Tentamen i TME061, 2021-06-02

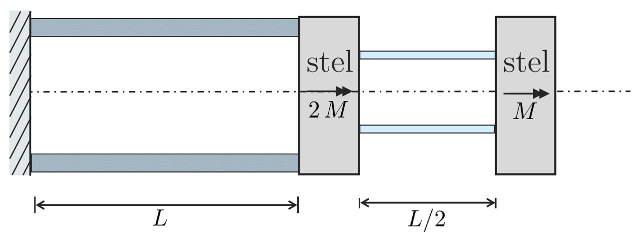
- **Tid:** 08:30-12:30 **Lokal:** Zoomövervakad tentamen.
- **Lärare:** Magnus Ekh, tele 7723479
- **Hjälpmedel**
  - Alla hjälpmedel tillåtna dock inte tillåtet att samarbeta eller att ta hjälp av annan person.
  - Viktigt att ange källhänvisning om ekvationer, lösningar av exempel (inklusive gamla tentatal), datorkod och/eller annan information används.
  - Som kalkylator kan Matlab, Python, ... användas. Om dessa används ladda också upp .m, .py,... filer på Canvassidan för tentamen.
  - Zoomövervakad tentamen.
- Du behöver scanna dina handskrivna lösningar och ladda upp dom på Canvas (ladda upp .pdf eller .doc filer). Skriv namn, personnummer, problemnummer, sidonummer på varje inscannad sida. Se till att ha bra ljusförhållande och en scanningsapp t.ex. CamScanner eller Genius Scan. namnge dina filer ProblemYYsidaXX. Exempel: Problem01sida02.pdf. Om du vill kan bilder kombineras till ett dokument i Word eller PDF som kallas ProblemYY. Om du har använt Matlab, Python, etc som redskap ladda då upp dina filer till Canvas.
- **Lösningar**: Anslås på kurshemsidan (Canvas) dagen efter tentamen.
- **Betygslista**: Medddelas senast 14 juni på Canvas.

- **Poängbedömning**: Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

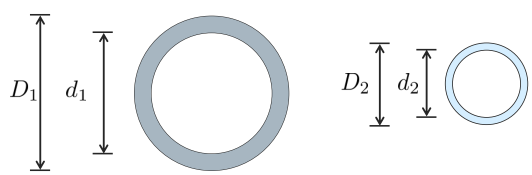
- **Betygsgränser**:
  20-25p: betyg 5
  15-19p: betyg 4
  10-14p, betyg 3
  0-9p, betyg U

Uppgift 1

En axelkonstruktion består av två axlar som är sammankopplade med en stel skiva enligt figuren nedan. Den vänstra axeln är fast inspänd i en vägg till vänster. Den högra axelns båda ändar är fastsatta i stela skivor. På stela skivan mellan axeldelarna verkar det vridande momentet $2\,M$ medan på den högra stela skivan verkar vridande momentet M.



De båda axeldelarna är tjockväggiga cirkulära rör med dimensioner enligt figuren nedan: Antag att materialet i axeldelarna är linjärt elastiskt med



skjuvmodulen G.

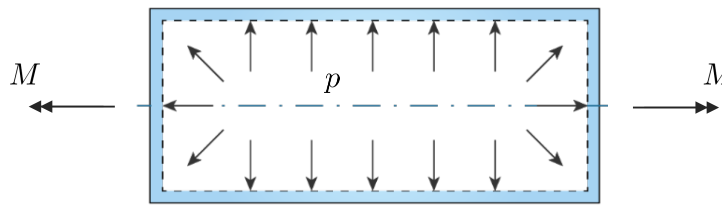
(a) Bestäm hur mycket de stela skivorna roterar.

(b) Bestäm max vridspänning i de båda axeldelarna.

Givna data: $M = 10^5$ [Nmm], $G = 81000$ [MPa], $L = 1000$ [mm], $D_1 = 30$ [mm], $d_1 = 20$ [mm], $D_2 = 15$ [mm] och $d_2 = 10$ [mm].

