Tentamen i FUF050 Subatomär Fysik, F3

Tid:	2023-08-24 14:00 - 18:00
Tillåtna hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd räknare
Poäng:	Totalt 75 poäng, för betyg 3 krävs 40 poäng, för betyg 4 krävs 60 poäng, för betyg 5 krävs 80 poäng. Ev. poäng från inlämningar inkluderas. Motivera dina lösningar väl.
Examinator:	Andreas Ekström
Frågor:	Andreas Ekström (besök 16:00) (telefon: 0705-089198)
Rättningsgranskning:	Tid och plats annonseras på Canvas.

1. Antag att vi har en söderfallskedja bestående av två radioaktiva atomkärnor A och B, samt en stabil atomkärna C, som kan skrivas

$$A \to B \to C$$

där sönderfallskonstanterna för atomkärnorna A och B ges av λ_A och λ_B. Om vi dessutom antar att det vid tiden $t = 0$ endast existerar N_A^0 atomkärnor av typen A, dvs $N_A(t = 0) = N_A^0$ och $N_B(t = 0) = N_C(t = 0) = 0$. Visa att antalet atomkärnor av typen B som funktion av tiden t ges av

$$N_B(t) = \frac{\lambda_A N_A^0}{\lambda_B - \lambda_A}\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right)$$

(10 p)

2. En elektron med rörelsemängd $p = 720$ MeV/c sprids elastiskt mot ett strålmål bestående av ^{12}C. Det uppmätta tvärsnittet vid 5° spridningsvinkel är 80 mb/sr. Använd detta för att beräkna kärnradien R för ^{12}C. Du kan anta att atomkärnorna i strålmålet är sfäriskt symmetriska samt att formfaktorn $F(\mathbf{q}^2) = 1 - \frac{\mathbf{q}^2}{6\hbar^2}\langle r^2\rangle + \ldots$ är reell och positiv. (15 p.)

3. Använd skalmodellen för att härleda totalt rörelsemängdsmoment J och paritet P för grundtillstånden i ^{11}C,^{12}C,^{13}C,^{14}C. (10 p.)

4. I en bubbelkammare ser vi två partikelspår med inbördes vinkel på 64° som utgår från en gemensam punkt där en partikel X sönderfaller. Det ena spåret är från en proton med massa $m_p = 938$ MeV/c^2 och rörelsemängd p_p =440 MeV/c och det andra spåret är från en π^--meson med massa $m_\pi = 140$ MeV/c^2 och rörelsemängd p_π =126 MeV/c.

   Beräkna massan för partikel X, och avgör med hjälp av en masstabell vilken partikel det troligtvis är. (20 p.)

5. Varför kan en fri proton ej β^+-sönderfalla till en neutron? Varför kan en fri proton ej sönderfalla på något annat sätt enligt Standardmodellen? Varför ser vi ändå β^+-sönderfallande atomkärnor? (10 p.)

6. En Kurieplot-analys av uppmätta energier för positronerna i β^+-sönderfallet ${}^{29}\mathrm{P} \rightarrow {}^{29}\mathrm{Si} + e^+ + \nu_e$ gav en ändpunktsenergi (Q-värde) på 3,92 MeV. Kärnradien R för en isotop med A nukleoner kan uppskattas med hjälp av $R = r_0 A^{1/3}$ och en atomkärnas Coulombenergi E_C ges av

$$E_C = \frac{3}{5}\frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Uppskatta utgående från detta värdet på proportionalitetskonstanten r_0. (10 p)

Lycka Till!

Lösningsskiss Tentamen i FUF050 Subatomär Fysik
2023-08-24

Naturliga enheter ($\hbar = c = 1$) om inget annat anges.

1. Se föreläsningar och kursbok.

2. Ultrarelativistisk elektron ty $p >> m_e$. Vi har $\beta \approx 1$ och $E \approx pc$. Detta ger ett Mott-tvärsnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2(\hbar c)^2\cos^2(\theta/2)}{4(pc)^2\sin^4(\theta/2)} = 99.3$ mb/sr med data från uppgiften. Vi noterar att LAB och CM system näst intill överlappar ty elektronen väger väldigt lite jämfört strålmålet.

