Tentamen i FUF050 Subatomär Fysik, F3

Skrivtid:	2021-06-01 08:30 - 12:30
Tillåtna hjälpmedel:	Alla hjälpmedel är tillåtna. *Det är dock inte tillåtet att samarbeta eller ta hjälp av andra personer.*
Inlämning:	Lämna in dina lösningar via Canvas. Se instruktion nedan.
Poäng:	Totalt 75 poäng, för betyg 3 krävs 40 poäng, för betyg 4 krävs 60 poäng, för betyg 5 krävs 80 poäng. Ev. poäng från inlämningar inkluderas.
Examinator:	Andreas Ekström.
Rättningsgranskning:	Canvas.

Instruktion för inlämning via Canvas:

- Skrivtiden avslutas kl 12.30, och inlämningen via Canvas stänger automatiskt kl 13.00. Scanna/fotografera dina lösningar och ladda därefter upp till Canvas Assignments: Tentamen Juni 2021.
- **Om du har beviljats förlängd skrivtid**, då har du 6 timmar på dig att genomföra tentamen, och därefter 45 minuter på dig att ladda upp dina lösningar till Canvas Assignments: Tentamen Juni 2021 [Förlängd skrivtid]. Inlämningen stänger automatiskt kl 15.15.
- Lösningar till tentamensproblem skall skrivas på papper, som vid en vanlig salstentamen.
- **Märk varje papper tydligt med ditt namn, tentamensuppgiftens nummer och sidnummer.**
- Lösningarna förväntas vara välstrukturerade, välmotiverade, och begripligt presenterade. Skriv och rita tydligt.
- Tänk på att ha god belysning när du scannar eller fotograferar dina lösningar. Använd gärna en dokumentscannings-app, t.ex. CamScanner, Genius Scan, OfficeLens, Adobe Scan
- Namnge dina bildfiler enligt Problem_YY_sida_XX.*
  Exempel: Problem_01_sida_02.jpg
- Om du vill kan du sammanställa bilder som tillhör samma lösning i ett dokument (t ex Word eller PDF, **ej zip** eller liknande) och namnge filen Problem_YY. Exempel: Problem_03.docx eller Problem_03.pdf.
- Om du använder Zoom på mobiltelefon och dessutom behöver scanna lösningar så kommer Zoom att bryta videon. Därför måste du skriva “Scannar lösningar” i Zoom-chatten så att tentavakten vet vad som försiggår.

1. Betrakta följande reaktion mellan en proton (p) och en neutron (n) där det bildas ett bundet system vi kallar för deuteron (d) och en foton (γ)
$$n + p \to d + \gamma.$$
Antag nu att du mäter en fotonenergi $E_\gamma = 2.230$ MeV samt att protonen och neutronen befinner sig i vila vid reaktionstillfället. Antag dessutom följande massor för protonen och neutronen: $m_p = 938.272$ MeV/c^2, $m_n = 939.565$ MeV/c^2.

   a) Härled en exakt relation mellan deuteronens massa m_d och m_n,m_p,E_γ.
   (Du behöver inte lösa ut m_d.) (5 p.)

   b) Gör rimliga approximationer och beräkna sedan ett numeriskt värde för m_d (5 p.)

2. a) Förklara varför följande partiklar inte kan existera i den enkla kvarkmodellen
   i.) Baryon med spinnkvantal 1
   ii.) Antibaryon med elektrisk laddning $+2e$
   iii.) Meson med elektrisk laddning $+1e$ och särkvanttal (*eng.* strangeness) $S = -1$

   b) Av följande reaktioner: vilka är tillåtna? vilka är inte tillåtna? Förklara varför
   i.) $\pi^- + p^+ \to \pi^0 + p^+$
   ii.) $\mu^+ \to e^+ + \gamma$
   iii.) $\pi^- + p^+ \to \Xi^- + K^+ + K^0$
   iv.) $\Lambda^0 \to \Sigma^- + \pi^+$
   v.) $\pi^0 \to e^+ + e^- + \gamma$
   vi.) $\pi^+ + p^+ \to \Lambda^0 + K^+ + \pi^+$
   vii.) $\pi^- + p^+ \to \pi^0 + \pi^0$

   (10 p.)

3. Vi studerar ett svagt sönderfall $\Xi^0 \to \Sigma^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ där Ξ-baryonen sönderfaller i vila i Lab-systemet. Beräkna maximal och minimal rörelseenergi för elektronen. Använd $m_{\Xi^0} = 1315$ MeV/c^2,$m_{\Sigma^+} = 1189$ MeV/c^2, $m_{e^-} = 0.5$ MeV/c^2, $m_{\bar{\nu}_e} \approx 0.07$ eV/c^2
(Ledning: behandla Σ och $\bar{\nu}$ tillsammans.) (15 p.)