Uppgift 2

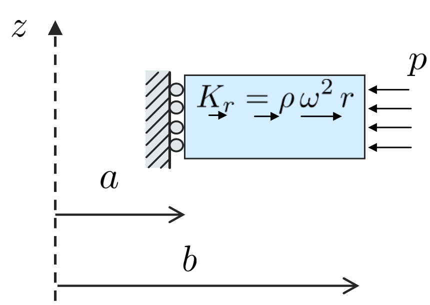
Ett slutet tunnväggigt rör belastas av det inre övertrycket p och ett vridande moment M. Antag att rörets radie är a och väggtjocklek h. Bestäm von



Mises och Trescas effektivspänning. Använd följande givna data: $p = 1$ MPa, $M = 10^6$ [Nm], $a = 1$ [m] och $h = 10$ [mm].

Uppgift 3

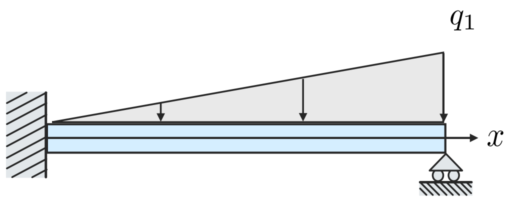
En cirkulär hålskiva med innerradie a och ytterradie b är belastad i plan spänning. Dess material kan anses var linjärt isotropt elastiskt med elasticitetsmodul E och Poissons tal ν. Belastningen på hålskivan är ett tryck p på den yttre randen samt en volymslast $K_r = \rho\,\omega^2\,r$ [kraft/volym] som kommer från att skivan roterar med vinkelhastigheten ω.



Antag följande givna data: $a = 50$ mm, $b = 100$ mm, $\rho = 7800$ kg/m^3, $\omega = 620\,\pi$ rad/s, $E = 200 \cdot 10^3$ MPa, $\nu = 0.3$ och $p = 100$ MPa. beräkna den radiella spänningen vid innerranden dvs. $\sigma_r(a)$

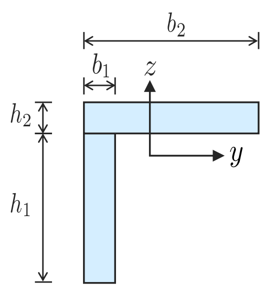
Uppgift 4

En fast inspänd och fritt upplagd balk belastas med den utbredda lasten $q(x) = -q_1\, x/L$ enligt figuren. Vilket ger en böjning kring y-axeln. Balken har längd L och elasticitetsmodul E.



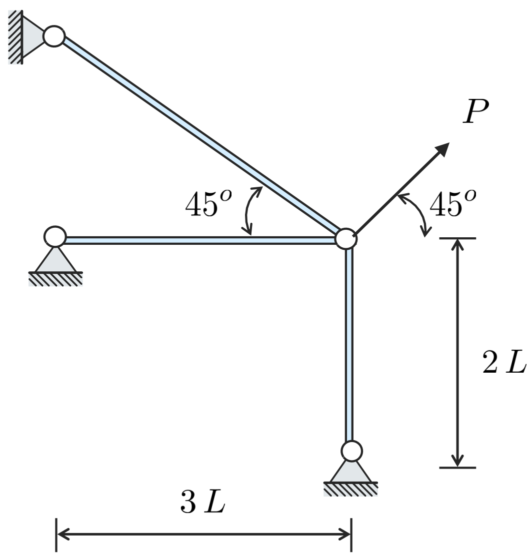
(a) Bestäm det (till belopp) största böjmomentet längs balken då då $L =$ 1000 mm, $q_1 = 10$ N/mm

(b) Bestäm största normalspänningen i balken med följande tvärsnitt med $b_1 = h_2 = 5$ mm, $h_1 = b_2 = 50$ mm.



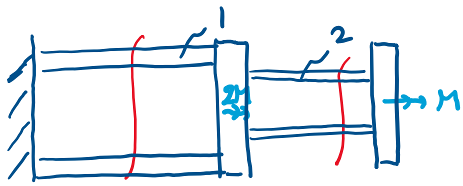
Uppgift 5

Ett stångsystem består av tre stänger enligt figuren nedan. Stängerna har

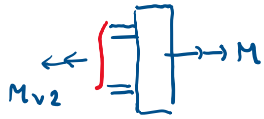


alla tre ett cirkulärt tvärsnitt med arean A och är gjorda av samma material med elasticitetsmodulen E. Bestäm största tillåtna yttre last P om stångmaterialet inte tillåts flyta. Antag följande numeriska värden $A = 100$ mm^2, $L = 500$ mm, $E = 210 \cdot 10^3$ MPa och flytgränsen för stångmaterialet $\sigma_y = 300$ MPa.

