps2=delta2/L2;
N2=double(Em*eps2*A)
%beräkning av d: pi d^2/4=A och sedan av yttröghetsmoment (enl FS)
d=sqrt( A*4/pi); Iy=pi*(d/2)^4/4;
%Knäckning enligt Euler 2 av stång 1:
Pkr=pi^2*Em*Iy/L1^2
%säkerhetsfaktor mot knäckning
Pkr/(-N1)
```

```
clear all
syms a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 P8
%givna storheter
P=10e3;
Em=210e3;
EA=Em*100; L=500;
a1=0; a2=0; a3=0; a4=0; a7=0; a8=0;
P5=P*cos(pi/6); P6=P*sin(pi/6);
%definiera avektor pvektor
avektor = [a1; a2; a3; a4; a5; a6; a7; a8];
Pvektor = [P1; P2; P3; P4; P5; P6; P7; P8];
%elementstyvheter
%%%Element 1:
L1=L; EA1=EA; alpha1=pi/2; c=cos(alpha1);s=sin(alpha1);
Ke1=EA1/L1*[ c^2 c*s -c^2 -c*s;
c*s s^2 -c*s -s^2;
-c^2 -c*s c^2 c*s;
-c*s -s^2 c*s s^2];
Kmatris1=sym(zeros(8,8));
Kmatris1([1 2 5 6],[1 2 5 6]) = Ke1;
%%%Element 2:
L2=L*sqrt(2); EA2=EA; alpha2=pi/4; c=cos(alpha2);s=sin(alpha2);
Ke2=EA2/L2*[ c^2 c*s -c^2 -c*s;
c*s s^2 -c*s -s^2;
-c^2 -c*s c^2 c*s;
-c*s -s^2 c*s s^2];
Kmatris2=sym(zeros(8,8));
Kmatris2([3 4 5 6],[3 4 5 6]) = Ke2;
%%%Element 3:
L3=L; EA3=EA; alpha3=0; c=cos(alpha3);s=sin(alpha3);
Ke3=EA3/L3*[ c^2 c*s -c^2 -c*s;
c*s s^2 -c*s -s^2;
-c^2 -c*s c^2 c*s;
-c*s -s^2 c*s s^2];
Kmatris3=sym(zeros(8,8));
Kmatris3([7 8 5 6],[7 8 5 6]) = Ke3;
%addera
Ktot=Kmatris1+Kmatris2+Kmatris3;
%Lös de obekanta
Sol = solve(double(Ktot)*avektor==Pvektor,[a5,a6,P1,P2,P3, P4, P7,P8])
%Skriv ut resultat
double(Sol.a5)
double(Sol.a6)
double(Sol.P1)
double(Sol.P2)
double(Sol.P3)
double(Sol.P4)
double(Sol.P7)
double(Sol.P8)
```