   Vi har
   $$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{expt}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} |F(\mathbf{q})|^2$$
   Vilket ger $|F(\mathbf{q}^2)|^2 = 80/99 \approx 0.81$. Enligt information i uppgiften kan vi anta att $F(\mathbf{q}^2)$ reell och positiv, dvs $F(\mathbf{q}^2) = 0.9$. Vi har också att $q = 2p\sin(\theta/2) = 62.8$ MeV/c vilket med första ordningens Taylorexpansion av formfaktorn gör det möjligt att erhålla ett uttryck för radien $\langle r^2\rangle \approx (1-0.9)\frac{6\cdot 197.3^2}{62.8^2}$ fm^2, dvs $\langle r^2\rangle \approx 5.9$ fm^2.

   Kärnradien ges av $R = \sqrt{\frac{5}{3}\langle r^2\rangle} \approx 3.1$ fm.

3. Vi har följande konfigurationer i skalmodellen:
   - ^{11}C: $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^3$
   - ^{12}C: $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4$
   - ^{13}C: $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^1$
   - ^{14}C: $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^3(1p_{1/2})^2)$

   Jämna/Udda-A isotoper har därmed positiv/negativ paritet. Jämna-A isotoper kopplar till totalt $J = 0$. Udda-A isotoper ovan har totalt J enligt sista oparade nukleonen, dvs ^{11}C har $J = 3/2$ och ^{13}C har $J = 1/2$.

4. Antag en 4-rörelsemängd P_X för den sönderfallande partikeln X. I bubbelkammaren sätter vi upp ett koordinatsystem så att 4-rörelsemängden för protonen ges av $P_p = (E_p, 0, p_p\sin\theta, p_p\cos\theta)$, där $\theta = 64°$, och 4-rörelsemängden för pionen ges av $P_\pi = (E_\pi, 0, 0, p_\pi)$. Notera att $c = 1$. 4-rörelsemängden är bevarad, dvs. $P_X = P_p + P_\pi$. Kvadrering ger $m_X^2 = P_X^2 = m_p^2 + m_\pi^2 + 2P_pP_\pi$, där vi utnyttjat att kvadraten av 4-rörelsemängden är den invarianta massan i kvadrat. Utveckling av korstermen ger nu, $m_X^2 = m_p^2 + m_\pi^2 + 2(E_pE_\pi - p_\pi p_p\cos\theta)$.

   Utnyttja sedan sambandet mellan total energi, massa, och rörelsemängd $E^2 = m^2 + p^2$ för att beräkna protonens och pionens totala energier E_p och E_π. Insättning av dessa samt rörelsemängderna och vinkeln θ från uppgiften ger $m_X = 1114$ MeV/c^2, i fysikaliska enheter.

   Vi detekterar en elektriskt positivt laddad baryon och en elektriskt negativt laddad meson. X måste vara en elektriskt neutral baryon med massa 1114 MeV/c^2. Troligtvis är $X = \Lambda^0$.

5. Negativt $Q-$värde.

   En proton är den lättaste baryonen i Standardmodellen, och eftersom baryontalet är bevarat i vedertagna teorier, kan sönderfallet ej ske på annat vis heller.

   Inuti en atomkärna är situationen annorlunda, ty protonen växelverkar med övriga nukleoner. Sönderfallet kan ske så länge Q-värdet är positivt.

6. ($c = 1$). Relatera $Q-$värdet till skillnaden bindingsenergi ΔB mellan moder- och dotterkärnorna. Antag sedan att ΔB ges helt och hållet av Coulombenergin.
   $Q_{\beta^+} = [M(^{29}\mathrm{P}) - M(^{29}\mathrm{Si}) - 2m_e] = [(15M(^1\mathrm{H}) + 14m_n - BE(^{29}\mathrm{P})) - (14M(^1\mathrm{H}) + 15m_n - BE(^{29}\mathrm{Si})) - 2m_e] = [M(^1\mathrm{H}) - m_n - 2m_e] + \Delta B$.

   Detta ger $3,92\,\mathrm{MeV} = [938,783\,\mathrm{MeV} - 939,565\,\mathrm{MeV} - 2 \cdot 0,511\,\mathrm{MeV}] + \Delta B$.
   Alltså $\Delta B = 5,72$ MeV, vilket ger en radie $R = \frac{3}{5}\frac{(15^2-14^2)e^2}{4\pi\varepsilon_0\Delta B} = 4.38$ fm.

   Med $R = r_0 A^{1/3}$ får vi $r_0 = 4.38 \cdot 29^{-1/3} = 1.4$ fm.