1)

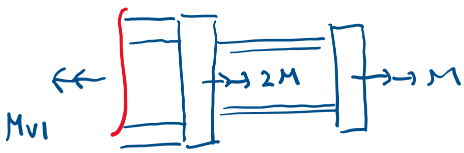


Snitta och frilägg



$\rightarrow\!\!\!\rightarrow: \; M - M_{v2} = 0$

$\Rightarrow M_{v2} = M \qquad (*)$



$\rightarrow\!\!\!\rightarrow: \; M + 2M - M_{v1} = 0$

$\Rightarrow M_{v1} = 3M \qquad (**)$

Rotation av axeldelarna enl. (3.8)

$$\varphi_1 = \frac{M_{v1} \cdot \ell_1}{G \cdot K_{v1}} \overset{(**)}{=} \frac{3M \cdot \ell}{G \, K_{v1}}$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{v2} \cdot \ell_2}{G \cdot K_{v2}} \overset{(*)}{=} \frac{M \cdot \ell/2}{G \, K_{v2}}$$

där enl s.53

$$\begin{cases} K_{v1} = \text{"} \dfrac{\pi(b^4 - a^4)}{2} \text{"} = \dfrac{\pi \cdot \left((D_1/2)^4 - (d_1/2)^4\right)}{2} \\ K_{v2} = \text{—"—} = \dfrac{\pi\left((D_2/2)^4 - (d_2/2)^4\right)}{2} \end{cases}$$

a) Rotationen av mittskivan $= \varphi_1 =$

$$= \frac{3 \cdot M \cdot \ell \cdot 2}{G \cdot \pi \cdot \left((D_1/2)^4 - (d_1/2)^4\right)} \approx 0{,}058 \text{ rad} \,//$$

Rotationen av högra skivan $= \varphi_1 + \varphi_2 =$

$$= \frac{3 \cdot M \cdot \ell \cdot 2}{G \cdot \pi \cdot \left((D_1/2)^4 - (d_1/2)^4\right)} + \frac{M \cdot \ell \cdot 2}{2 \cdot G \cdot \pi \left((D_2/2)^4 - (d_2/2)^4\right)} =$$

$$\approx 0{,}21 \text{ rad} \,//$$

b) Max vridskjuvspanning enl (3.10)

$$\tau_{max,1} = \text{"} \frac{M_v \cdot b}{K_v} \text{"} = \frac{M_{v1} \cdot D_1/2}{K_{v1}} = \frac{3M \cdot D_1}{2 \cdot K_{v1}} \approx 71 \text{ MPa} \,//$$

$$\tau_{max,2} = \text{—"—} = \frac{M_{v2} \cdot D_2/2}{K_{v2}} = \frac{M \cdot D_2}{2 \cdot K_{v2}} \approx 188 \text{ MPa} \,//$$

2) Inre övertryck ger enl (7.1) - (7.3)

$$\sigma_z = \frac{pa}{2h} \qquad \sigma_\varphi = \frac{pa}{h} \qquad \sigma_r \approx 0$$

Vridande moment tunnväggig cylinder ger enl (3.2)

$$\tau = \tau_{z\varphi} = \frac{M}{2\pi a^2 h}$$

$\Rightarrow$ Spänningsmatrisen i $r\varphi z$ - systemet

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & \tau_{z\varphi} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 50/\pi \\ 0 & 50/\pi & 50 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

von Mises effektivspänning från s. 97 eller Matlabkod 4.7.1 $\Rightarrow$ $\sigma_{vM} \approx 91$ MPa //

Trescas effektivspänning från Matlabkod 4.7.2

$\Rightarrow$ $\sigma_{eT} \approx 105$ MPa //

```
clear all
syms p a h M

%spänningar från inre övertryck
sigma_phi=p*a/h
sigma_z=p*a/(2*h)

%spänning från vridande moment
tau_zphi=M/(2*pi*a^2*h)

S=[sigma_phi tau_zphi 0; tau_zphi sigma_z 0; 0 0 0]

S_num=subs(S,{p,a,h,M},{1, 1000,10,1e9})

Seff_vM=double(vonMises(S_num))
Seff_T=double(Tresca(S_num))
```