4. Atomkärnan $^{27}_{14}$Si sönderfaller via β^+ till atomkärnan $^{27}_{13}$Al. Den sistnämnda kärnan har bindningsenergi $B(\text{Al}) = 224.95$ MeV. Den vid söndefallet utsända positronen har maximal kinetisk energi $T_e^{\max} = 3.79$ MeV.

   a) Utnyttja all information kopplad till sönderfallet i uppgiften för att beräkna bindningsenergin för moderkärnan. (10 p.)

   b) Använd bindingsenergierna för dotterkärnan och moderkärnan för att uppskatta ett numeriskt värde på koefficienten a_c i den semiempiriska massformeln. (5 p.)

5. Beräkna tvärsnittet $\sigma(e^+ + e^- \to \text{hadroner})$, i enheten barn (b), för att producera hadroner vid elektron-positron spridning med total CM energi $E_{\text{CM}} = 2$ GeV. Till din hjälp har du att tvärsnittet för att producera myoner $\mu^+ + \mu^-$ i samma reaktion ges av
$$\sigma(e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{CM}^2}.$$
I ovanstående uttryck har vi använt oss av naturliga enheter ($\hbar = c = 1$) samt betecknar finstrukturkonstanten med α. Du behöver inte inkludera några effekter från den starka kraften.

   (15 p.)

6. Använd skalmodellen för att härleda totalt rörelsemängdsmoment J och paritet P för grundtillstånden i ^{11}C,^{12}C,^{13}C,^{14}C. (10 p.)

Lycka Till!

Lösningsskiss Tentamen i FUF050 Subatomär Fysik 2021-06-01

Naturliga enheter ($hbar = c = 1$) om inget annat anges.

1. a. Ställ upp fyrrörelsemängder $P_p = (m_p, \vec{0})$, $P_p = (m_n, \vec{0})$, $P_d = (E_d, \vec{p}_d)$ och $P_\gamma = (E_\gamma, \vec{p}_\gamma)$. Bevarande av total fyrrörelsemängd ger $P_p + P_n = P_d + P_\gamma$. Kvadrering ger $(m_p + m_n)^2 = (E_d + E_\gamma)^2 - (\vec{p}_d + \vec{p}_\gamma)^2$. Bevarande av total trerörelsemängd kräver motriktade och lika stora rörelsemängder ($\vec{p}_d = -\vec{p}_\gamma$) för deuteronen och fotonen. Vi får alltså $(m_p + m_n)^2 = E_d^2 + 2E_dE_\gamma + E_\gamma^2$ där $E_d^2 = m_d^2 + E_\gamma^2$. I sista likheten har vi utnyttjat att fotonens rörelsemängd och energi är relaterade via $E_\gamma = |\vec{p}_\gamma|$ och att $|\vec{p}_\gamma| = |\vec{p}_d|$.

   b. Vi utnyttjar att $E_d \approx m_d$ ty deuteronens rekyl är försumbar ($p_d << E_d$). Så vi får $(m_p+m_n)^2 \approx m_d^2+2m_dE_\gamma+E_\gamma^2 = (m_d+E_\gamma)^2$. Vilket ger $m_d \approx m_p+m_n-E_\gamma = 1875.607$ MeV. Givetvis kan man approximera vidare att $E_\gamma << m_d$ vilket leder till att deuteronens massa blir $m_d \approx m_p + m_n$, vilket är något mindre rimligt då vi vet att deuteronen är bunden.

2. a) i.) Baryon med spinnkvantal 1: kvarkar är fermioner med halvtaligt spinn och baryoner består av tre stycken kvarkar.

   ii.) Antibaryon med elektrisk laddning $+2e$: en antibaryon består av tre stycken antikvarkar med vardera maximal elektrisk laddning $+1/3e$ vilket ger maximal laddning $+1e$ för en antibaryon.

   iii.) Meson med elektrisk laddning $+1e$ och särkvanttal (*eng.* strangeness) $S = -1$: mesoner är system bestående av en kvark och en antikvark. Särkvanttalet $S = -1$ kräver att mesonen innehåller en s kvark. Denna har elektrisk laddning -1/3e. Antikvarken kan ha elektrisk laddning -2/3e eller $+1/3e$. Det finns inga möjligheter att nå total elektrisk laddning $+1e$.

   b) Av följande reaktioner: vilka är tillåtna? vilka är inte tillåtna? Förklara varför

   i.) $\pi^- + p^+ \to \pi^0 + p^+$: Ej tillåten. Total laddning ej bevarad

   ii.) $\mu^+ \to e^+ + \gamma$: Ej tillåten. Leptontal L_e och L_μ ej bevarade.

   iii.) $\pi^- + p^+ \to \Xi^- + K^+ + K^0$: Tillåten. $\Xi^- = (dss)$, $K^+ = (u\bar{s})$, $K^0 = (d\bar{s})$.

   iv.) $\Lambda^0 \to \Sigma^- + \pi^+$: Ej tillåten. Total energi ej bevarad

   v.) $\pi^0 \to e^+ + e^- + \gamma$: Tillåten.

   vi.) $\pi^+ + p^+ \to \Lambda^0 + K^+ + \pi^+$: Tillåten.

   vii.) $\pi^- + p^+ \to \pi^0 + \pi^0$: Ej tillåten. Baryontalet ej bevarat.