3) Baserat på Matlabkod 8.2.2

```
clear all
close all
syms A1 A2 r ur(r) a b nu Em p rho omega
%lösning d.e.
ur(r)=A1*r+A2/r-rho*omega^2/8*(1-nu^2)/Em*r^3;
%töjningar
eps_r=diff(ur(r),r); eps_phi=ur(r)/r;
%spänningar
sigma_r(r)=Em/(1-nu^2)*(eps_r+nu*eps_phi)
sigma_phi(r)=Em/(1-nu^2)*(eps_phi+nu*eps_r)
%bestämning av integrationskonstanter
[A1_,A2_]=solve(ur(a)==0,sigma_r(b)==-p,A1,A2)
disp(['A1= ' char(A1_)])
disp(['A2= ' char(A2_)])
```

randvillkor

```
%sätt in lösning
ur_=simplify(subs(ur,[A1,A2],[A1_,A2_]))
sigma_r_=simplify(subs(sigma_r,[A1,A2],[A1_,A2_]))
sigma_phi_=simplify(subs(sigma_phi,[A1,A2],[A1_,A2_]))
%numeriska värden
rho_=7800; %kg/m^3
omega_=2*pi*310; %rad/s
a_=50e-3; b_=100e-3; %m
nu_=0.3;
Em_=200e9; %Pa
p_=100e6; %Pa

sigma_r_a=sigma_r_(a)
sigma_r_a_num=double(subs(sigma_r_a,{a,b,nu,Em,rho,omega,p},...
{a_,b_,nu_,Em_,rho_,omega_,p_}))
```

$\Rightarrow \quad \sigma_r(a) \approx -4.87$ MPa //

4) Baserat på Matlabkod 9.7.b

```
clear all
close all
syms C1 C2 C3 C4 w(x) L EIy q(x) q1

%utbredd last
q(x)=-q1*x/L;
%allmän lösning till elastiska linjens d.e.
w(x)=C1*x^3/6+C2*x^2/2+C3*x+C4+int( int( int( int(q/EIy,x),x ),x ), x)
wprim(x)=diff(w,x);
%böjmoment
M(x)=-EIy*diff( diff(w,x),x )
%tvärkraft
T(x)=-EIy*diff( diff( diff(w,x),x ),x )
%bestämning av integrationskonstanter
[C1_,C2_,C3_,C4_]=solve(w(0)==0,wprim(0)==0,w(L)==0,M(L)==0,[C1,C2,C3,C
4]);
%utskrift av lösning på integrationskonstanter
disp(['C1= ' char(simplify(C1_))])
disp(['C2= ' char(simplify(C2_))])
disp(['C3= ' char(simplify(C3_))])
disp(['C4= ' char(simplify(C4_))])
%sätt in integrationskonstanter i utböjningen, böjmoment och tvärkraft
w_(x)=simplify(subs(w,[C1,C2,C3,C4],[C1_,C2_,C3_,C4_]))
M_(x)=simplify(subs(M,[C1,C2,C3,C4],[C1_,C2_,C3_,C4_]))
T_(x)=simplify(subs(T,[C1,C2,C3,C4],[C1_,C2_,C3_,C4_]))
```

$$\Rightarrow M(x) = \frac{q_1 (7 L^3 - 27 \cdot L^2 \cdot x + 20 \cdot x^3)}{120 \cdot L}$$

Största M till belopp ändpunkter eller lokalt min/max

$$M(0) = \frac{7 \cdot q_1 \cdot L^2}{120} \approx 5{,}83 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$$

$$M(L) = 0 \qquad M'(x) = T(x) = 0 \text{ och } 0 \leq x \leq L$$

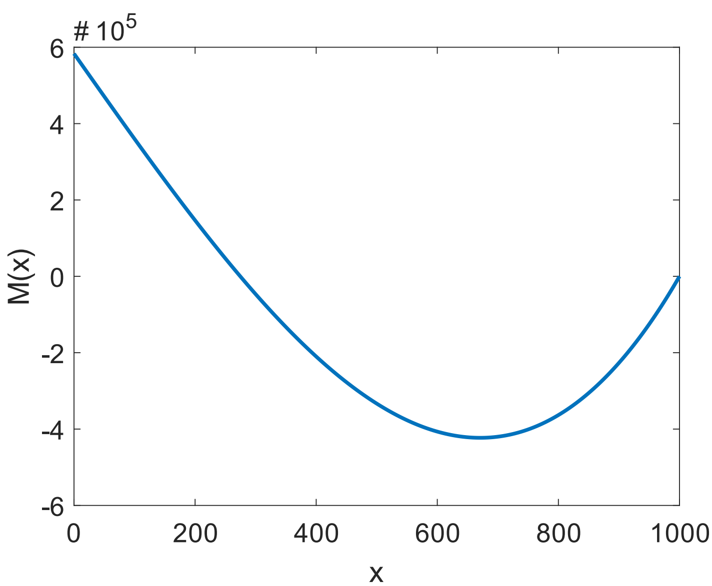
$$\Rightarrow x = \frac{3 \cdot \sqrt{5} \cdot L}{10} \approx 0.67 \cdot L$$

$$M(0{,}67 \cdot L) \approx -q_1 \cdot L^2 \cdot 0{,}0423 \approx -4{,}23 \cdot 10^5$$

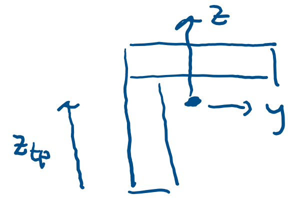
från:

```
%värden i ändpunkter
M_(0)
M_(L)
%finn nollställe hos derivatan på M_:
x_=solve(diff(M_(x),x)==0,x)
[x_(1)    M_(x_(1))]
[x_(2)    M_(x_(2))]

%numeriska värden
M0=double(subs(M_(0),{q1,L},{10,1000}))
Mlok=double(subs(M_(x_(2)),{q1,L},{10,1000}))
L_=1000;
xnum=linspace(0,L_,200);
M_num=subs(M_(x),{q1,L,x},{10,L_,xnum});
plot(xnum,M_num,'linewidth',2)
set(gca,'FontSize',14)
xlabel('x','FontSize',16)
ylabel('M(x)','FontSize',16)

M_max=max(abs(M0),abs(Mlok))
```

$\Rightarrow |M|_{max} \approx 5.83 \cdot 10^5$ Nmm



b) Från Exempel 9.6.4



$$z_{tp} = \frac{h_1 b_1 h_1/2 + b_2 h_2 (h_1 + h_2/2)}{h_1 b_1 + h_2 b_2} \approx 38.8 \text{ mm}$$

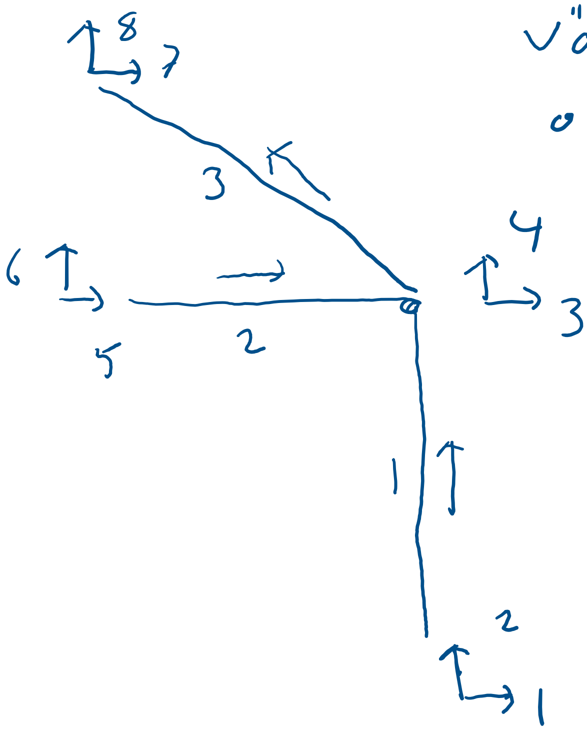
$$I_y = \frac{b_1 h_1^3}{12} + b_1 h_1 \cdot (h_1/2 - z_{tp})^2 + \frac{b_2 h_2^3}{12} + b_2 h_2 (h_1 + h_2/2 - z_{tp})^2$$

$$\approx 1{,}47 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{max} = \frac{|M|_{max} \, |z|_{max}}{I_y} = \left\{ |z|_{max} = max(z_{tp}, h_1 + h_2 - z_{tp}) = z_{tp} \right\}$$

$$\approx 154 \text{ MPa}$$ //

5)



Välj t.ex. elementnummer och frihetsgrader enl. nedan.