3. Vi har ett trekropparsönderfall. Den minsta kinetiska energin för elektronen är 0 MeV, ty övriga sönderfallsprodukter kan ensamma uppfylla övriga kinematiska villkor.

   För att beräkna den maximala (kinetiska) energin för elektronen så sätter vi upp fyrrörelsemängder där vi behandlar $\Sigma\bar{\nu}$-delen av systemet tillsammans. Vi har $P_\Xi = P_{\Sigma\bar{\nu}} + P_e$. I och med att Ξ-baryonen sönderfaller i vila har vi $\vec{p}_\Xi = 0$ och utnyttjar detta vid kvadrering av alla fyrrörelsemängder genom att flytta över P_e till vänsterledet. Vi får då: $m_\Xi^2 + m_e^2 - 2m_\Xi E_e = E_{\Sigma\bar{\nu}}^2 - p_{\Sigma\bar{\nu}}^2$ vilket ger $E_e = \frac{m_\Xi^2 + m_e^2 - E_{\Sigma\bar{\nu}}^2 + p_{\Sigma\bar{\nu}}^2}{2m_\Xi}$. Vi kan nu uttnyttja $E^2 = p^2 + m^2$ och identifiera en invariant massa $m_{\Sigma\bar{\nu}}^2 = E_{\Sigma\bar{\nu}}^2 - p_{\Sigma\bar{\nu}}^2$. Vi har att E_e antar sitt maximala värde då $m_{\Sigma\bar{\nu}}^2$ antar sitt minsta värde, dvs $(m_\Sigma + m_{\bar{nu}})^2$. En beräkning ger $E_e^{\max} = 120$ MeV, vilket innebär $T_e^{\max}119.5$ MeV

4. a) Vi kan bortse från neutrinomassan ty den är åtskilliga storleksordningar mindre än den relevanta storleksordningen för den sökta bindningsenergin. Den totala energin är bevarad: $m(\text{Si}) = m(\text{Al}) + m_e + T_e^{\max}$. Vi har även att kärnmassan för en kärna med Z protoner och N neutroner är relaterad till bindningsenergin $B(Z, N)$ via $m(Z, N) = Zm_p + Nm_n - B(Z, N)$. Sammantaget har vi $B(\text{Si}) = m_p - m_n - m_e + B(\text{Si}) - T_e^{\max} = 219.36$ MeV.

   b) Vi startar från semiempiriska massformeln för udda-A kärnor uttryckt i motsvarande bindingsenergi (partermen ger inget bidrag till någon av dessa udda-A kärnor).

   $$B(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(Z - A/2)^2}{A}$$

   Skillnaden i bindningsenergi ges av $\Delta B = B(Z, A) - B(Z - 1, A) = a_C((Z - 1)^2 - Z^2)/A^{1/3} = a_c(1 - 2Z)/A^{1/3} \Rightarrow a_c = \Delta B \cdot A^{1/3}/(1 - 2Z)$. Notera att asymmetritermen proportionell mot a_a inte ger något bidrag till skillnaden i bindningsenergi mellan dessa spegekärnor. Insättning ger: $\Delta B = 219.36 - 224.95 = -5.59$ och $a_c = 5.59 \cdot 27^{1/3}/27 = 5.59 \cdot 27^{-2/3} = 0.62$ MeV

5. Vi utnyttjar samma argument som i avsnittet om 'color counting' i kursboken och skriver

   $$R = N_c \sum_q Q_q^2 = \frac{\sigma(e^+ + e^- \to \text{hadroner})}{\sigma(e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-)}.$$

   Vi har $N_c = 3$ st olika färger på kvarkarna och kvark q har elektrisk laddning Q_q. Med $E_{cm} = 2$ GeV kan vi bilda kvark-antikvarkpar med smaker u, d, s. Vi får alltså $R = 3(4+1+1)/9 = 2$. Tvärsnittet $\sigma(e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-)$ måste multipliceras med $(\hbar c)^2 \approx (0.197)^2$ GeV$^2 \cdot$ fm^2 för att få korrekt enhet. Vi har alltså

   $$\sigma(e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2}(\hbar c)^2 = \frac{4\pi}{3 \cdot 2^2 \cdot 137^2}(0.197)^2 \text{fm}^2 \approx 22 \text{nb}$$

   och får därmed $\sigma(e^+ + e^- \to \text{hadroner}) \approx 44$ nb (nanobarn) (för full poäng krävs inte att man korrigerar R map α_s enligt Ekv. 5.23 i boken)

6. Vi har följande konfigurationer i skalmodellen:

   - ^{11}C: $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^3$
   - ^{12}C: $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4$
   - ^{13}C: $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^1$
   - ^{14}C: $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^3(1p_{1/2})^2)$

   Jämna/Udda-A isotoper har därmed positiv/negativ paritet. Jämna-A isotoper kopplar till totalt $J = 0$. Udda-A isotoper ovan har totalt J enligt sista oparade nukleonen, dvs ^{11}C har $J = 3/2$ och ^{13}C har $J = 1/2$.