Matlabkod
$$\begin{cases} \sigma_1 = 7{,}595 \cdot 10^{-3} \cdot P \\ \sigma_2 = 6{,}547 \cdot 10^{-3} \cdot P \\ \sigma_3 \approx 7{,}415 \cdot 10^{-4} \cdot P \end{cases}$$

Flytspänning $\sigma_y = 300$ MPa uppnås för lägst P i stång 1

$$\Rightarrow P = \frac{300}{7{,}595 \cdot 10^{-3}} \approx 39500 \text{ N}$$

```
clear all
syms  a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 P8 P
%givna storheter
Em=210e3;
EA=210e3*100; L=500;

a1=0; a2=0;  a5=0; a6=0; a7=0; a8=0;
P3=P/sqrt(2); P4=P/sqrt(2);

%definiera avektor pvektor
avektor = [a1; a2; a3; a4; a5; a6; a7; a8];
Pvektor = [P1; P2; P3; P4; P5; P6; P7; P8];
%elementstyvheter
%%%Element 1:
L1=2*L; EA1=EA; alpha1=pi/2; c=cos(alpha1);s=sin(alpha1);
Ke1=EA1/L1*[ c^2 c*s -c^2 -c*s;
             c*s s^2 -c*s -s^2;
             -c^2 -c*s c^2 c*s;
         -c*s -s^2 c*s s^2];
Kmatris1=sym(zeros(8,8));
Kmatris1([1 2 3 4],[1 2 3 4]) = Ke1;
%%%Element 2:
L2=3*L ;EA2=EA;  alpha2=0; c=cos(alpha2);s=sin(alpha2);
Ke2=EA2/L2*[ c^2 c*s -c^2 -c*s;
             c*s s^2 -c*s -s^2;
             -c^2 -c*s c^2 c*s;
         -c*s -s^2 c*s s^2];
Kmatris2=sym(zeros(8,8));
Kmatris2([5 6 3 4],[5 6 3 4]) = Ke2;
%%%Element 3:
L3=3*L*sqrt(2); EA3=EA; alpha3=135*pi/180; c=cos(alpha3);s=sin(alpha3);
Ke3=EA3/L3*[ c^2 c*s -c^2 -c*s;
             c*s s^2 -c*s -s^2;
             -c^2 -c*s c^2 c*s;
         -c*s -s^2 c*s s^2];
Kmatris3=sym(zeros(8,8));
Kmatris3([3 4 7 8],[3 4 7 8]) = Ke3;
%addera
Ktot=Kmatris1+Kmatris2+Kmatris3;
%Lös de obekanta
Sol = solve(double(Ktot)*avektor==Pvektor,[a3,a4,P1,P2,P5, P6, P7,P8])
%Skriv ut resultat
disp(['a3= ' char(simplify(Sol.a3))])
disp(['a4= ' char(simplify(Sol.a4))])
disp(['P1= ' char(simplify(Sol.P1))])
disp(['P2= ' char(simplify(Sol.P2))])
disp(['P5= ' char(simplify(Sol.P5))])
disp(['P6= ' char(simplify(Sol.P6))])
disp(['P7= ' char(simplify(Sol.P7))])
disp(['P8= ' char(simplify(Sol.P8))])
```

```
%förlängningarna av stängerna enl s.208
ubar1=[cos(alpha1) sin(alpha1) 0 0; 0 0 cos(alpha1)
sin(alpha1)]*[a1; a2; Sol.a3; Sol.a4]
delta1=ubar1(2)-ubar1(1);
eps1=delta1/L1;
sigma1=Em*eps1

ubar2=[cos(alpha2) sin(alpha2) 0 0; 0 0 cos(alpha2)
sin(alpha2)]*[a5; a6; Sol.a3; Sol.a4]
delta2=ubar2(2)-ubar2(1);
eps2=delta2/L2;
sigma2=Em*eps2

ubar3=[cos(alpha3) sin(alpha3) 0 0; 0 0 cos(alpha3)
sin(alpha3)]*[Sol.a3; Sol.a4; a7; a8]
delta3=ubar3(2)-ubar3(1);
eps3=delta3/L3;
sigma3=Em*eps3


double(subs(sigma1,P,1))
double(subs(sigma2,P,1))
double(subs(sigma3,P,1))
```